

Apuntes
de
Introducción a las
Variedades de Riemann

Curso 1992-93

Angel Montesdeoca

Contents

Variedades semi-riemannianas	1
1.1 Formas bilineales simétricas	1
1.2 Producto escalar	2
1.3 Variedades y subvariedades semi-riemannianas	5
1.4 Isometrías	5
1.5 Conexión de Levi-Civita	9
1.6 Desplazamiento paralelo	15
1.7 Geodésicas	16
1.8 Aplicación exponencial	18
1.9 Curvatura	20
1.10 Curvatura seccional	22
1.11 Curvatura escalar y curvatura de Ricci	24
1.12 Isometrías locales	30
Subvariedades semi-riemannianas	33
2.1 Campos de vectores tangentes y normales	33
2.2 Conexión inducida	34
2.3 Geodésicas en subvariedades	37
2.4 Subvariedades totalmente geodésicas	38
2.5 Hipersuperficies semi-riemannianas	39
2.6 La ecuación de Codazzi	46
2.7 Hipersuperficie totalmente umbilicales	48
2.8 La conexión normal	50
Espacios simétricos	55
3.1 Campos de Jacobi	55
3.2 Variedades localmente simétricas	57
3.3 Recubrimientos semi-riemannianos	61
3.4 Espacios simétricos	63
3.5 Espacios forma simplemente conexos	63
3.6 Espacios semi-riemannianos homogéneos	65
3.7 Métricas bi-invariantes sobre grupos de Lie	66
3.8 Espacios homogéneos como cociente de grupos	69
3.9 Espacios homogéneos reductivos	70
3.10 Construcción de espacios simétricos	74
Diferentes enfoques de conexiones	79
A1 Enfoque axiomático	79
A2 Enfoque tensorial o clásico	81
Completitud riemanniana	89
B1 Lema de Gauss	89
B2 Longitud de arco	90
B3 Variedades de Riemann completas	95
Nota sobre geometría semi-riemanniana y órbitas planetarias	97
C1 Precesión de los equinoccios	97
C2 Ecuaciones de la gravitación de Einstein	99
C3 Órbitas planetarias en la teoría clásica de Newton	100
C4 La solución de Schwarzschild	103
C5 Geodésicas del espacio de Schwarzschild	105

Ejercicios	111
Bibliografía	131
Símbolos	133
Índice alfabético	135

TEMA I

Variedades semi-riemannianas

1.1 Formas bilineales simétricas

En todo lo que sigue designaremos por E un espacio vectorial real de dimensión finita.

Definición 1.1.1 Una forma bilineal simétrica sobre E es una aplicación \mathbb{R} -bilineal $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, verificando

$$B(u, v) = B(v, u), \quad \forall u, v \in E.$$

B es definida positiva, si $B(u, u) > 0$, $\forall u \in E - \{0\}$.

B es definida negativa, si $B(u, u) < 0$, $\forall u \in E - \{0\}$.

B es definida si es definida positiva o definida negativa.

B es semidefinida positiva, si $B(u, u) \geq 0$, $\forall u \in E$.

B es semidefinida negativa, si $B(u, u) \leq 0$, $\forall u \in E$.

B es semidefinida si es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

B es no degenerada, si $B(u, v) = 0$, $\forall v \in E$, implica $u = 0$.

Nota 1.1.1 Obviamente, si B es definida es semidefinida y no degenerada. Para el recíproco ver el Ejercicio 1.

Si B es una forma bilineal simétrica sobre E entonces, para un subespacio F de E , la restricción $B|_{F \times F}$ es así mismo simétrica y bilineal. Si B es definida o semidefinida, también lo es $B|_{F \times F}$.

Definición 1.1.2 Se conoce como índice ν de una forma bilineal simétrica B sobre E al número entero que es la dimensión del mayor subespacio $F \subset E$ sobre el cual $B|_{F \times F}$ es definida negativa.

Así, $0 \leq \nu \leq n = \dim E$ y $\nu = 0$ si y sólo si B es semidefinida positiva. En la Proposición 1.2.4 se dará una versión más práctica del índice de una forma bilineal simétrica.

Definición 1.1.3 La aplicación $Q: E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $Q(u) = B(u, u)$, $u \in E$, se denomina forma cuadrática asociada a B .

Nota 1.1.2 La forma bilineal simétrica B puede ser obtenida a partir de su forma cuadrática asociada mediante la identidad

$$B(u, v) = \frac{1}{2}(Q(u+v) - Q(u) - Q(v)).$$

Definición 1.1.4 Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de E , la matriz $(B_{ij}) = (B(e_i, e_j))$ se denomina matriz de B relativa a la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Ya que B es simétrica, la matriz (B_{ij}) es simétrica; y ésta determina a aquella, pues

$$B \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i e_i, \sum_{j=1}^n \mu^j e_j \right) = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} \lambda^i \mu^j.$$

Proposición 1.1.1 Una forma bilineal simétrica es no degenerada si y sólo si su matriz relativa a una base es inversible.

Demostración.- Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base E , si $u \in E$, observemos que

$$(B(u, v) = 0, \forall v \in E) \iff (B(u, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}).$$

Supongamos que B sea degenerada, lo que es equivalente a que exista un vector $u \in E - \{0\}$ ($u = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n$, $\lambda^i \in \mathbb{R}$, no todos nulos) tal que

$$B(u, e_i) = B\left(\sum_{j=1}^n \lambda^j e_j, e_i\right) = \sum_{j=1}^n B_{ji} \lambda^j = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Pero esto equivale a la dependencia lineal de las filas o columnas de (B_{ij}) ; esto es, a que (B_{ij}) sea singular. \square

1.2 Producto escalar

Definición 1.2.1 Un producto escalar g sobre un espacio vectorial E es una forma bilineal simétrica no degenerada. Un producto interior es un producto escalar definido positivo.

Ejemplo 1.2.1 El producto euclídeo en \mathbb{R}^n : $u \cdot v = \sum_{i=1}^n u^i v^i$, para $u = (u^1, \dots, u^n)$, $v = (v^1, \dots, v^n)$, es un ejemplo de producto interior.

Un ejemplo de producto escalar indefinido en \mathbb{R}^2 viene dado por la forma bilineal indefinida (no definida) siguiente:

$$g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(u, v) = u^1 v^1 - u^2 v^2.$$

Definición 1.2.2 En un espacio vectorial E con un producto escalar g , dos vectores $u, v \in E$ se dice que son ortogonales ($u \perp v$) si $g(u, v) = 0$. Dos subconjuntos $A, B \subset E$ son ortogonales ($A \perp B$) si $u \perp v$ para todo $u \in A$ y $v \in B$. Si $F \subset E$ es un subespacio de E , al subespacio $F^\perp = \{u \in E / \{u\} \perp F\}$ se le denomina ortogonal a F .

Nota 1.2.1 Cuando el producto escalar es indefinido pueden existir vectores de $E - \{0\}$ que sean ortogonales a sí mismos: el vector $u = (1, 1)$ en el Ejemplo 1.2.1.

En general, si F es un subespacio de E , F^\perp no es complementario de F en E ; es decir, $F + F^\perp$ no es todo E . Es el caso del subespacio F generado por el vector $u = (1, 1)$ del Ejemplo 1.2.1.

Proposición 1.2.1 Si F es un subespacio de un espacio vectorial E con un producto escalar g , entonces

- (1) $\dim F + \dim F^\perp = n = \dim E$
- (2) $(F^\perp)^\perp = F$.

Demostración.- (1) Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E adaptada a F , esto es, para la cual $\{e_1, \dots, e_r\}$ forman una base de F .

$$v \in F^\perp \iff g(v, e_i) = 0, \quad (1 \leq i \leq r) \quad \text{o sea} \quad \sum_{j=1}^n g_{ij} v^j = 0, \quad (1 \leq i \leq r).$$

Este es un sistema lineal de r ecuaciones y n incógnitas, de rango r . Luego el espacio generado por las soluciones es de dimensión $n - r$. Pero, por la construcción, las soluciones (v^1, \dots, v^n) dan los vectores de F^\perp .

(2) Para demostrar la segunda relación, observemos que si $v \in F \implies \{v\} \perp F^\perp \iff v \in (F^\perp)^\perp$, luego $F \subset (F^\perp)^\perp$, Y como, por (1), estos subespacios tienen la misma dimensión, entonces son iguales. \square

Nota 1.2.2 Cuando un producto escalar g es indefinido, pueden existir subespacios donde g es degenerada. Por lo que un subespacio de un espacio vectorial con un producto escalar, no necesariamente es un espacio con un producto escalar.

Nótese que en un espacio vectorial con un producto escalar g , $E^\perp = \{0\}$.

Proposición 1.2.2 Sea E un espacio vectorial con un producto escalar g . Un subespacio F de E es no degenerado ($g|_{F \times F}$ no degenerada) si y sólo si E es suma directa de F y F^\perp ($E = F \oplus F^\perp$).

Demostración.- Usando la identidad

$$\dim(F + F^\perp) = \dim F + \dim F^\perp - \dim(F \cap F^\perp),$$

y de acuerdo con la Proposición 1.2.1: $\dim F + \dim F^\perp = n = \dim E$, resulta que

$$F + F^\perp = E \iff F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Pero

$$F \cap F^\perp = \{u \in F / u \perp F\} = \{0\} \iff F \text{ es no degenerado.} \quad \square$$

Definición 1.2.3 Sea E un espacio vectorial con un producto escalar g y $u \in E$.

Se dice que u es unitario si su norma $\|u\| = \sqrt{|g(u, u)|}$ es igual a 1; esto es, si $g(u, u) = \pm 1$.

Un conjunto de vectores unitarios y mutuamente ortogonales se dice que es ortonormal.

Proposición 1.2.3 Un espacio vectorial $E \neq \{0\}$ con un producto escalar g tiene una base ortonormal.

Demostración.- Ya que g es no degenerada y simétrica, existe un vector $u \in E - \{0\}$ tal que $g(u, u) \neq 0$. Entonces $\frac{u}{\|u\|}$ es unitario. Así, es suficiente demostrar, por inducción, que “todo conjunto ortonormal $\{e_1, \dots, e_r\}$, con $r < n = \dim E$, puede ser ampliado por un vector más”.

Estos vectores generan un subespacio F , r -dimensional, el cual es no degenerado. Basta entonces encontrar un vector unitario en F^\perp . Pero al ser F^\perp no degenerado, contiene un vector unitario, por la misma razón que al principio. \square

La matriz de g relativa a una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ es diagonal, y denotaremos los términos de la diagonal principal por

$$\varepsilon_j = g(e_j, e_j) = \pm 1.$$

En lo que sigue ordenaremos los elementos de una base ortonormal de forma que los ε_j con signo negativo (si los hay) queden primero y pondremos $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, a lo que llamaremos **signatura** del producto escalar.

Proposición 1.2.4 En un espacio vectorial con un producto escalar g , si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal, el número de signos negativos en la signatura $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, es el índice del producto escalar g .

Demostración.- Supongamos que los primeros m signos de ε_i son negativos. Evidentemente g es definida negativa sobre el subespacio S generado por $\{e_1, \dots, e_m\}$; así $\nu \geq m$.

Para probar la otra desigualdad, sea F un subespacio arbitrario sobre el que g es definida negativa. Definimos la aplicación lineal $\pi: F \rightarrow S$, por

$$\pi(u) = - \sum_{i=1}^m g(u, e_i) e_i.$$

Nos bastará probar que π es inyectiva, pues entonces $\dim F \leq \dim S = m$, o sea $\nu \leq m$. Para probar la inyectividad, supongamos que $\pi(u) = 0$, entonces u se expresa como

$$u = - \sum_{i=1}^m g(u, e_i) e_i + \sum_{j=m+1}^n g(u, e_j) e_j = \sum_{j=m+1}^n g(u, e_j) e_j,$$

pero al ser $u \in F$, donde g es definida negativa, se tiene

$$0 \geq g(u, u) = \sum_{j=m+1}^n (g(u, e_j))^2.$$

Luego, $g(u, e_j) = 0$ para $j > m$; resulta entonces que $u = 0$. \square

Se tiene la siguiente relación entre los índices de g y de su restricción a un subespacio:

Si F es un subespacio no degenerado del espacio vectorial E con producto escalar g , entonces el índice de g es la suma del índices de $g|_{F \times F}$ más el índice de $g|_{F^\perp \times F^\perp}$; esto es,

$$\text{ind } g = \text{ind } g|_{F \times F} + \text{ind } g|_{F^\perp \times F^\perp}.$$

Basta observar que existe una base ortonormal adaptada a la suma directa $F \oplus F^\perp = E$. \square

Definición 1.2.4 Una aplicación lineal, $f: E \rightarrow E'$, entre espacios vectoriales E y E' con productos escalares respectivos g y g' , se dice conserva el producto escalar si

$$g'(f(u), f(v)) = g(u, v), \quad \forall u, v \in E.$$

Nota 1.2.3 Una aplicación lineal que conserva el producto escalar es necesariamente inyectiva.

De la Nota 1.1.2, se sigue que una aplicación lineal, $f: E \rightarrow E'$, conserva el producto escalar si y sólo si conserva su forma cuadrática asociada; es decir,

$$Q'(f(u)) = Q(u), \quad \forall u \in E.$$

Definición 1.2.5 Un isomorfismo lineal $f: E \rightarrow E'$ que conserva el producto escalar se denomina isometría lineal.

Proposición 1.2.5 Dos espacios vectoriales E y E' , con sendos productos escalares g y g' , tienen la misma dimensión e índice si y sólo si existe una isometría lineal de E sobre E' .

Demostración.- Supongamos que $\dim E = \dim E'$ e $\text{ind } g = \text{ind } g'$. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ bases ortonormales de E y E' , respectivamente. Por la Proposición 1.2.4, podemos suponer que

$$g(e_i, e_i) = g'(e'_i, e'_i), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Sea f la aplicación lineal tal que $f(e_i) = e'_i$ ($i = 1, \dots, n$). Entonces

$$g'(f(e_i), f(e_j)) = g'(e'_i, e'_j) = g(e_i, e_j), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Y por linealidad se sigue que f es isometría.

Recíprocamente, si $f: E \rightarrow E'$ es una isometría lineal, entonces f aplica una base ortonormal de E en una base ortonormal de E' . Entonces $\dim E = \dim E'$ y por la Proposición 1.2.4, anterior, $\text{ind } g = \text{ind } g'$. \square

1.3 Variedades y subvariedades semi-riemannianas

Definición 1.3.1 Un tensor métrico g sobre una variedad diferenciable M es un campo de tensores diferenciable de tipo $(0, 2)$ sobre M , simétrico, no degenerado y de índice constante. Es decir, para cada punto $x \in M$, g_x es un producto escalar sobre el espacio tangente $T_x(M)$, de índice el mismo para todos los puntos $x \in M$.

Una variedad semi-riemanniana es una variedad diferenciable M dotada de un tensor métrico g , que denotaremos por (M, g) .

El valor común ν del índice de g_x sobre una variedad semi-riemanniana M se denomina índice de M .

Nota 1.3.1 Si $\nu = 0$, M es una variedad de Riemann; cada g_x es un producto escalar definido positivo (producto interior) sobre $T_x(M)$. Si $\nu = 1$ y $n \geq 2$, M es una variedad de Lorentz.

Si (x^1, \dots, x^n) es un sistema coordenado sobre $U \subset M$, las componentes del tensor métrico sobre U son

$$g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

Ya que g es no degenerada, en cada punto $x \in U$, la matriz $(g_{ij}(x))$ es inversible, y su inversa se denota por $(g^{ij}(x))$. De la fórmula de los términos de la matriz inversa, se deduce que las funciones g^{ij} son diferenciables sobre U . Además, como g es simétrico, $g_{ij} = g_{ji}$, se sigue que $g^{ij} = g^{ji}$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Finalmente, sobre U el tensor métrico puede escribirse como

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

Definición 1.3.2 Sea N una subvariedad de una variedad semi-riemanniana (M, g) e $i : N \hookrightarrow M$ la inclusión canónica. Si i^*g es un tensor métrico sobre N , se dice que N es una subvariedad semi-riemanniana de M .

Nota 1.3.2 Cuando el tensor métrico g de M es indefinido, entonces i^*g no es necesariamente una métrica sobre N . i^*g es un campo de tensores de tipo $(0, 2)$ diferenciable y simétrico, por tanto él es una métrica si y sólo si cada $T_x(N)$ es no degenerado en $T_x(M)$ relativamente a g_x y el índice de $T_x(N)$ es el mismo para todo $x \in N$.

1.4 Isometrías

Definición 1.4.1 Sean M y M' variedades semi-riemannianas con tensores métricos g y g' . Una isometría de M sobre M' es un difeomorfismo $F : M \rightarrow M'$ que conserva el tensor métrico; es decir, $F^*g' = g$.

Dos variedades entre las que existe una isometría se dice que son isométricas.

El estudio de los invariantes isométricos corresponde a la geometría semi-riemanniana.

Nota 1.4.1 Para cada punto $x \in M$, $(F_*)_x$ es una isometría lineal.

La aplicación identidad en una variedad semi-riemanniana es una isometría.

La composición de isometrías es una isometría.

La aplicación inversa de una isometría es una isometría.

Todo espacio vectorial con un producto escalar puede considerarse como una variedad semi-riemanniana.

Una isometría lineal entre espacios vectoriales es una isometría como variedades semi-riemannianas.

Vamos a situarnos en un caso particular de variedades semi-riemannianas, y más aún, en un caso particular de variedades de Riemann como son los espacio euclídeos y en estos estudiar las isometrías. Dado que la generalización a dimensiones superiores no crea gran dificultad, para mejor fijar las ideas, nos situaremos en el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 .

De geometría elemental conocemos que dos triángulos son **congruentes** si existe un movimiento rígido que lleva uno en el otro. Resulta entonces que ángulos correspondientes en triángulos congruentes son iguales, los lados correspondientes tienen la misma longitud, las áreas que encierran son iguales, etc... Y, recíprocamente, hay varias maneras de ver si dos triángulos son congruentes; por ejemplo, comprobando que las longitudes de los lados son iguales.

A continuación, estudiaremos los movimientos rígidos (isometrías) el espacio euclídeo y extendemos estos conceptos, relativos a triángulos, a otros objetos geométricos.

La interpretación de elementos de \mathbb{R}^3 como puntos o vectores se hará según el contexto en que se esté trabajando, sin necesidad de especificar que se trata de uno u otro, salvo que se cree confusión. Hecha esta aclaración, pasamos a formalizar el concepto de movimiento rígido.

Definición 1.4.2 Si p y q son puntos de \mathbb{R}^3 , la distancia euclídea de p a q es $d(p, q) = \|p - q\|$.

Una isometría, o movimiento rígido, en el espacio euclídeo es una aplicación diferenciable que conserva la distancia euclídea entre puntos, más precisamente:

Definición 1.4.3 Una isometría euclídea de \mathbb{R}^3 es una aplicación diferenciable $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$d(F(p), F(q)) = d(p, q) \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3.$$

Ejemplo 1.4.1 1. *Traslaciones*

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad p \mapsto T(p) = p + a \quad (a \in \mathbb{R})$$

Se trata de una isometría euclídea, puesto que

$$d(T(p), T(q)) = d(p + a, q + a) = \|(p + a) - (q + a)\| = \|p - q\| = d(p, q).$$

2. *Rotación alrededor del eje OZ de ángulo θ .*

$$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad F(p) = F(p^1, p^2, p^3) = (p^1 \cos \theta - p^2 \sin \theta, p^1 \sin \theta + p^2 \cos \theta, p^3), \quad \forall p = (p^1, p^2, p^3) \in \mathbb{R}^3.$$

Claramente F es diferenciable y con un cálculo fácil se comprueba que conserva la distancia euclídea.

Definición 1.4.4 Una transformación ortogonal (o isometría lineal) es una aplicación lineal $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que conserva el producto escalar, es decir

$$\langle H(p), H(q) \rangle = \langle p, q \rangle \quad \forall p, q \in \mathbb{R}^3$$

Una transformación ortogonal es necesariamente biyectiva. Pues si $H(p) = 0$, implicaría que $\langle p, q \rangle = 0$, para to $q \in \mathbb{R}^3$ y, por consiguiente, $p = 0$. Así, H es inyectiva, y por tanto, debido a las dimensiones, biyectiva.

Proposición 1.4.1 Toda transformación ortogonal de \mathbb{R}^3 es una isometría euclídea.

Demostración.- Veamos primero que si $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una transformación ortogonal, ella conserva la norma. Sea $p \in \mathbb{R}^3$

$$\|H(p)\|^2 = \langle H(p), H(p) \rangle = \langle p, p \rangle = \|p\|^2.$$

Luego $\|H(p)\| = \|p\|$.

Ahora como además H es lineal, para $p, q \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$d(H(p), H(q)) = \|H(p) - H(q)\| = \|H(p - q)\| = \|p - q\| = d(p, q).$$

Con lo que H es una isometría euclídea. □

A modo de recíproco tenemos el siguiente resultado:

Proposición 1.4.2 Si F es una isometría euclídea de \mathbb{R}^3 tal que $F(0) = 0$, entonces es una transformación ortogonal

Demostración.- Veamos primero que conserva la norma. Si $p \in \mathbb{R}^3$, se tiene por definición de distancia euclídea que $\|p\| = d(0, p)$, luego

$$\|F(p)\| = d(0, F(p)) = d(F(0), F(p)) = d(0, p) = \|p\|.$$

Así F conserva las normas. Ahora, por polarización, demostremos que conserva el producto escalar:

Como F es isometría euclídea, resulta que, para $p, q \in \mathbb{R}^3$, $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$, es decir, $\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|$ lo que implica

$$\begin{aligned} \langle F(p) - F(q), F(p) - F(q) \rangle &= \langle p - q, p - q \rangle \\ \|F(p)\|^2 - 2\langle F(p), F(q) \rangle + \|F(q)\|^2 &= \|p\|^2 - 2\langle p, q \rangle + \|q\|^2. \end{aligned}$$

Luego como F conserva la norma, resulta

$$\langle F(p), F(q) \rangle = \langle p, q \rangle.$$

Nos falta demostrar que F es lineal:

Consideremos la base canónica ortonormal $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$, al conservar F el producto escalar, también $\{F(e_1), F(e_2), F(e_3)\}$ es una base ortonormal.

$$p = \sum_{i=1}^3 p^i e_i \Rightarrow F(p) = \sum_{i=1}^3 \langle F(p), F(e_i) \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^3 \langle p, e_i \rangle F(e_i) = \sum_{i=1}^3 p^i F(e_i).$$

De donde si $p, q \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$F(\lambda p + \nu q) = \sum_{i=1}^3 (\lambda p^i + \nu q^i) F(e_i) = \lambda \sum_{i=1}^3 p^i F(e_i) + \nu \sum_{i=1}^3 q^i F(e_i) = \lambda F(p) + \nu F(q).$$

⊠

Daremos ahora el aspecto concreto de una isometría euclídea arbitraria; veremos que es posible expresar cualquier isometría como composición de una transformación ortogonal con una traslación.

Teorema 1.4.1 Sea F una isometría euclídea de \mathbb{R}^3 , existe entonces una única traslación T y una única transformación ortogonal H , tal que $F = T \circ H$.

Demostración.- Sea la traslación $T(p) = p + F(0)$; la aplicación inversa T^{-1} es una traslación: $T^{-1}(p) = p - F(0)$. Ahora bien como la composición de isometrías euclídeas es otra isometría euclídea, tenemos que $T^{-1} \circ F$ es una isometría euclídea, y además

$$(T^{-1} \circ F)(0) = T^{-1}(F(0)) = F(0) - F(0) = 0.$$

Por tanto por la Proposición 1.4.2, $H = T^{-1} \circ F$ es una transformación ortogonal. Con lo que $F = T \circ H$ es la composición de una transformación ortogonal con una traslación.

Nos falta demostrar la unicidad:

Supongamos que $F = \overline{T} \circ \overline{H}$, donde \overline{T} es una traslación y \overline{H} es una transformación ortogonal. Veamos que $T = \overline{T}$ y $H = \overline{H}$. Pero $T \circ H = \overline{T} \circ \overline{H}$ implica que $H = T^{-1} \circ \overline{T} \circ \overline{H}$. Como H y \overline{H} son lineales, cumplen que $H(0) = \overline{H}(0) = 0$, luego $(T^{-1} \circ \overline{T})(0) = 0$. Y como la composición de traslaciones es una traslación y la traslación que deja un punto fijo es la identidad, resulta que $T^{-1} \circ \overline{T} = I$; es decir $T = \overline{T}$. Además, y en consecuencia

$$T \circ H = \overline{T} \circ \overline{H} \Rightarrow T \circ H = T \circ \overline{H} \Rightarrow T^{-1} \circ T \circ H = T^{-1} \circ T \circ \overline{H} \Rightarrow H = \overline{H}.$$

⊠

Dado que para una isometría euclídea F la descomposición $F = T \circ H$ que da el teorema anterior es única, diremos que H es la parte ortogonal de F y que T es la parte de traslación de F .

En notación matricial, si tomamos en \mathbb{R}^3 la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, una isometría euclídea $F = T \circ H$, con

$$T(p) = p + a \quad T(p^1, p^2, p^3) = (p^1, p^2, p^3) + (a^1, a^2, a^3)$$

$$H(p) = \left(\sum_{i=1}^3 c_i^1 p^i, \sum_{i=1}^3 c_i^2 p^i, \sum_{i=1}^3 c_i^3 p^i \right).$$

Poniendo los vectores en columnas, tenemos la siguiente expresión matricial de $F = T \circ H$

$$\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix}$$

donde la matriz (c_j^i) es ortogonal en el sentido de que su inversa es igual a su traspuesta.

Pasamos a estudiar la aplicación inducida entre los espacios tangentes de una isometría euclídea.

Proposición 1.4.3 Si $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una isometría con parte ortogonal H , entonces se tiene

$$F_*(v_p) = H(v)_{F(p)} \quad \forall v_p \in T_p(\mathbb{R}^3).$$

Demostración.- Pongamos $F = T_a \circ H$, es decir $F(p) = a + H(p)$. Si $v_p \in T_p(\mathbb{R}^3)$

$$F_*(v_p) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(p + tv) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (a + H(p) + tH(v)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F(p) + tH(v)) = H(v)_{F(p)}.$$

□

Corolario 1.4.3.1 Las isometrías euclídeas conservan el producto escalar, es decir:

$$\langle F_*(v_p), F_*(w_p) \rangle = \langle v_p, w_p \rangle \quad \forall v_p, w_p \in T_p(\mathbb{R}^3).$$

Demostración.- Basta recordar que, por definición, las transformaciones ortogonales conservan el producto escalar. Así, si H es la parte ortogonal de F , se tiene, en virtud de la proposición anterior, que

$$\langle F_*(v_p), F_*(w_p) \rangle = \langle H(v)_{F(p)}, H(w)_{F(p)} \rangle = \langle H(v), H(w) \rangle = \langle v, w \rangle = \langle v_p, w_p \rangle.$$

□

Así como dos puntos determinan una única traslación que transforma uno en el otro, dos sistemas de referencias ortonormales determinan una misma isometría euclídea, esto es se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.4.4 Dados sistemas de referencia ortonormales en \mathbb{R}^3 , $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ en un punto p y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ en un punto q , existe una única isometría $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $F(u_i) = v_i$ ($1 \leq i \leq 3$).

Demostración.- Como los espacios tangentes $T_p(\mathbb{R}^3)$ y $T_q(\mathbb{R}^3)$ son canónicamente isomorfismo a \mathbb{R}^3 ; consideremos primero la única transformación lineal $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que lleva la base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ en la $\{v_1, v_2, v_3\}$ de tal forma que $H(u_i) = v_i$ ($1 \leq i \leq 3$). Se trata de una transformación ortogonal. Sea además la traslación de vector $q - H(p)$. Entonces la isometría lineal $F = T \circ H$ lleva la referencia B_1 en la B_2 . En efecto, $F(p) = T(H(p)) = H(p) + q - H(p) = q$ y $F_*(u_{ip}) = H(u_i)_{F(p)} = v_{iq}$ ($1 \leq i \leq 3$).

La unicidad es inmediata, pues si \overline{H} es otra parte ortogonal, también verificaría $F_*(u_i) = \overline{H}(u_i)$, luego $H = \overline{H}$. Y además existe una única traslación que lleva $H(p)$ en q . □

1.5 Conexión de Levi-Civita

Sean X e Y campos de vectores sobre una variedad semi-riemanniana \mathbf{M} . El objetivo de este párrafo es definir un nuevo campo de vectores $\nabla_X Y$ sobre \mathbf{M} , cuyo valor en cada punto x es el vector variación de Y en la dirección de X_x .

Para mejor comprender este concepto, repasemos el concepto de derivada covariante natural en \mathbb{R}^n .

Un campo de vectores Y en \mathbb{R}^n puede ser interpretado como una aplicación $Y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable; así si v es un vector en p de \mathbb{R}^n e Y es un campo de vectores (diferenciable) en p , está bien definido el vector

$$(D_v Y)(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(p + tv) - Y(p)}{t}$$

que, si Y se expresa en función de los campos de vectores básicos en \mathbb{R}^n , correspondientes a las coordenadas cartesianas globales (r^1, \dots, r^n) , por $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial r^i}$, se puede poner

$$(D_v Y)(p) = \sum_{i=1}^n v(Y^i) \frac{\partial}{\partial r^i},$$

donde $v(Y^i)$ expresa la derivada direccional de la función Y^i en la dirección de v .

Si ahora consideramos X e Y campos de vectores diferenciables en p ,

$$(D_X Y)(p) = D_{X_p} Y$$

define un campo de vectores $D_X Y$ en \mathbb{R}^n , que denominaremos **derivada covariante** de Y en la dirección de X .

Ejemplo 1.5.1 Tomemos en \mathbb{R}^3 los campos de vectores $X = (A, B, C)$, $Y = (xy^2 + 4z, y^2 - x, x + z^3)$, entonces

$$\begin{aligned} D_X Y &= (X(xy^2 + 4z), X(y^2 - x), X(x + z^3)) = \\ &= (y^2 A(x, y, z) + 2xyB(x, y, z) + 4C(x, y, z), -A(x, y, z) + 2yB(x, y, z), A(x, y, z) + 3z^2 C(x, y, z)). \end{aligned}$$

Propiedades de la derivada covariante o conexión natural en \mathbb{R}^n :

Sean X, Y, Z, W campos vectoriales (diferenciables) en \mathbb{R}^n , y sea f una función diferenciable real, entonces se tienen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} D_X(Y + Z) &= D_X Y + D_X Z & D_{fX} Y &= f D_X Y \\ D_X + W Y &= D_X Y + D_W Y & D_X(fY) &= (Xf)Y + f D_X Y \end{aligned}$$

Todas estas propiedades se deducen directamente de la definición de D , entendida como derivada direccional de funciones diferenciables en \mathbb{R}^n .

Es importante reseñar que $D_X Y$ puede ser calculado una vez conocido Y a lo largo de una curva α que fija el vector X_p en p ; es decir, tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$.

En efecto, sea $Y_{\alpha(t)} = (Y^1(\alpha(t)), \dots, Y^n(\alpha(t)))$, entonces

$$\begin{aligned} (D_X Y)(p) &= D_{X_p} Y = (X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n)) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Big|_0 \frac{\partial Y^1}{\partial r^i} \Big|_{\alpha(0)}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt} \Big|_0 \frac{\partial Y^n}{\partial r^i} \Big|_{\alpha(0)} \right) = \left(\frac{d(Y^1 \circ \alpha)}{dt} (0), \dots, \frac{d(Y^n \circ \alpha)}{dt} (0) \right). \end{aligned}$$

Para la generalización de la definición de derivada covariante o conexión a una variedad diferenciable \mathbf{M} , exigiremos la existencia de un operador ∇ que asigna a campos de vectores X, Y un campo de vectores $\nabla_X Y$, que satisfaga a las cuatro propiedades precedentes, enunciadas para la conexión natural en \mathbb{R}^n . Esto es, si designamos por $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ el módulo de los campos de vectores diferenciables sobre \mathbf{M} , damos la siguiente definición:

Definición 1.5.1 Una conexión lineal ∇ en \mathbf{M} es una aplicación

$$\nabla: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M}), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y, \text{ verificando}$$

$$\begin{aligned} A_1.- \quad \nabla_{X+Y} Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z & A_3.- \quad \nabla_{fX} Y &= f \nabla_X Y \\ A_2.- \quad \nabla_X (Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z & A_4.- \quad \nabla_X fY &= (Xf)Y + f \nabla_X Y \end{aligned}$$

donde $f, g \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ (funciones diferenciables). $\nabla_X Y$ se lee derivada covariante de Y con respecto a X .

Ejemplo 1.5.2 Obsérvese que puede existir más de una conexión lineal sobre una variedad diferenciable. Y como ejemplos de existencia de conexiones lineales sobre variedades tenemos:

1) La conexión natural D en \mathbb{R}^n . Ver página 9.

2) La conexión ∇ sobre una superficie \mathbf{M} de \mathbb{R}^3 , definida a partir de la conexión natural y el producto interior en \mathbb{R}^3 , considerando el campo de vectores normal unitario \mathbf{N} sobre \mathbf{M} y definiendo

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, \mathbf{N} \rangle \mathbf{N}$$

es decir, el campo de vectores $\nabla_X Y$ está definido descomponiendo $D_X Y$ en sus únicas componentes tangente y normal relativas al plano tangente a \mathbf{M} . ∇ satisface las propiedades que caracterizan a una conexión lineal sobre \mathbf{M} ; así el producto escalar y la conexión natural de \mathbb{R}^3 inducen una conexión en la superficie \mathbf{M} .

3) Si $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ es una carta local en una variedad diferenciable \mathbf{M} ; sobre el abierto U , con la estructura de variedad inducida, se puede definir una conexión lineal, poniendo, para X, Y campos de vectores sobre U $\left(Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$,

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

4) Si en una variedad \mathbf{M} , n -dimensional, existen n campos de vectores X_1, \dots, X_n linealmente independientes (los vectores $\{X_1(x), \dots, X_n(x)\}$, linealmente independientes para todo $x \in \mathbf{M}$, dicese entonces que la variedad es paralelizable), podemos definir en \mathbf{M} una conexión lineal poniendo, para campos de vectores X e Y

$$\left(Y = \sum_{i=1}^n Y^i X_i \right), \quad \nabla_X Y = \sum_{i=1}^n X(Y^i) X_i.$$

5) Toda variedad diferenciable paracompacta admite una conexión lineal.

En efecto, sea $\{V_\alpha\}_\alpha$ un recubrimiento abierto localmente finito de \mathbf{M} , y supongamos que $\{f_\alpha\}_\alpha$ es una partición de la unidad subordinada a tal recubrimiento; es decir, las funciones f_α son funciones reales diferenciables con valores comprendidos entre 0 y 1, tales que $\text{sup } f_\alpha \subset V_\alpha$ (la clausura de los puntos donde f_α no se anula está contenida en V_α) y $\sum_\alpha f_\alpha = 1$. Si ∇^α es la conexión lineal en la carta $(V_\alpha, \varphi_\alpha)$, como en 3), ponemos

$$\nabla = \sum_\alpha f_\alpha \nabla^\alpha,$$

entonces, al tener esta suma sentido, ∇ es una conexión lineal en \mathbf{M} .

Para otros enfoques de conexiones en una variedad diferenciable ver el Apéndice A

Tratamos ahora de establecer un resultado fundamental en la geometría semi-riemanniana, como es el de la existencia de una única conexión que cumple además las propiedades verificadas por la conexión natural en \mathbb{R}^n siguientes

$$\begin{aligned} [X, Y] &= D_X Y - D_Y X \\ X \langle Y, Z \rangle &= \langle D_X Y, Z \rangle + \langle Y, D_X Z \rangle \end{aligned}$$

Para llegar a ello necesitamos el siguiente resultado algebraico:

Proposición 1.5.1 *Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$, sea α la 1-forma sobre M métricamente equivalente a X , definida por*

$$\alpha(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$$

$$\text{Entonces la aplicación} \quad X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \alpha \in \Omega^1(M)$$

es un isomorfismo de $\mathfrak{X}(M)$ sobre $\Omega^1(M)$ (conjunto de las 1-formas diferenciables sobre M).

Demostración.- Evidentemente $\alpha \in \Omega^1(M)$ y la aplicación $X \mapsto \alpha$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal. El ser un isomorfismo se sigue de los siguientes hechos:

- Si $g(X, Y) = g(Z, Y)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$, se tiene $X = Z$.
- Dada $\alpha \in \Omega^1(M)$, existe un único $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\alpha(Y) = g(X, Y)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Para establecer la afirmación a), sea $W = X - Z$, entonces dicha afirmación es equivalente a que si

$$g(W_x, Y_x) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M) \text{ y } \forall x \in M, \text{ entonces } W = 0.$$

Pero esto se sigue de la no degenerabilidad de la métrica g y de que todo elemento de $T_x(M)$ es de la forma Y_x .

Así mismo queda demostrado la unicidad de la afirmación b), con lo que para demostrar b), sólo es suficiente encontrar X sobre un entorno coordinado arbitrario U de funciones coordinadas x^1, \dots, x^n .

Si $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i$ en U y $X = \sum_{i,j} X^i \frac{\partial}{\partial x^j}$, es el campo de vectores a encontrar, debe verificarse

$$\alpha(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(U)$$

o, equivalentemente

$$\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = g \left(X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \quad (j = 1, \dots, n)$$

luego, resulta el sistema de ecuaciones lineales, de funciones incógnitas X^i , siguiente

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} X^i \quad (j = 1, \dots, n),$$

el cual tiene solución única dado que la matriz de coeficientes (g_{ij}) tiene inversa (g^{ij}) . Resulta, entonces, que

$$X = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Se sigue por linealidad que $g(X, Y) = \alpha(Y)$, $Y \in \mathfrak{X}(U)$. □

Teorema 1.5.1 *Sobre una variedad semi-riemanniana (M, g) existe una única conexión lineal ∇ , tal que*

$$A_5. - \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad (1.5.1)$$

$$A_6. - \quad Xg(X, Y) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (1.5.2)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

∇ se determina por la fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]). \quad (1.5.3)$$

Demostración.- Supongamos que ∇ es una conexión sobre M satisfaciendo las relaciones (1.5.1) y (1.5.2), entonces la fórmula de Koszul se satisface sin dificultad, sin más que usar (1.5.2) para transformar los tres primeros sumandos del término de la derecha, y (1.5.1) para transformar los tres últimos; cancelando los sumandos de signo contrario que resultan, se obtiene $2g(\nabla_X Y, Z)$, que es el primer miembro de la fórmula de Koszul. Además, por la afirmación a) de la demostración de la Proposición 1.5.1, ∇ es única.

Para la existencia, definimos $\beta(X, Y, Z)$ por el término de la derecha de la fórmula de Koszul. Fijando $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, es fácil demostrar que la aplicación

$$\alpha: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M) \quad Z \mapsto \beta(X, Y, Z)$$

es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal; y, por consiguiente, α es una 1-forma [10, pág. 46,56]. Por la Proposición 1.5.1, existe un único campo de vectores, que denotamos por $\nabla_X Y$ tal que

$$2g(\nabla_X Y, Z) = \beta(X, Y, Z), \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Así, se tiene la fórmula de Koszul, y de ella se pueden deducir las propiedades de la Definición 1.5.1 de conexión y las propiedades (1.5.1) y (1.5.2). \square

Definición 1.5.2 A la conexión definida por la fórmula de Koszul se le denomina *conexión métrica o conexión de Levi-Civita de (M, g)* .

Definición 1.5.3 Sea (x^1, \dots, x^n) un sistema coordenado sobre un entorno abierto U en una variedad semi-riemanniana M . Los símbolos de Christoffel para este sistema coordenado son las funciones Γ_{ij}^k sobre U tales que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

También llamados *coeficientes de la conexión de Levi-Civita*.

Nota 1.5.1 De la propiedad (1.5.1), página 11, de la conexión de Levi-Civita se sigue que: $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Por lo que se dice que la conexión es simétrica.

La conexión ∇ no es un campo tensorial, pues los símbolos de Christoffel no se atienen a la regla de transformación tensorial bajo un cambio de coordenadas. De hecho se tiene:

Si $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ son los símbolos de Christoffel de ∇ con respecto a otro sistema de coordenadas $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ sobre un abierto \bar{U} , en la intersección de los entornos coordenados, se tiene:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^{\alpha}} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^k} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^{\alpha} \partial \bar{x}^{\beta}} \frac{\partial \bar{x}^{\gamma}}{\partial x^i}.$$

Proposición 1.5.2 En un sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) sobre un abierto U , si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, se tiene

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

donde los símbolos de Christoffel están dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right).$$

Demostración.- Dicha fórmula se obtiene de forma inmediata utilizando las propiedades de la conexión. Para obtener la expresión de los símbolos de Christoffel, ponemos en la fórmula de Koszul (1.5.3)

$$X = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial x^h}$$

y resulta

$$2g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jh}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ih}) - \frac{\partial}{\partial x^h} (g_{ij}).$$

Pero por la definición de los símbolos de Christoffel:

$$2g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^h} \right) = 2 \sum_{\ell=1}^n \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell h}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por g^{hk} , da el resultado requerido, sumando en h . \square

Ejemplo 1.5.3 La conexión natural en \mathbb{R}^n es la conexión de Levi-Civita del espacio semi-euclídeo \mathbb{R}_{ν}^n ($\nu = 0, 1, \dots, n$); es decir, \mathbb{R}^n con el producto escalar

$$\langle u, v \rangle = - \sum_{i=1}^{\nu} u^i v^i + \sum_{i=\nu+1}^n u^i v^i$$

Relativamente a las coordenadas naturales de \mathbb{R}_{ν}^n , se tiene

$$g_{ij} = \delta_i^j \varepsilon_j \quad \text{donde} \quad \varepsilon_j = \begin{cases} -1 & (1 \leq j \leq \nu) \\ +1 & (\nu + 1 \leq j \leq n) \end{cases}$$

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad (1 \leq i, j, k \leq n).$$

Definición 1.5.4 Un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es paralelo si su derivada covariante es nula; es decir, si

$$\nabla_X Y = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ejemplo 1.5.4 En \mathbb{R}_{ν}^n los campos de vectores de componentes constantes son paralelos.

Denotaremos por $\mathfrak{T}_s^r(M)$ el conjunto de los campos de vectores diferenciables de tipo (r, s) sobre M . Recordemos [10, págs. 44,56] que ellos pueden ser identificados con aplicaciones $\mathfrak{F}(M)$ -lineales $\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \times \Omega^1(M) \times \dots \times \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{F}(M)$.

Definición 1.5.5 Una derivación sobre el álgebra tensorial de una variedad diferenciable M es una aplicación \mathbb{R} -lineal $D: \mathfrak{T}(M) \rightarrow \mathfrak{T}(M)$, verificando:

1. $D: \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$; es decir, D conserva el tipo tensorial.
2. $D(S \otimes T) = (DS) \otimes T + S \otimes DT \quad \forall T, S \in \mathfrak{T}(M)$.
3. $D(\mathcal{C}T) = \mathcal{C}(DT)$; es decir, \mathcal{C} conmuta con la contracción. (Ver Definición 1.11.6).

Proposición 1.5.3 Sea D una derivación en el álgebra tensorial de M . Si $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ entonces, para todo $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega^1, \dots, \omega^r \in \Omega^1(M)$,

$$(DA)(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r) = D(A(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r))$$

$$- \sum_{j=1}^s A(X_1, \dots, DX_j, \dots, X_s, \omega^1, \dots, \omega^r) - \sum_{i=1}^r A(X_1, \dots, X_s, \omega^1, \dots, D\omega^i, \dots, \omega^r).$$

Demostración.- Para simplificar la demostración, sólo consideramos el caso en que $r = s = 1$. Afirmamos que

$$A(X, \omega) = \mathcal{C}(A \otimes X \otimes \omega),$$

donde \mathcal{C} es una doble contracción. Esta afirmación se corrobora fácilmente, poniendo las componentes de cada miembro respecto a un sistema coordinado:

$$A(X, \omega) : \sum_{i,j=1}^n A_j^i X^j \omega_i \quad A \otimes X \otimes \omega : A_j^i X^k \omega_\ell.$$

Así, usando las propiedades de la derivación, tenemos

$$\begin{aligned} D(A(X, \omega)) &= D\mathcal{C}(A \otimes X \otimes \omega) = \mathcal{C}D(A \otimes X \otimes \omega) = \\ &= \mathcal{C}(DA \otimes X \otimes \omega) + \mathcal{C}(A \otimes X \otimes D\omega) + \mathcal{C}(A \otimes DX \otimes \omega) = (DA)(X, \omega) + A(X, D\omega) + A(DX, \omega). \quad \square \end{aligned}$$

Casos particulares: Si θ es una 1-forma:

$$(D\theta)(X) = D(\theta(X)) - \theta(DX), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Si $g \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M})$:

$$(Dg)(X, Y) = D(g(X, Y)) - g(DX, Y) - g(X, DY), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Corolario 1.5.3.1 Si dos derivaciones D_1, D_2 sobre el álgebra tensorial coinciden sobre funciones y sobre campos de vectores, entonces $D_1 = D_2$.

La derivada covariante ∇_X puede extenderse a un operador sobre tensores arbitrarios:

Definición 1.5.6 Sea X un campo de vectores sobre una variedad semi-riemanniana \mathbf{M} . La derivada covariante ∇_X es la única derivación D sobre \mathbf{M} tal que:

$$D_X f = Xf, \quad \forall f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M}) \quad D_X Y = \nabla_X Y, \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Definición 1.5.7 La diferencial covariante de un tensor $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M})$ es un tensor de tipo $(r, s+1)$, ∇A , tal que

$$(\nabla A)(X_1, \dots, X_s, X, \theta^1, \dots, \theta^r) = (\nabla_X A)(X_1, \dots, X_s, \theta^1, \dots, \theta^r)$$

para todo $X, X_i \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ y $\theta^j \in \Omega^1(\mathbf{M})$.

Nota 1.5.2 Esta definición tiene sentido ya que $\nabla_X A$ es $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal en $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

La diferencial covariante coincide con la diferencial ordinaria sobre funciones, así si $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ y $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ se tiene: $(\nabla f)(X) = \nabla_X f = Xf = df(X)$.

Si $A \in \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M})$ es un campo tensorial de tipo (r, s) de componentes respecto a un sistema coordinado $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, entonces las componentes de ∇A están dadas por:

$$A_{j_1 \dots j_s, k}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^r \left(\sum_{\ell=1}^n \Gamma_{k\ell}^{i_\alpha} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} \ell i_{\alpha+1} \dots i_r} \right) - \sum_{\beta=1}^s \left(\sum_{h=1}^n \Gamma_{kj_\beta}^h A_{j_1 \dots j_{\beta-1} h j_{\beta+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \right).$$

Definición 1.5.8 Un campo de tensores A es paralelo si su diferencial covariante es nula; esto es, si $\nabla_X A = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

Nota 1.5.3 De la propiedad (1.5.2), página 11, de la conexión de Levi-Civita, se sigue que el tensor métrico g es paralelo.

1.6 Desplazamiento paralelo

Una curva en una variedad diferenciable M es una aplicación regular (aplicación inducida inyectiva) de un abierto $I \subset \mathbb{R}$ sobre M . Sea $\alpha: I \rightarrow M$, $t \mapsto \alpha(t)$ una curva en M , la derivada con respecto al parámetro la denotaremos por α' . Así, $\alpha'(t)$ es el vector tangente $\alpha_*(\frac{d}{dt}|_t)$.

Definición 1.6.1 *Un campo de vectores Z sobre una curva $\alpha: I \rightarrow M$ es una aplicación $Z: I \rightarrow T(M)$ diferenciable, que asigna a cada $t \in I$ (intervalo abierto en \mathbb{R}) un vector tangente a M en $\alpha(t)$.*

Denotaremos por $\mathfrak{X}(\alpha)$ al conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre α . $\mathfrak{X}(\alpha)$ es un $\mathfrak{F}(I)$ -módulo.

Cuando en M existe una conexión hay una forma natural de definir el campo de vectores variación de $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ a lo largo de la curva α :

Proposición 1.6.1 *Sea $\alpha: I \rightarrow M$ una curva en una variedad semi-riemanniana (M, g) . Entonces existe una única aplicación*

$$\frac{\nabla}{dt}: \mathfrak{X}(\alpha) \longrightarrow \mathfrak{X}(\alpha), \quad Z \mapsto \frac{\nabla Z}{dt},$$

llamada derivada covariante inducida, tal que, para todo $Z, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(\alpha)$; $X \in \mathfrak{X}(M)$; $h \in \mathfrak{F}(I)$; $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$,

1. $\frac{\nabla}{dt}(\lambda Z_1 + \nu Z_2) = \lambda \frac{\nabla Z_1}{dt} + \nu \frac{\nabla Z_2}{dt}$.
2. $\frac{\nabla(hZ)}{dt} = \frac{dh}{dt}Z + h \frac{\nabla Z}{dt}$.
3. $\frac{\nabla X_\alpha}{dt}(t) = \nabla_{\alpha'(t)}X$ (X_α es la restricción de X a α).

Además se tiene:

$$4. \frac{d}{dt}g(Z_1, Z_2) = g\left(\frac{\nabla Z_1}{dt}, Z_2\right) + g\left(Z_1, \frac{\nabla Z_2}{dt}\right).$$

Demostración.- Unicidad. Supongamos que existe una derivada covariante inducida satisfaciendo sólo las tres primeras propiedades. Podemos suponer que la curva α queda en el dominio de un sistema coordenado de

funciones coordenadas (x^1, \dots, x^n) . Entonces $Z(t) = \sum_{i=1}^n Z^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\alpha(t)}$.

Por las propiedades 1 y 2: $\frac{\nabla Z}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dZ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}|_\alpha + \sum_{i=1}^n Z^i \frac{\nabla \frac{\partial}{\partial x^i}|_\alpha}{dt}$. Y, teniendo en cuenta la propiedad 3,

$$\boxed{\frac{\nabla Z}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dZ^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + Z^i \nabla_{\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^i} \right)}$$

Con lo que, $\frac{\nabla Z}{dt}$ está completamente determinada por la conexión de Levi-Civita.

Existencia. Sobre todo subintervalo $J \subset I$ tal que $\alpha(J)$ quede en un entorno coordenado, definimos $\frac{\nabla Z}{dt}$ por la fórmula anterior recuadrada. Entonces es fácil demostrar que la cuarta propiedad se verifica.

Por la unicidad, esta definición local de $\frac{\nabla Z}{dt}$ constituye un campo de vectores sobre α , $\frac{\nabla Z}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha)$. \square

Introduciendo los símbolos de Christoffel, la expresión local de $\frac{\nabla Z}{dt}$ es

$$\frac{\nabla Z}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Definición 1.6.2 $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$, se dice que es paralelo si $\frac{\nabla Z}{dt} = 0$.

La ecuación $\frac{\nabla Z}{dt} = 0$ es equivalente a un sistema de ecuaciones lineales ordinarias, Así, por el teorema fundamental de existencia y unicidad de tales sistemas, se tiene:

Proposición 1.6.2 Sea $\alpha: I \rightarrow M$ una curva sobre M , $a \in I$ y $v \in T_{\alpha(a)}(M)$. Existe un único campo de vectores paralelo Z sobre α tal que $Z(a) = v$.

La aplicación $\tau_\alpha: T_{\alpha(a)}(M) \rightarrow T_{\alpha(t)}(M)$, dada por $\tau_\alpha(v) = Z(\alpha(t))$ es un isomorfismo lineal, que se denomina transporte paralelo a lo largo de α desde $\alpha(a)$ a $\alpha(t)$.

Demostración.- Sea (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas alrededor de $\alpha(a)$, con dominio U , y sean los campos de vectores canónicos asociados $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. Supongamos que $\alpha([a, b_1]) \subset U$. Sea $Y(t) =$

$$\sum_{i=1}^n Y^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\alpha(t)}$$
 un campo de vectores sobre α .

Y es paralelo a lo largo de α si y sólo si

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Y^j = 0 \quad (t \in I, \quad k = 1, \dots, n). \quad (1.6.1)$$

La condición $Y(\alpha(a)) = v$ da n valores iniciales v^i y la teoría de ecuaciones diferenciales lineales ordinaria garantiza la existencia de un único conjunto de funciones diferenciables $Y^i(\alpha(t))$ satisfaciendo las ecuaciones (1.6.1) de arriba en el dominio $[a, b_1]$, las cuales definen el campo de vectores paralelo.

Para $t \in [a, b_1]$, τ_t es lineal debido a la linealidad de las ecuaciones (1.6.1) y por tanto la solución depende linealmente de las condiciones iniciales. La biyectividad de τ_t surge de la unicidad de las soluciones de (1.6.1) y de que los espacios son de la misma dimensión.

Si $t \in I$, arbitrario, obtenemos τ_t recubriendo el conjunto compacto $\alpha([a, t])$ con un número finito de entornos coordenados y haciendo el transporte paralelo a lo largo de cada entorno mediante la solución del sistema diferencial (1.6.1). \(\square\)

Proposición 1.6.3 El transporte paralelo es una isometría.

Demostración.- Si X e Y son campos de vectores sobre α transportes paralelos de u y v vectores de $T_{\alpha(a)}(M)$, se tiene entonces, usando la propiedad 4 (página 15) de la derivada covariante inducida, que

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{\nabla X}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{\nabla Y}{dt}\right) = 0.$$

Luego $g(X, Y)$ es constante sobre α , así

$$g_{\alpha(b)}(\tau_b(u), \tau_b(v)) = g_{\alpha(b)}(X_{\alpha(b)}, Y_{\alpha(b)}) = g_{\alpha(a)}(X_{\alpha(a)}, Y_{\alpha(a)}) = g_{\alpha(a)}(u, v). \quad \square$$

1.7 Geodésicas

Vamos ahora a generalizar la noción de línea recta en el espacio euclídeo.

Volviendo a \mathbb{R}^n podemos caracterizar los campos de vectores paralelos a lo largo de una curva y las geodésicas en términos de la derivada covariante estándar (página 9):

Sea α una curva diferenciable en \mathbb{R}^n e Y un campo de vectores sobre α . Y es paralelo a lo largo de α si y sólo si sus componentes son constantes; es decir, si y sólo si

$$\frac{DY}{dt} = \left(\frac{dY^1}{dt}, \dots, \frac{dY^n}{dt} \right) = 0.$$

La curva α será una geodésica en \mathbb{R}^n si y sólo si se trata de una recta; esto es, si sus componentes son funciones lineales: $\alpha^i(t) = a^i t + b^i$. Lo cual es equivalente a que

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \left(\frac{d^2\alpha^1}{dt^2}, \dots, \frac{d^2\alpha^n}{dt^2} \right) = 0.$$

Esto motiva la siguiente definición de geodésicas en una variedad diferenciable con conexión:

Definición 1.7.1 Una geodésica en una variedad semi-riemanniana es una curva $\gamma: I \rightarrow M$ cuyo campo de vectores tangente γ' es paralelo.

Si (M, g) es una variedad semi-riemanniana. $\|\gamma'\|$ es necesariamente constante, ya que

$$\frac{d}{dt}g(\gamma', \gamma') = g\left(\frac{\nabla\gamma'}{dt}, \gamma'\right) + g\left(\gamma', \frac{\nabla\gamma'}{dt}\right) = 0.$$

Proposición 1.7.1 Sea (x^1, \dots, x^n) un sistema coordenado sobre $U \subset M$. Una curva γ sobre U es una geodésica de M si y sólo si sus funciones componentes satisfacen

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad (1 \leq k \leq n).$$

Demostración.- Estas son las componentes de $\frac{\nabla\gamma'}{dt}$ respecto a la base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$. \square

Del teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias se sigue el siguiente resultado local.

Proposición 1.7.2 Si $v \in T_x(M)$, existe un intervalo I alrededor del $0 \in \mathbb{R}$ y una única geodésica, que denotaremos por $\gamma_v: I \rightarrow M$, tal que $\gamma_v(0) = x, \gamma'_v(0) = v$. \square

Definición 1.7.2 Una variedad semi-riemanniana se dice que es completa si toda geodésica puede ser definida sobre toda la recta real.

Proposición 1.7.3 Sea $\gamma: I \rightarrow M$ una geodésica no constante. Una reparametrización $\gamma \circ h: J \rightarrow M$ es una geodésica si y sólo si h es de la forma $h(s) = as + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Demostración.- $\gamma \circ h$ es geodésica $\iff \frac{\nabla(\gamma \circ h)'}{ds} = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\nabla(\gamma \circ h)'}{ds} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2(x^k \circ \gamma \circ h)}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma \circ h)}{ds} \frac{d(x^j \circ \gamma \circ h)}{ds} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} (h')^2 + \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} h'' + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} (h')^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Al ser γ geodésica, $\frac{\nabla\gamma'}{dt} = 0$, resulta equivalentemente

$$\sum_{k=1}^n \frac{d(x^k \circ \gamma)}{dt} h'' \frac{\partial}{\partial x^k} = 0.$$

Como γ no es constante, tenemos la condición necesaria y suficiente para que $\gamma \circ h$ sea geodésica:

$$h''(s) = 0 \iff h(s) = as + b. \quad \square$$

Proposición 1.7.4 Sea $u \in T(\mathbf{M})$. Entonces existe un entorno \mathcal{N} de u en $T(\mathbf{M})$ y un intervalo I alrededor de $0 \in \mathbb{R}$, tal que

$$(v, t) \mapsto \gamma_v(t)$$

define una aplicación diferenciable de $\mathcal{N} \times I$ en \mathbf{M} . Siendo, para cada v , γ_v la única geodésica tal que $\gamma'_v(0) = v$.

Demostración.- Este resultado surge de aplicar a las ecuaciones diferenciables de la geodésicas el hecho de que si un sistema de ecuaciones diferenciables ordinarias de segundo orden está dado por funciones diferenciables, entonces sus soluciones dependen diferenciablemente no sólo del parámetro sino además del punto inicial y de las primeras derivadas iniciales. \square

Una ecuación diferencial de segundo orden de variable Y puede convertirse en un par de ecuaciones de primer orden, tomando Y' como nueva variable. Haciendo uso de este hecho, las geodésicas en \mathbf{M} pueden ser representadas por curvas integrales en el fibrado tangente $T(\mathbf{M})$:

Proposición 1.7.5 Existe un campo de vectores V sobre $T(\mathbf{M})$ tal que la proyección $\pi: T(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbf{M}$ establece una correspondencia biyectiva sobre las curvas integrales de V y las geodésicas de \mathbf{M} .

Demostración.- Para $u \in T(\mathbf{M})$, sea V_u el vector tangente inicial a la curva $t \mapsto \gamma'_u(t)$, siendo $t \mapsto \gamma_u(t)$, la geodésica tal que $\gamma'_u(0) = u$.

Se sigue, usando la Proposición 1.7.4 precedente, que V es un campo de vectores diferenciable sobre $T(\mathbf{M})$.

a) Si γ es una geodésica de \mathbf{M} , entonces γ' es una curva integral de V .

En efecto, para todo t , sea la curva en $T(\mathbf{M})$ $\alpha(t) = \gamma'(t)$. Para un punto fijo arbitrario t_0 , sea $v = \gamma'(t_0)$ y la curva en $T(\mathbf{M})$ $\beta(t) = \gamma'_v(t)$.

En virtud de la unicidad de las geodésicas: $\gamma(t_0 + t) = \gamma_v(t)$. Entonces

$$\alpha(t_0 + t) = \gamma'(t_0 + t) = \gamma'_v(t) = \beta(t) \quad \alpha'(t_0 + t) = \beta'(t).$$

En particular, $\alpha'(t_0) = \beta'(0) = \gamma'_v(0) = V_v = V_{\alpha(t_0)}$.

Al ser t_0 arbitrario, resulta que γ' es una curva integral de V .

b) Si α es una curva integral de V , entonces $\pi \circ \alpha$ es una geodésica de \mathbf{M} .

Si $v = \alpha(0)$, por la construcción de V , $t \mapsto \gamma'_v(t)$ es también una curva integral de V .

Por la unicidad de las curvas integrales, se tiene, al menos en un entorno de $0 \in \mathbb{R}$: $\pi \circ \alpha = \pi \circ \gamma'_v = \gamma_v$.

Para un t_0 arbitrario, sea β la curva integral de V partiendo de $\alpha(t_0)$. De nuevo por la unicidad de las curvas integrales, $\alpha(t_0 + t) = \beta(t)$, con lo que $(\pi \circ \alpha)(t_0 + t) = (\pi \circ \beta)(t) = \gamma_{\beta(t_0)}(t)$.

Finalmente, para establecer la correspondencia biyectiva enunciada, observemos que las identidades $\pi \circ \gamma' = \gamma$ y $(\pi \circ \alpha)' = \alpha$, demuestran que las aplicaciones $\alpha \mapsto \pi \circ \alpha$ y $\gamma \mapsto \gamma'$ son inversas. \square

1.8 Aplicación exponencial

Sea \mathbf{M} una variedad semi-riemanniana.

Definición 1.8.1 Si $x \in \mathbf{M}$, sea $D_x = \{v \in T_x(\mathbf{M})\}$ la geodésica γ_v está definida al menos en $[0, 1]$. La aplicación exponencial de \mathbf{M} en x es la aplicación

$$\exp_x: D_x \rightarrow \mathbf{M} \quad v \mapsto \exp_x(v) = \gamma_v(1)$$

Nota 1.8.1 D_x es el mayor subconjunto de $T_x(\mathbf{M})$ sobre el que \exp_x puede ser definida.

Si \mathbf{M} es completa, entonces $D_x = T_x(\mathbf{M})$, para todo $x \in \mathbf{M}$.

Fijado $v \in T_x(\mathbf{M})$ y $t \in \mathbb{R}$; entonces la geodésica $s \mapsto \gamma_v(ts)$ tiene como vector tangente inicial $t\gamma'_v(0) = tv$. En consecuencia,

$$\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$$

para todo s y t tal que uno de los dos miembros (y por tanto los dos) esté bien definido.

En particular, si $tv \in D_x$, se tiene

$$\exp_x(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t).$$

Concluimos que la aplicación exponencial \exp_x transforma rectas a través del origen en $T_x(\mathbf{M})$ en geodésicas en \mathbf{M} pasando por x .

Proposición 1.8.1 Para cada punto $x \in \mathbf{M}$, existe un entorno abierto \mathcal{N}_x de 0 en $T_x(\mathbf{M})$ sobre el cual la aplicación exponencial \exp_x es un difeomorfismo sobre un entorno abierto U de x en \mathbf{M} .

Demostración.- Se sigue de la Proposición 1.7.4 que \exp_x es una aplicación bien definida y diferenciable sobre un entorno abierto del 0 en $T_x(\mathbf{M})$.

La aplicación inducida entre los espacios tangentes

$$(\exp_x)_*: T_0(T_x(\mathbf{M})) \rightarrow T_x(\mathbf{M})$$

es el isomorfismo canónico o aplicación identidad, identificando el espacio tangente en el origen del espacio vectorial $T_x(\mathbf{M})$ con sí mismo:

Un elemento v de $T_0(T_x(\mathbf{M}))$ se puede definir como el vector tangente a la curva $\rho: \mathbb{R} \rightarrow T_x(\mathbf{M})$, dada por $\rho(t) = tv$; es decir $v = \rho'(0)$. Por tanto, $\exp_x(\rho(t)) = \exp_x(tv) = \gamma_v(t)$, y se tiene que:

$$(\exp_x)_*(v) = (\exp_x)_*(\rho'(0)) = (\exp_x \circ \rho)'(0) = \gamma'_v(0) = v.$$

Siendo así la aplicación inducida de \exp_x , el teorema de la función implícita permite afirmar que \exp_x es un difeomorfismo local. \square

Definición 1.8.2 Un subconjunto S de un espacio vectorial se dice que es *estrellado* alrededor del 0 si $\forall v \in S$, se tiene que $tv \in S$, $\forall t \in [0, 1]$.

Definición 1.8.3 Sean \mathcal{N}_x y U los entornos abiertos de la Proposición 1.8.1 anterior; es decir, entre los que la exponencial es un difeomorfismo ($\exp_x: \mathcal{N}_x \rightarrow U$), si \mathcal{N}_x es estrellado alrededor de 0 , se dice que U es un entorno normal de x .

La siguiente proposición permite considerar a un entorno normal como estrellado alrededor de $x \in \mathbf{M}$.

Proposición 1.8.2 Si U es un entorno normal de $x \in \mathbf{M}$, entonces para cada punto $y \in U$ existe una única geodésica $\sigma: [0, 1] \rightarrow U$ de x a y en U . Además

$$\sigma'(0) = \exp_x^{-1}(y) \in \mathcal{N}_x.$$

Demostración.- Por definición, \mathcal{N}_x es un entorno estrellado del $0 \in T_x(\mathbf{M})$ tal que la $\exp_x|_{\mathcal{N}_x}$ es un difeomorfismo sobre U .

Para $y \in U$ sea $v = \exp_x^{-1}(y) \in \mathcal{N}_x$. Entonces el segmento de recta $\rho(t) = tv$ ($0 \leq t \leq 1$) queda en \mathcal{N}_x . Por tanto, el segmento geodésico $\sigma = \exp_x \circ \rho$ queda en U y une x con y .

En el origen de $T_x(\mathbf{M})$, $(\exp_x)_*$ es el isomorfismo canónico $T_0(T_x(\mathbf{M})) \cong T_x(\mathbf{M})$, y $\rho'(0) = v$, entonces

$$\sigma'(0) = (\exp_x)_*(\rho'(0)) = (\exp_x)_*(v) = v.$$

Veamos que esta geodésica σ es única. Sea $\tau: [0, 1] \rightarrow U$ una geodésica arbitraria en U que une x con y . Si $w = \tau'(0)$, las geodésicas $t \mapsto \exp_x(tw)$ y τ tienen el mismo vector tangente inicial y, por tanto, son iguales.

Como $\exp_x(w) = \tau(1) = y = \exp_x(v)$, y al ser \exp_x inyectiva en \mathcal{N}_x , resulta $w = v$. Así, por la unicidad de las geodésicas, $\sigma = \tau$. \square

Definición 1.8.4 Una geodésica quebrada es una curva diferenciable a trozos cuyos segmentos diferenciables son geodésicas.

Proposición 1.8.3 Una variedad semi-riemanniana M es conexa si y sólo si todo par de puntos de M pueden ser unidos por una geodésica quebrada.

Demostración.- Supongamos que M es conexa y fijemos un punto $x \in M$.

Sea C el conjunto de puntos que pueden ser unidos a x por una geodésica quebrada.

Para $y \in M$, sea U un entorno normal que contiene a y .

Si $y \in C$, entonces $U \subset C$. Si $y \in M - C$, entonces $U \subset M - C$. Por tanto, por la conexidad de M , $M = C$.

El recíproco es obvio, ya que conexidad por arcos implica conexidad. \square

Sea U un entorno normal de $x \in M$. $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_x(M)$, esto es $g_x(e_i, e_j) = \delta_{ij} \varepsilon_j$.

Definición 1.8.5 Se denomina sistema de coordenadas normales sobre U de un punto y de U a las componentes del vector $\exp_x^{-1}(y) \in \mathcal{N}_x \subset T_x(M)$, respecto a la base dada.

Proposición 1.8.4 Si (y^1, \dots, y^n) es un sistema de coordenadas normales alrededor de $x \in M$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad g_{ij}(x) = \delta_{ij} \varepsilon_j \\ 2) \quad \Gamma_{ij}^k(x) = 0 \end{array} \right\} (1 \leq i, j, k \leq n).$$

Demostración.- Sea $v \in T_x(M)$, $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i$, $\exp_x(tv) = \gamma_v(t)$.

Las componentes de $\gamma_v(t)$ son $y^i(\gamma_v(t)) = tv^i$. Luego $v = \gamma'_v(0) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_x$. En particular, $e_i = \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_x$.

Luego la afirmación 1) es inmediata.

Teniendo en cuenta las coordenadas de la geodésica γ_v su ecuación se reduce a

$$\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) v^i v^j = 0 \quad (k = 1, \dots, n).$$

En particular,

$$\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) v^i v^j = 0 \quad \forall (v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Fijando un k , esto expresa una forma cuadrática sobre \mathbb{R}^n idénticamente nula. Entonces por polarización la correspondiente forma bilineal simétrica es idénticamente nula, esto es, $\Gamma_{ij}^k(x) = 0$. \square

1.9 Curvatura

Si D es la conexión canónica sobre \mathbb{R}^n y si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces $D_X D_Y Z - D_Y D_X Z = D_{[X, Y]} Z$. Por contra, este resultado falla en general para la derivada covariante ∇_X . Esta desviación es medida por un campo de tensores, que juega un importante papel en toda la geometría diferencial, el cual pasamos a definir.

Definición 1.9.1 Sea M una variedad semi-riemanniana con conexión de Levi-Civita ∇ . Se denomina tensor curvatura de Riemann a la aplicación

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

definida por

$$(Z, X, Y) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Nota 1.9.1 R es de hecho un campo de tensores de tipo (1,3).

La definición de este campo de tensores vale para una conexión en general, llamándose entonces tensor curvatura.

Definición 1.9.2 Si $X, Y \in T_x(M)$, se denomina operador curvatura a la aplicación lineal

$$R(X, Y): T_x(M) \rightarrow T_x(M), \quad Z \mapsto R(X, Y)Z.$$

Proposición 1.9.1 Si $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, entonces se tienen las siguientes propiedades:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$. (1ª Identidad de Bianchi)
3. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$.
4. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$.

Demostración.- La relación 1. se sigue inmediatamente de la definición del tensor curvatura de Riemann.

Para las restantes propiedades, haciendo uso de que R es un tensor, basta hacer la demostración para campos de vectores básicos:

2. Si Y, Z son campos de vectores básicos, probar 2. es equivalente a probar:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y = 0.$$

Pero para la conexión de Levi-Civita, por (1.5.1), $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = 0$; luego, la relación anterior se verifica.

3. Es equivalente a probar $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$. Sean X, Y, Z campos de vectores básicos.

$$g(R(X, Y)Z, Z) = g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z, Z) = 0 \iff g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) \text{ es simétrico en } X, Y.$$

Ahora bien, diferenciando $g(Z, Z)$ respecto a X e Y , tenemos

$$Y(Xg(Z, Z)) = 2Yg(\nabla_X Z, Z) = 2g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) + 2g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z).$$

de la que se sigue que

$$g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = \frac{1}{2}Y(X(g(Z, Z))) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z).$$

Ya que $[X, Y] = 0$; es decir, $(XY - YX)f = 0$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$; en particular, tomando $f = g(Z, Z)$, se ve que el término de la derecha es simétrico en X, Y y, por tanto, también lo es el de la izquierda.

4. Esta cuarta relación se deduce de las tres relaciones anteriores como sigue:

De 2. se deducen las cuatro relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, X)Y, W) &= 0 \\ g(R(X, Y)W, Z) + g(R(Y, W)X, Z) + g(R(W, X)Y, Z) &= 0 \\ g(R(X, Z)W, Y) + g(R(Z, W)X, Y) + g(R(W, X)Z, Y) &= 0 \\ g(R(Y, Z)W, X) + g(R(Z, W)Y, X) + g(R(W, Y)Z, X) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta 1. y 3., queda solamente

$$2g(R(Z, X)Y, W) + 2g(R(Y, W)X, Z) = 0$$

o sea

$$g(R(X, Z)Y, W) = g(R(Y, W)X, Z).$$

□

En un entorno coordenado $(U, (x^1, \dots, x^n))$, podemos introducir las componentes de R por las relaciones:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n R_{j k \ell}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

siendo

$$R_{j k \ell}^i = \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{k j}^i}{\partial x^\ell} + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{\ell j}^h \Gamma_{k h}^i - \Gamma_{k j}^h \Gamma_{\ell h}^i).$$

1.10 Curvatura seccional

Definición 1.10.1 *Un subespacio bidimensional Π del espacio tangente $T_x(\mathbf{M})$ se denomina sección plana a \mathbf{M} en x .*

Consideremos la aplicación $Q: T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$; $Q(u, v) = g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2$.

Propiedades:

a) Una sección plana Π de $T_x(\mathbf{M})$ es no degenerada si y sólo si $Q(u, v) \neq 0$ para una (y entonces para toda) base $\{u, v\}$ de Π .

En efecto, Π es no degenerado si y sólo si la matriz asociada a $g|_{\Pi \times \Pi}$ es no singular.

b) $Q(u, v) > 0$ si y sólo si $g|_{\Pi \times \Pi}$ es definida.

c) $Q(u, v) < 0$ si y sólo si $g|_{\Pi \times \Pi}$ es indefinida.

Para establecer estas dos últimas afirmaciones basta usar bases ortonormales.

Definición 1.10.2 *Se llama curvatura seccional $K(\Pi)$ de una sección plana de $T_x(\mathbf{M})$ no degenerada al escalar*

$$K(\Pi) = -\frac{g(R(u, v)u, v)}{g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2}, \quad \{u, v\} \text{ base de } \Pi.$$

Esta definición es independiente de la base elegida, en efecto:

Si $\{u', v'\}$ es otra base de Π , se tiene

$$u = au' + bv' \quad v = cu' + dv' \quad (ad - bc \neq 0)$$

Entonces

$$\begin{aligned} g(R(u, v)u, v) &= (ad - bc)^2 g(R(u', v')u', v') \\ g(u, v)g(v, v) - (g(u, v))^2 &= (ad - bc)^2 g(u', v')g(v', v') - (g(u', v'))^2. \end{aligned}$$

Por definición, R determina la curvatura seccional. Para demostrar que K determina R , se necesitan unas técnicas sobre productos escalares indefinidos. Probemos este último hecho para el caso en que (\mathbf{M}, g) es una variedad riemanniana.

Proposición 1.10.1 *Si (\mathbf{M}, g) es una variedad de Riemann, y si $K(\Pi) = 0$, para toda sección plana Π en $T_x(\mathbf{M})$, entonces $R = 0$ en x .*

Demostración.- Haremos la demostración en varios pasos:

$$g(R(X, Y)X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in T_x(\mathbf{M}). \quad (1.10.1)$$

Ya que si X, Y generan una sección plana Π en $T_x(\mathbf{M})$, como $K(\Pi) = 0$, resulta $g(R(X, Y)X, Y) = 0$.

$$R(X, Y)X = 0, \quad \forall X, Y \in T_x(\mathbf{M}). \quad (1.10.2)$$

Para establecer esta ecuación, sea $Z \in T_x(\mathbf{M})$ arbitrario, entonces

$$g(R(X, Y + Z)X, Y + Z) = g(R(X, Y)X, Y) + g(R(X, Z)X, Y) + g(R(X, Y)X, Z) + g(R(X, Z)X, Z).$$

Tres de estos sumandos se anulan por (1.10.1). La propiedad 4. de R (ver Proposición 1.9.1) implica la igualdad de los dos restantes, así

$$g(R(X, Y)X, Z) = 0, \quad \forall Z \in T_x(\mathbf{M}).$$

$$R(X, Y)Z = R(Y, Z)X \quad \forall X, Y, Z \in T_x(\mathbf{M}). \quad (1.10.3)$$

Esta ecuación resulta de la identidad siguiente:

$$R(X + Z, Y)(X + Z) = R(X, Y)X + R(X, Y)Z + R(Z, Y)X + R(Z, Y)Z,$$

en la que tres sumandos se anulan por (1.10.2), y los restantes son iguales salvo signo, dada la antisimetría de R respecto a los primeros argumentos (propiedad 1., Proposición 1.9.1).

Finalmente, utilizando (1.10.3) y la 1ª identidad de Bianchi, resulta que

$$R(X, Y)Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in T_x(\mathbf{M}). \quad \text{Por tanto } R = 0 \text{ en } x. \quad \square$$

Nota 1.10.1 Para demostrar este mismo resultado en variedades semi-riemannianas, hay que tener presente que (1.10.1) se verifica sobre secciones planas de $T_x(\mathbf{M})$ no degeneradas. Lo cual bastará para que $g(R(X, Y)X, Y) = 0 \quad \forall X, Y \in T_x(\mathbf{M})$. Ver [11, pág. 78].

Definición 1.10.3 *Una variedad semi-riemanniana \mathbf{M} en la cual el tensor curvatura R es nulo en todo punto se dice que es llana.*

Según la observación precedente, se sigue que una variedad semi-riemanniana es llana si y sólo si la curvatura seccional es nula en toda sección plana no degenerada.

Definición 1.10.4 *Una variedad semi-riemanniana que tenga la misma curvatura seccional en toda sección plana no degenerada se dice que tiene curvatura constante.*

Proposición 1.10.2 Si $F: T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación cuatrilínea, verificando:

- 1) $F(X, Y, Z, W) = -F(Y, X, Z, W)$
- 2) $F(X, Y, Z, W) + F(Y, Z, X, W) + F(Z, X, Y, W) = 0$
- 3) $F(X, Y, Z, W) = -F(X, Y, W, Z)$

$\forall X, Y, Z, W \in T_x(\mathbf{M})$ y tal que, si X, Y generan una sección plana no degenerada de $T_x(\mathbf{M})$:

$$F(X, Y, X, Y) = g(R(X, Y)X, Y).$$

Entonces,

$$F(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad \forall X, Y, Z, W \in T_x(\mathbf{M}).$$

Demostración.- Consideremos la aplicación $H: T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$H(X, Y, Z, W) = F(X, Y, Z, W) - g(R(X, Y)Z, W),$$

entonces H es una aplicación cuatrilínea que verifica 1), 2) y 3) y además, si X, Y generan una sección plana no degenerada de $T_x(\mathbf{M})$:

$$H(X, Y, X, Y) = 0.$$

Por consiguiente, por el mismo razonamiento de la proposición anterior, donde único se han usado las mismas propiedades algebraicas que se dan aquí, resulta que $H = 0$. \square

Proposición 1.10.3 Si \mathbf{M} tiene curvatura constante c , entonces

$$R(X, Y)Z = c(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), \quad \forall X, Y, Z \in T_x(\mathbf{M}).$$

Demostración.- Sea $F(X, Y, Z, W) = c(g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$.

F tiene las propiedades 1), 2) y 3) de la proposición anterior. Además, si X, Y generan una sección plana no degenerada:

$$F(X, Y, X, Y) = c(g(Y, X)g(X, Y) - g(X, X)g(Y, Y)) = g(R(X, Y)X, Y).$$

Luego,

$$F(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W), \quad \forall X, Y, Z, W \in T_x(\mathbf{M}).$$

Y, por tanto,

$$g(R(X, Y)Z, W) = c g(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y, W), \quad \forall W \in T_x(\mathbf{M}). \quad \square$$

1.11 Curvatura escalar y curvatura de Ricci

Sobre una variedad semi-riemanniana (\mathbf{M}, g) , hemos establecido (Proposición 1.5.1) un isomorfismo $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal entre los campos de vectores sobre \mathbf{M} y las 1-formas sobre \mathbf{M} , dado por

$$X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \equiv \mathfrak{X}_0^1(\mathbf{M}) \mapsto X^* \in \Omega(\mathbf{M}) \equiv \mathfrak{X}_1^0(\mathbf{M}) \quad \text{donde} \quad X^*(Y) = g(X, Y), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Definición 1.11.1 Dado $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, a X^* se le denomina 1-forma métricamente equivalente a X .

En términos de coordenadas, la 1-forma métricamente equivalente a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ es $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^* = \sum_{j=1}^n g_{ij} dx^j$; y dx^i es la 1-forma métricamente equivalente a $\sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Así, en general, si $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx^i$, el campo de vectores métricamente equivalente a θ es $\theta^* = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Vamos ahora a generalizar este isomorfismo a tensores de tipo superior.

Definición 1.11.2 Se llama operador bajada de índice al isomorfismo $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal

$$\mathcal{B}_q^p: \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(\mathbf{M}) \quad (1 \leq p \leq r, \quad 1 \leq q \leq s+1)$$

dado por

$$(\mathcal{B}_q^p T)(X_1, \dots, X_{s+1}, \theta^1, \dots, \theta^{r-1}) = T(X_1, \dots, X_{q-1}, X_{q+1}, \dots, X_{s+1}, \theta^1, \dots, \theta^{p-1}, X_q^*, \theta^p, \dots, \theta^{r-1})$$

para $\theta^i \in \Omega^1(\mathbf{M})$ y $X_j \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, arbitrarios, y X_q^* es la 1-forma métricamente equivalente a X_q .

Definición 1.11.3 Se denomina operador subida de índice al isomorfismo $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal

$$\mathcal{S}_q^p: \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r+1}(\mathbf{M}) \quad (1 \leq p \leq r+1, \quad 1 \leq q \leq s)$$

dado por

$$(\mathcal{S}_q^p T)(X_1, \dots, X_{s-1}, \theta^1, \dots, \theta^{r+1}) = T(X_1, \dots, X_{q-1}, (\theta^p)^*, X_q, \dots, X_{s-1}, \theta^1, \dots, \theta^{p-1}, \theta^{p+1}, \dots, \theta^{r+1})$$

para $\theta^i \in \Omega^1(\mathbf{M})$ y $X_j \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, arbitrarios, y $(\theta^p)^*$ es el campo de vectores métricamente equivalente a la 1-forma θ^p .

Es claro que ambas aplicaciones \mathcal{B}_q^p y \mathcal{S}_q^p son $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineales, además una es inversa de la otra; por tanto, isomorfismos.

Definición 1.11.4 Dos campos de tensores se dice que son métricamente equivalentes si uno es obtenido del otro a través de los operadores subida o bajada de índice.

Si $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ son las componentes de $T \in \mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M})$, respecto de un sistema coordenado, se tiene:

$$(\mathcal{B}_q^p T)_{j_1 \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^n g_{jqk} T_{j_1 \dots j_{q-1} j_{q+1} \dots j_{s+1}}^{i_1 \dots i_{p-1} k i_p \dots i_{r-1}}.$$

$$(\mathcal{S}_q^p T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r+1}} = \sum_{k=1}^n g^{ki_p} T_{j_1 \dots j_{q-1} k j_q \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{p-1} i_p i_{p+1} \dots i_{r+1}}.$$

Un importante caso particular es el de un campo de tensores de tipo $(1, s)$ dado como una aplicación $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -multilineal $K: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \overset{s}{\dots} \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, entonces:

$$(\mathcal{B}_1^1 K)(Y, X_1, \dots, X_s) = g(Y, K(X_1, \dots, X_s)).$$

Para el tensor curvatura, $R: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$:

$$R_{ijkl} = (\mathcal{B}_1^1 R) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{h=1}^n g_{ih} R_{jkl}^h.$$

Definición 1.11.5 A este tensor de tipo $(0, 4)$, métricamente equivalente al tensor curvatura de Riemann, se le denomina tensor curvatura de Riemann-Christoffel, y lo denotamos también por R .

Sobre una variedad semi-riemanniana (\mathbf{M}, g) podemos contraer métricamente dos índices covariantes subiendo primeramente uno de ellos y luego haciendo la contracción usual.

Definición 1.11.6 Se llama *contracción (natural) del índice p contravariante con el índice q covariante*, a la aplicación $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal

$$\mathcal{C}_q^p: \mathfrak{F}_s^r(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{F}_{s-1}^{r-1}(\mathbf{M})$$

definida por

$$\mathcal{C}_q^p(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^s) = \theta^q(X_p) X_1 \otimes \cdots \otimes X_{p-1} \otimes X_{p+1} \otimes \cdots \otimes X_r \otimes \theta^1 \otimes \cdots \otimes \theta^{q-1} \otimes \theta^{q+1} \otimes \cdots \otimes \theta^s.$$

Las componentes en un sistema coordenado son

$$(\mathcal{C}_q^p T)_{j_1 \cdots j_{s-1}}^{i_1 \cdots i_{r-1}} = \sum_{k=1}^n T_{j_1 \cdots j_{q-1} k j_q \cdots j_{s-1}}^{i_1 \cdots i_{p-1} k i_p \cdots i_{r-1}}.$$

Consideremos ahora la aplicación

$$\mathcal{C}_{pq}: \mathfrak{F}_s^r(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{F}_{s-2}^{r-2}(\mathbf{M}) \quad (1 \leq p \leq q \leq s)$$

definida por $\mathcal{C}_{pq} = \mathcal{C}_{q-1}^1 \circ \mathcal{S}_p^1$, o en coordenadas

$$(\mathcal{C}_{pq} T)_{j_1 \cdots j_{s-2}}^{i_1 \cdots i_r} = \sum_{h,k=1}^n g^{hk} T_{j_1 \cdots j_{p-1} h j_p \cdots j_{q-2} k j_{q-1} \cdots j_{s-2}}^{i_1 \cdots i_r}.$$

Definición 1.11.7 A la aplicación $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal \mathcal{C}_{pq} se denomina *contracción métrica*.

Similarmente, en caso contravariante, la contracción métrica

$$\mathcal{C}^{pq}: \mathfrak{F}_s^r(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{F}_s^{r-2}(\mathbf{M}) \quad (1 \leq p \leq q \leq r)$$

está dada en coordenadas por:

$$(\mathcal{C}^{pq} T)_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_{r-2}} = (\mathcal{C}_1^{q-1} \mathcal{B}_1^p T)_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_{r-2}} = \sum_{h,k=1}^n g_{hk} T_{j_1 \cdots j_s}^{i_1 \cdots i_{p-1} h i_p \cdots i_{q-2} k i_{q-1} \cdots i_{r-2}}.$$

Proposición 1.11.1 La derivada covariante ∇_X y la diferencial covariante ∇ en una variedad semi-riemanniana (\mathbf{M}, g) conmutan con los operadores subida y bajada de índice y con la contracción métrica.

Demostración.- Sólo probaremos la conmutatividad de la derivada covariante con el operador bajada de índice \mathcal{B}_1^p . El resto de la demostración resulta inmediato.

Para un campo de tensores arbitrario se tiene que $\mathcal{B}_1^p T = \mathcal{C}_1^p(g \otimes T)$. Pero como ∇_X conmuta con la contracción ordinaria y g es paralelo

$$\nabla_X(\mathcal{B}_1^p T) = \nabla_X(\mathcal{C}_1^p(g \otimes T)) = \mathcal{C}_1^p(g \otimes \nabla_X T) = \mathcal{B}_1^p(\nabla_X T). \quad \square$$

Definición 1.11.8 El *gradiente*, $\text{grad } f$, de una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ es el campo de vectores métricamente equivalente a la diferencial $df \in \Omega^1(\mathbf{M})$.

Así, $g(\text{grad } f, X) = df(X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

En términos de un sistema coordenado, $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, entonces

$$\text{grad } f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Definición 1.11.9 Se denomina *divergencia*, $\text{div } K$, de un campo de tensores K , a la contracción del nuevo argumento covariante en su diferencial covariante ∇K con uno de sus argumentos originales.

Consideremos dos casos especiales donde existe una única divergencia:

a) Si $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, entonces $\operatorname{div} X = \mathcal{C}_1^1(\nabla X)$.

Respecto a un sistema coordenado, si $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, resulta de la Nota 1.5.2:

$$\operatorname{div} X = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^i X^j \right).$$

b) Si $K \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M})$ simétrico, entonces $\operatorname{div} K = \mathcal{C}_{13}(\nabla K) = \mathcal{C}_{23}(\nabla K) \in \Omega^1(\mathbf{M})$.

$$\operatorname{div} K = \sum_{i,j,k,\ell=1}^n g^{ik} \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{ki}^\ell K_{\ell j} - \Gamma_{kj}^\ell K_{i\ell} \right) dx^j.$$

Definición 1.11.10 El hessiano de una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ es su segunda diferencial covariante $H^f = \nabla(\nabla f)$.

Proposición 1.11.2 El hessiano H^f de $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ es un campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ tal que

$$H^f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = g(\nabla_X(\operatorname{grad} f), Y).$$

Demostración.- Como $\nabla f = df$, resulta:

$$H^f(X, Y) = (\nabla(df))(X, Y) = (\nabla_Y df)(X) = Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) = YXf - (\nabla_Y X)f = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

La última igualdad se sigue de (1.5.1).

Finalmente, para obtener la segunda relación del enunciado, observemos que, por (1.5.2):

$$g(\nabla_X(\operatorname{grad} f), Y) + g(\operatorname{grad} f, \nabla_X Y) - Xg(\operatorname{grad} f, Y) = 0,$$

luego

$$g(\nabla_X(\operatorname{grad} f), Y) + (\nabla_X Y)f - XYf = 0.$$

La simetría sigue de la propia demostración. \square

Definición 1.11.11 La laplaciana, Δf , de una función $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ es la divergencia de su gradiente; es decir, $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$.

Ya que la diferencial covariante conmuta con el operador subida de índice, se sigue que “la laplaciana de f es la contracción de su hessiano”.

En efecto,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \mathcal{C}_1^1 \nabla(\operatorname{grad} f) = \mathcal{C}_1^1 \nabla \mathcal{S}_1^1 df = \mathcal{C}_1^1 \mathcal{S}_1^1 \nabla df = \mathcal{C}_{12} H^f.$$

Respecto a un sistema de coordenadas:

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} H_{ij}^f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

Definición 1.11.12 Una referencia ortonormal sobre \mathbf{M} en x es una base ortonormal del espacio tangente $T_x(\mathbf{M})$.

Definición 1.11.13 Un campo de referencias ortonormales sobre una variedad semi-riemanniana n -dimensional es un conjunto de n campos de vectores $\{E_1, \dots, E_n\}$, unitarios y ortogonales entre sí.

En el origen x_0 de un sistema coordenado normal los vectores coordenados son ortonormales (ver Definición 1.8.5). Se sigue que, mientras se trate sólo de operaciones punto a punto, las fórmulas con campos de referencias ortonormales son consecuencia de las correspondientes fórmulas con campos de vectores coordenados.

Por ejemplo, consideremos la contracción métrica \mathcal{C}_{pq} de $\mathfrak{T}_s^0(\mathbf{M})$; relativo a un campo de referencias ortonormales:

$$(\mathcal{C}_{pq}K)(X_1, \dots, X_{s-2}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k K(X_1, \dots, X_{p-1}, E_k, X_p, \dots, X_{q-2}, E_k, X_{q-1}, \dots, X_{s-2}).$$

Para probar esta ecuación tensorial es suficiente verificarla en un punto x_0 origen de coordenadas normales tal que $\frac{\partial}{\partial x^i}|_{x_0} = E_i|_{x_0}$. Por la multilinealidad, es suficiente que los X_i sean campos de vectores coordenados $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Entonces, la fórmula se sigue de la expresión en coordenadas de \mathcal{C}_{pq} , ya que en x_0 , $g^{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_j$, con

$$\varepsilon_j = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{x_0}, \frac{\partial}{\partial x^j}|_{x_0} \right) = \pm 1.$$

Similarmente, para un campo tensorial de tipo $(1, s)$, $K: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \overset{s}{\dots} \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$,

$$(\mathcal{C}_q^1 K)(X_1, \dots, X_{s-1}) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g(E_k, K(X_1, \dots, X_{q-1}, E_k, X_q, \dots, X_{s-1})).$$

Definición 1.11.14 *Un campo de referencias ortonormales sobre una curva $\alpha: I \rightarrow \mathbf{M}$, es un conjunto de campos de vectores unitarios y mutuamente ortogonales $\{E_1, \dots, E_n\}$ sobre α .*

Proposición 1.11.3 *Si $\alpha: I \rightarrow \mathbf{M}$ es una curva y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una referencia ortonormal en $\alpha(0)$, entonces existe un único campo de referencias ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$ sobre α tal que $E_i(0) = e_i$ ($1 \leq i \leq n$).*

Demostración.- Existe un único campo de vectores paralelo E_i sobre α , tal que $E_i(0) = e_i$, para cada $i = 1, \dots, n$. Pero, ya que el transporte paralelo, para todo $t \in I$, es una isometría lineal, $\{E_1, \dots, E_n\}$ es, en efecto, un campo de referencias ortonormales. \square

Corolario 1.11.3.1 *Sobre (\mathbf{M}, g) existe un campo de referencias ortonormal local.*

Demostración.- Dada un referencia ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en el espacio tangente $T_x(\mathbf{M})$, tomando un entorno normal U de x_0 , se extiende la referencia ortonormal a un campo de referencias ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$ sobre U mediante el desplazamiento paralelo a lo largo de las geodésicas radiales. La teoría de ecuaciones diferenciales garantiza que los campos de vectores E_i son diferenciables. \square

Definición 1.11.15 *Sea R el tensor curvatura de Riemann de (\mathbf{M}, g) . El tensor curvatura de Ricci S de \mathbf{M} es la contracción $\mathcal{C}_3^1 R \in \mathfrak{T}_2^0(\mathbf{M})$.*

Propiedades:

- 1) Por las simetrías de R , las únicas contracciones no nulas de R son $\pm S$; de hecho: $\mathcal{C}_1^1 R = 0$ y $\mathcal{C}_2^1 R = -S$.
- 2) Las componentes del tensor curvatura de Ricci respecto a un sistema coordenado son:

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^n R_{ijk}^k.$$

- 3) Respecto a un campo de referencias ortonormales $\{E_1, \dots, E_n\}$:

$$S(X, Y) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g(R(X, E_k)Y, E_k), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

donde, como es usual, $\varepsilon_k = g(E_k, E_k)$.

Pues,

$$S(X, Y) = (\mathcal{C}_3^1 R)(X, Y) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g(E_k, R(X, Y, E_k)) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g(R(Y, E_k)X, E_k) = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k g(R(X, E_k)Y, E_k),$$

donde la última igualdad surge de la propiedad cuarta de R (Proposición 1.9.1).

4) De la propiedad anterior, se deduce que S es simétrico.

5) $S(X, Y) = \text{traza}\{Z \mapsto R(Y, Z)X\}$.

Definición 1.11.16 La curvatura escalar r de (M, g) es la contracción $\mathcal{C}_{12}S \in \mathfrak{F}(M)$, de su tensor curvatura de Ricci.

En coordenadas locales, tenemos

$$r = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} S_{ij} = \sum_{i,j,k=1}^n g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Proposición 1.11.4 Si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es un campo de referencias ortonormales y denotamos por Π_{ij} la sección plana determinada por $\{E_i, E_j\}$, tenemos que

$$r = -2 \sum_{i < j} K(\Pi_{ij}),$$

donde $K(\Pi_{ij})$ denota la curvatura seccional de Π_{ij} .

Demostración.-

$$\begin{aligned} r = \mathcal{C}_{12}S &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k S(E_k, E_k) = \sum_{k \neq \ell} \varepsilon_k \varepsilon_\ell g(R(E_k, E_\ell)E_k, E_\ell) = \\ &= - \sum_{k \neq \ell} \varepsilon_k \varepsilon_\ell K(\Pi_{k\ell}) \left(\varepsilon_k \varepsilon_\ell - (g(E_k, E_\ell))^2 \right) = -2 \sum_{k < \ell} K(\Pi_{k\ell}). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.11.5 Sobre una variedad semi-riemanniana (M, g) , se tiene la siguiente relación entre la curvatura escalar y el tensor curvatura de Ricci:

$$dr = 2 \operatorname{div} S.$$

Demostración.- Utilizando la 2ª identidad de Bianchi, $\mathfrak{S}_{XYZ}(\nabla_Z R)(X, Y) = 0$, en términos de coordenadas locales (Ejercicio 31):

$$R_{jkl,h}^i + R_{j\ell h,k}^i + R_{jhk,\ell}^i = 0,$$

intercambiando h y k en el tercer término, con lo cual cambia el signo, y haciendo la contracción en i y h , resulta

$$\sum_{h=1}^n R_{jkl,h}^h + \sum_{h=1}^n R_{j\ell h,k}^h - \sum_{h=1}^n R_{jkh,\ell}^h = 0,$$

de donde resulta

$$\sum_{h=1}^n R_{jkl,h}^h + S_{j\ell;k} - S_{jk;\ell} = 0.$$

Haciendo la contracción métrica sobre j y k :

$$(*) \quad \sum_{j,h,k=1}^n g^{jk} R_{jkl,h}^h + \sum_{j,k=1}^n g^{jk} S_{j\ell;k} - r_{;\ell} = 0,$$

hemos usado, en el tercer término, que $r = \sum_{j,k=1}^n g^{jk} S_{jk}$ y que $g^{jk}_{,\ell} = 0$ (Ejercicio 34 o Nota 1.5.3 y $\nabla \mathcal{S}_1^2 \mathcal{S}_1^1 g = \mathcal{S}_1^2 \mathcal{S}_1^1 \nabla g = 0$ ⁽¹⁾).

Ahora el primer término se puede poner, usando la relación que existe entre los coeficientes del tensor curvatura de Riemann $R_{j k \ell}^i$ y los del tensor curvatura de Riemann-Christoffel $R_{ijk\ell}$,

$$\sum_{j,h,k=1}^n g^{jk} R_{jk\ell,h}^h = \sum_{h,j,k,m=1}^n g^{jk} g^{mh} R_{mj k \ell; h} = \sum_{h,j,k,m=1}^n g^{mh} g^{jk} R_{j m \ell k; h} = \sum_{h,k,m=1}^n g^{mh} R_{m \ell k; h}^k = \sum_{h=1}^n g^{mh} S_{m \ell; h}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta esto último y que

$$\operatorname{div} S = \sum_{j,k=1}^n g^{jk} S_{j\ell,k} dx^\ell \quad \text{y} \quad dr = \nabla r,$$

resulta de (*) la fórmula buscada. □

1.12 Isometrías locales

Proposición 1.12.1 Si $F: \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{M}}$ es una isometría, entonces $F_*(\nabla_X Y) = \overline{\nabla}_{F_* X} F_* Y$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$.

Demostración.- Puesto que F es un difeomorfismo, para todo $x \in \mathbb{M}$ existe un sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) alrededor de x y otro $(\overline{x}^1, \dots, \overline{x}^n)$ alrededor de $F(x)$, tales que $\overline{x}^i(F(y)) = x^i(y)$ ($i = 1, \dots, n$) para y próximo a x .

Entonces, al ser F isometría, $\overline{g}_{ij}(F(y)) = g_{ij}(y)$. Por tanto

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)} F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j} = \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^n \overline{g}^{kh} \left(\frac{\partial \overline{g}_{jh}}{\partial \overline{x}^i} + \frac{\partial \overline{g}_{ih}}{\partial \overline{x}^j} - \frac{\partial \overline{g}_{ij}}{\partial \overline{x}^h} \right) \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = F_* \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right). \end{aligned}$$

De donde se deduce la fórmula para cualquier $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{M})$. □

Definición 1.12.1 Una aplicación diferenciable $F: \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{M}}$ entre variedades semi-riemannianas es una isometría local si cada $F_{*|x}: T_x(\mathbb{M}) \rightarrow T_{F(x)}(\overline{\mathbb{M}})$ es una isometría lineal.

Nota 1.12.1 En virtud del teorema de la función inversa una formulación equivalente de esta definición, justificando el término de isometría local, es ésta: “Cada punto $x \in \mathbb{M}$ tiene un entorno abierto U tal que $F|_U$ es una isometría de U sobre un entorno abierto de $F(x)$ en $\overline{\mathbb{M}}$ ”.

Ejemplo 1.12.1 Sea S^1 la circunferencia unidad en \mathbb{R}^2 . La aplicación $F: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $t \mapsto (\cos t, \sin t)$, es una isometría local, considerando S^1 como subvariedad de Riemann de \mathbb{R}^2 .

Una isometría local está unívocamente determinada por su aplicación diferencial (aplicación inducida) en un punto:

Proposición 1.12.2 Sean $F, G: \mathbb{M} \rightarrow \overline{\mathbb{M}}$ isometrías locales (\mathbb{M} conexa). Si existe un punto $x \in \mathbb{M}$ en el que $F_{*|x} = G_{*|x}$, entonces $F = G$.

⁽¹⁾ También se llega al mismo resultado, derivando respecto a x^k la identidad $g^{ih} g_{jh} = \delta_j^i$.

Demostración.- Veamos primero que si U es un entorno normal de x , entonces para todo $y \in U$, se tiene $F_{*|y} = G_{*|y}$; en efecto:

Si $y \in U$, existe $v \in T_x(\mathbf{M})$ tal que $\gamma_v(1) = \exp_x(v) = y$. Entonces, como F conserva las geodésicas (Ejercicio 46)

$$F(y) = F(\gamma_v(1)) = \gamma_{F_*(v)}(1) = \gamma_{G_*(v)}(1) = G(\gamma_v(1)) = G(y),$$

así, $F = G$ en U ; y, por tanto, $F_{*|y} = G_{*|y}$, $\forall y \in U$.

Ahora, ya que \mathbf{M} es conexa, y, por tanto conexa por arcos [2, pág. 70], cada punto $y \in \mathbf{M}$ puede unirse a x por una cadena de entornos normales que se solapan. Se sigue que $F = G$ en todo \mathbf{M} . \square

Definición 1.12.2 Una aplicación diferenciable $F: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{M}}$ entre variedades semi-riemannianas es conforme si $F^*\overline{g} = hg$, para alguna función $h \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ tal que $h > 0$ ó $h < 0$.

Un caso especial es el siguiente:

Definición 1.12.3 Un difeomorfismo $F: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{M}}$ entre variedades semi-riemannianas tal que $F^*\overline{g} = kg$, para alguna constante $k \neq 0$ se denomina homotecia de razón k .

Proposición 1.12.3 Las homotecias conservan las conexiones de Levi-Civita.

Demostración.- Si $F: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{M}}$ es una homotecia de razón k , sea $\overline{\mathbf{M}}$ la variedad semi-riemanniana $(\overline{\mathbf{M}}, \frac{1}{k}\overline{g})$. Entonces $F: (\mathbf{M}, g) \rightarrow (\overline{\mathbf{M}}, \frac{1}{k}\overline{g})$ es una isometría, conservando las conexiones. Así sólo queda establecer que $\frac{1}{k}\overline{g}$ y \overline{g} determinan la misma conexión de Levi-Civita. Esto se deduce claramente de la fórmula de Koszul, ya que el tensor métrico aparece exactamente una vez en cada sumando, entonces el coeficiente k se simplifica. \square

Nota 1.12.2

■ Ya que la homotecia conserva la conexión de Levi-Civita también conserva las nociones geométricas que se derivan sólo de ∇ ; por ejemplo, la derivada covariante inducida sobre una curva, el transporte paralelo, las geodésicas, la curvatura de Riemann, la curvatura de Ricci (ya que es una contracción no métrica).

■ Sin embargo, la curvatura seccional y escalar no son invariantes por homotecias. De hecho, si $F: \mathbf{M} \rightarrow \overline{\mathbf{M}}$ es una homotecia de razón k , es fácil comprobar que, si Π es una sección plana no degenerada

$$\overline{K}(F_*(\Pi)) = \frac{1}{k}K(\Pi) \qquad \overline{r} \circ F = \frac{1}{k}r.$$

T E M A II

Subvariedades semi-riemannianas

2.1 Campos de vectores tangentes y normales

Definición 2.1.1 Sean \mathbf{N} y \mathbf{P} variedades diferenciables y $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{P}$ una aplicación diferenciable. Un campo de vectores Z sobre F es una aplicación

$$Z: \mathbf{N} \rightarrow T(\mathbf{P})$$

tal que $\pi \circ Z = F$, donde π es la proyección del fibrado $\pi: T(\mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{P}$.

Así, Z asigna a cada $x \in \mathbf{N}$ un vector tangente a \mathbf{P} en $F(x)$.

El conjunto $\mathfrak{X}(F)$ de todos los campo de vectores diferenciables sobre $F: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{P}$ es un módulo sobre $\mathfrak{F}(\mathbf{N})$.

Consideremos la situación particular siguiente: Sea \mathbf{M} una subvariedad diferenciable de $\overline{\mathbf{M}}$, al conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre $i: \mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ lo denotaremos por $\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$. Se tiene, entonces, los siguientes resultados:

- $\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$ es un módulo sobre $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$.
- Para todo $Y \in \overline{\mathfrak{X}}(\overline{\mathbf{M}})$, la restricción $Y|_{\mathbf{M}} \in \overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$.
- Prescindiendo de la aplicación inducida de la inclusión i_* (que es inyectiva), $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ es un submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$.

Sea ahora, \mathbf{M} una subvariedad semi-riemanniana de $\overline{\mathbf{M}}$. Cada espacio tangente $T_x(\mathbf{M})$ es, por definición, un subespacio no degenerado de $T_x(\overline{\mathbf{M}})$, así tenemos la siguiente descomposición en suma directa

$$T_x(\overline{\mathbf{M}}) = T_x(\mathbf{M}) \oplus T_x(\mathbf{M})^\perp$$

y $T_x(\mathbf{M})^\perp$ es también no degenerado y su dimensión k , es la codimensión de $T_x(\mathbf{M})$ en $T_x(\overline{\mathbf{M}})$.

Resulta de esta descomposición las siguientes proyecciones ortogonales:

$$\pi_T: T_x(\overline{\mathbf{M}}) \rightarrow T_x(\mathbf{M}) \qquad \pi_N: T_x(\overline{\mathbf{M}}) \rightarrow T_x(\mathbf{M})^\perp$$

las cuales son obviamente \mathbb{R} -lineales.

Definición 2.1.2 Un campo de vectores $Z \in \overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$ es normal a \mathbf{M} si cada Z_x es normal a \mathbf{M} ; es decir, si $Z_x \in T_x(\mathbf{M})^\perp$.

Denotamos por $\mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$ el conjunto de los campos de vectores normales de $\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$, el cual es un submódulo de $\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$.

Para $X \in \overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$, aplicando π_T y π_N en cada punto de \mathbf{M} , se obtienen campos de vectores de $\mathfrak{X}(\mathbf{M})$ y $\mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$, los cuales son diferenciables y permiten definir las siguientes aplicaciones, también denotadas por π_T y π_N :

$$\pi_T: \overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \qquad \pi_N: \overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$$

las cuales son $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineales.

La identidad $X = \pi_T(X) + \pi_N(X)$, $X \in \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$, nos permite poner

$$\bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M}) = \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \oplus \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp.$$

2.2 Conexión inducida

Si \mathbf{M} es una subvariedad semi-riemanniana de $\bar{\mathbf{M}}$, la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de $\bar{\mathbf{M}}$ da lugar, de forma natural, a una aplicación, que también denotamos por $\bar{\nabla}$,

$$\bar{\nabla}: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M}) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$$

que llamaremos *conexión inducida* sobre $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$, de la siguiente forma:

Si $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ e $Y \in \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$ entonces considerando la conexión $\bar{\nabla}$ en $\bar{\mathbf{M}}$, $\bar{\nabla}_X Y$ no tiene sentido ya que $X, Y \notin \mathfrak{X}(\bar{\mathbf{M}})$.

Ahora bien, para cada $x \in \mathbf{M}$, sea \bar{X} e \bar{Y} la extensión local diferenciable de X e Y sobre un entorno abierto coordinado \bar{U} de x en $\bar{\mathbf{M}}$. Entonces, definimos $\bar{\nabla}_X Y$ en cada $\bar{U} \cap \mathbf{M}$, como la restricción de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ a $\bar{U} \cap \mathbf{M}$.

Así, $\bar{\nabla}_X Y$ es un campo de vectores diferenciable bien definido sobre \mathbf{M} ($\bar{\nabla}_X Y \in \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$).

En efecto, la restricción de un campo de vectores diferenciable, $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}|_{\bar{U} \cap \mathbf{M}}$ es diferenciable. Así, es suficiente demostrar que es independiente de la extensión elegida. En términos del sistema coordinado sobre \bar{U} , $\bar{Y} =$

$\sum_{i=1}^{n+k} \bar{Y}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$. Entonces

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_{i=1}^{n+k} \bar{X}(\bar{Y}^i) \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} + \sum_{i=1}^{n+k} \bar{Y}^i \bar{\nabla}_{\bar{X}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \right).$$

Pero, en $y \in \bar{U} \cap \mathbf{M}$:

$$\bar{X}_y(\bar{Y}^i) = X_y(\bar{Y}^i) = X_y(\bar{Y}^i|_{\bar{U} \cap \mathbf{M}}) \quad y \quad \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} \right)(y) = \bar{\nabla}_{X_y} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}.$$

Así, la restricción de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$ depende sólo de X e Y .

La conexión inducida tiene las propiedades de Levi-Civita:

Proposición 2.2.1 Sea $\bar{\nabla}$ la conexión inducida en $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $Z, W \in \bar{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$ y $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$, entonces

$$\begin{array}{ll} A_1.- \bar{\nabla}_X + Y Z = \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_Y Z & A_4.- \bar{\nabla}_X f W = (Xf)W + f \bar{\nabla}_X W \\ A_2.- \bar{\nabla}_X(Z + W) = \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_X W & A_5.- [X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X \\ A_3.- \bar{\nabla}_f X W = f \bar{\nabla}_X W & A_6.- X \bar{g}(Z, W) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Z, W) + \bar{g}(Z, \bar{\nabla}_X W) \end{array}$$

Demostración.- En cada punto $x \in \mathbf{M}$, extenderemos todos los campos de vectores y funciones sobre un entorno abierto de x en $\bar{\mathbf{M}}$. Las correspondientes cinco propiedades se tienen para la conexión de Levi-Civita en $\bar{\mathbf{M}}$; entonces la restricción a \mathbf{M} da el resultado deseado, ya que

$$\left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} \right)|_{\mathbf{M}} = \bar{\nabla}_X Z; \quad \bar{X}(\bar{f})|_{\mathbf{M}} = X(f); \quad \bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})|_{\mathbf{M}} = g(X, Y); \quad [\bar{X}, \bar{Y}]|_{\mathbf{M}} = [X, Y]. \quad \square$$

Un hecho básico es que, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, la derivada covariante $\bar{\nabla}_X Y$ no necesariamente es tangente a \mathbf{M} . Por tanto, es natural investigar las proyecciones $\pi_T(\bar{\nabla}_X Y)$ y $\pi_N(\bar{\nabla}_X Y)$.

Proposición 2.2.2 Sea M una subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} , si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\nabla_X Y = \pi_T(\overline{\nabla}_X Y)$$

donde ∇ y $\overline{\nabla}$ son las conexiones de Levi-Civita de M y \overline{M} , respectivamente.

Demostración.- Para campos de vectores arbitrarios, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, consideremos sus extensiones locales $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$.

Consideremos la fórmula de Koszul

$$2\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}) = \overline{X}\overline{g}(\overline{Y}, \overline{Z}) + \overline{Y}\overline{g}(\overline{Z}, \overline{X}) - \overline{Z}\overline{g}(\overline{X}, \overline{Y}) - \overline{g}(\overline{X}, [\overline{Y}, \overline{Z}]) + \overline{g}(\overline{Y}, [\overline{Z}, \overline{X}]) + \overline{g}(\overline{Z}, [\overline{X}, \overline{Y}]) = F(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}).$$

Restringiéndonos a M , $\overline{g}(\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}, \overline{Z}) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z)$, y por las propiedades enunciadas a lo largo de la demostración de la proposición inmediatamente anterior, se tiene que

$$F(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})|_M = F(X, Y, Z).$$

Luego,

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z).$$

Y como Z es tangente, podemos reemplazar $\overline{\nabla}_X Y$ por $\pi_T(\overline{\nabla}_X Y)$. □

Proposición 2.2.3 La aplicación $\mathcal{B}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ definida por

$$\mathcal{B}(X, Y) = \pi_N(\overline{\nabla}_X Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal y simétrica. \mathcal{B} se denomina segunda forma fundamental de $M \hookrightarrow \overline{M}$.

Demostración.- Ya que $\overline{\nabla}$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en el primer argumento y \mathbb{R} -lineal en el segundo, también lo es \mathcal{B} . Ahora si, $f \in \mathfrak{F}(M)$,

$$\mathcal{B}(X, fY) = \pi_N(\overline{\nabla}_X fY) = \pi_N((Xf)Y + f\overline{\nabla}_X Y) = f\pi_N(\overline{\nabla}_X Y) = f\mathcal{B}(X, Y).$$

Finalmente, $\mathcal{B}(X, Y) - \mathcal{B}(Y, X) = \pi_N(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) = \pi_N([X, Y]) = 0$. □

Nota 2.2.1

■ \mathcal{B} es un campo tensorial de caracter más general de los considerados hasta ahora, ya que está valuado en $\mathfrak{X}(M)^\perp$ y no en $\mathfrak{X}(M)$. Sin embargo, su $\mathfrak{F}(M)$ -bilinealidad significa que el valor que toma en un punto sólo depende del valor de los campos de vectores en dicho punto. Así, en cada punto $x \in M$, \mathcal{B} determina una \mathbb{R} -bilineal aplicación

$$\mathcal{B}_x: T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow T_x(M)^\perp.$$

■ Las proposiciones anteriores se resumen en la siguiente relación, denominada fórmula de Gauss

$$\boxed{\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathcal{B}(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).} \quad (2.2.1)$$

Proposición 2.2.4 Sea M un subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} , con tensores curvatura de Riemann R y \overline{R} , y sea \mathcal{B} la segunda forma fundamental de $M \hookrightarrow \overline{M}$. Entonces, para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) + \overline{g}(\mathcal{B}(X, Z), \mathcal{B}(Y, W)) - \overline{g}(\mathcal{B}(X, W), \mathcal{B}(Y, Z)).$$

Demostración.- Supongamos que $[X, Y] = 0$.

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z, W) = \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nabla_Y Z, W) + \bar{g}(\bar{\nabla}_X \mathcal{B}(Y, Z), W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \nabla_X Z, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \mathcal{B}(X, Z), W) = \\ &= \bar{g}(\nabla_X \nabla_Y Z, W) + \bar{g}(\mathcal{B}(X, \nabla_Y Z), W) + X\bar{g}(\mathcal{B}(Y, Z), W) - \bar{g}(\mathcal{B}(Y, Z), \bar{\nabla}_X W) - \\ &\quad - \bar{g}(\nabla_Y \nabla_X Z, W) - \bar{g}(\mathcal{B}(Y, \nabla_X Z), W) - Y\bar{g}(\mathcal{B}(X, Z), W) + \bar{g}(\mathcal{B}(X, Z), \bar{\nabla}_Y W) = \\ &= \bar{g}(R(X, Y)Z, W) - \bar{g}(\mathcal{B}(Y, Z), \mathcal{B}(X, W)) + \bar{g}(\mathcal{B}(X, Z), \mathcal{B}(Y, W)). \end{aligned}$$

Hemos usado sucesivamente: definición de \bar{R} (Definición 1.9.1); fórmula de Gauss (2.2.1), tres veces; la propiedad de la conexión de Levi-Civita (1.5.2), $\bar{\nabla} \bar{g} = 0$; y que \bar{g} aplicado a un campo tangente y otro normal se anula. \square

Definición 2.2.1 A la expresión que da la componente $\pi_T(\bar{R}(X, Y)Z)$ se le denomina ecuación de Gauss.

Puesto que es una ecuación tensorial, la ecuación de Gauss sigue siendo válida si sus campos de vectores se reemplazan por vectores tangentes en un punto. Así se tiene la siguiente relación entre las curvaturas seccionales (Sección 1.10) K de \mathbf{M} y \bar{K} de $\bar{\mathbf{M}}$ (denominada también ecuación de Gauss):

Corolario 2.2.4.1 Si los vectores $\{u, v\}$ forman una base de una sección plana no degenerada de \mathbf{M} , entonces

$$K(u, v) = \bar{K}(u, v) + \frac{\bar{g}(\mathcal{B}(u, u), \mathcal{B}(v, v)) - \bar{g}(\mathcal{B}(u, v), \mathcal{B}(u, v))}{g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2}. \quad \square$$

Ejemplo 2.2.1 La esfera $S^n(r)$ tiene curvatura seccional $K = 1/r^2$ ($n \geq 2$).

Sea el campo vectorial posición en \mathbb{R}^{n+1} , $P = \sum_{i=1}^{n+1} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, el cual es normal a $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ en cada punto.

Sea D la conexión natural en \mathbb{R}^{n+1} , entonces

$$D_X P = \sum_{i=1}^{n+1} X(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} = X \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

La segunda forma fundamental de la esfera está dada por

$$\mathcal{B}(X, Y) = -\frac{1}{r} \langle X, Y \rangle \mathbf{U}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(S^n(r)),$$

donde $\mathbf{U} = \frac{1}{r} P$ es la normal unitaria sobre $S^n(r)$ apuntando hacia afuera. En efecto, utilizando la fórmula de Gauss:

$$\langle \mathcal{B}(X, Y), \mathbf{U} \rangle = \frac{1}{r} \langle D_X Y, P \rangle = -\frac{1}{r} \langle Y, D_X P \rangle = -\frac{1}{r} \langle X, Y \rangle.$$

Ya que \mathbb{R}^{n+1} es llana, del corolario anterior, resulta $K = 1/r^2$.

Definición 2.2.2 Si $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$ es una subvariedad semi-riemanniana n -dimensional y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de $T_x(\mathbf{M})$, se denomina curvatura media de $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$ al campo de vectores H cuyo valor en cada punto es, si $\varepsilon_i = g(e_i, e_i)$,

$$H_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \mathcal{B}_x(e_i, e_i).$$

Si M es una subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} , la geometría usual de M se llama **geometría intrínseca**, para resaltar la independencia del hecho de que M esté en \overline{M} .

Hablando sin rigor, la geometría extrínseca de M es la que vería un observador en \overline{M} . Formalmente:

Un **par isométrico** de $M \hookrightarrow \overline{M}$ en $N \hookrightarrow \overline{N}$ es una isometría $F: \overline{M} \rightarrow \overline{N}$ tal que $F|_M$ es una isometría de M en N .

En el caso particular de que $\overline{M} = \overline{N}$, se dice F es una **congruencia** de M en N .

Los rasgos de M que se conservan por todos los pares isométricos y que no pertenecen a la geometría intrínseca, constituyen la **geometría extrínseca** de M .

Por ejemplo, la segunda forma fundamental de $M \hookrightarrow \overline{M}$ es un invariante extrínseco:

Proposición 2.2.5 *Un par isométrico F de $M \hookrightarrow \overline{M}$ en $N \hookrightarrow \overline{N}$ conserva la segunda forma fundamental, esto es*

$$F_* (\mathcal{B}_x(u, v)) = \mathcal{B}_{F(x)} (F_*(u), F_*(v)), \quad \forall u, v \in T_x(M), \forall x \in M$$

Demostración.- Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Puesto que $F|_M: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $F_*(X), F_*(Y) \in \mathfrak{X}(N)$. Y ya que $F: \overline{M} \rightarrow \overline{N}$ conserva las conexiones, se sigue que (Proposición 1.12.1)

$$F_* (\overline{\nabla}_X Y) = \overline{\nabla}_{F_*(X)} F_*(Y).$$

Para cada $x \in M$, la isometría $F_*: T_x(\overline{M}) \rightarrow T_{F(x)}(\overline{N})$ lleva $T_x(M)$ en $T_{F(x)}(N)$, entonces lleva $T_x(M)^\perp$ en $T_{F(x)}(N)^\perp$. Con lo que F_* conserva las componentes tangente y normal; en consecuencia

$$F_* (\mathcal{B}(X, Y)) = F_* (\pi_N (\overline{\nabla}_X Y)) = \pi_N (F_* (\overline{\nabla}_X Y)) = \pi_N (\overline{\nabla}_{F_*(X)} F_*(Y)) = \mathcal{B}(F_*(X), F_*(Y)). \quad \square$$

2.3 Geodésicas en subvariedades

La fórmula de Gauss se adapta a campos de vectores sobre curvas como sigue:

Proposición 2.3.1 *Sea Y un campo de vectores, siempre tangente a M , sobre una curva α en $M \hookrightarrow \overline{M}$. Entonces*

$$\frac{\overline{\nabla} Y}{dt} = \frac{\nabla Y}{dt} + \mathcal{B} \left(\frac{d\alpha}{dt}, Y \right). \quad \square$$

Corolario 2.3.1.1 *Si α es una curva en $M \hookrightarrow \overline{M}$, entonces*

$$\frac{\overline{\nabla} \frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{\nabla \frac{d\alpha}{dt}}{dt} + \mathcal{B} \left(\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right). \quad \square$$

Corolario 2.3.1.2 *Una curva α en $M \hookrightarrow \overline{M}$ es una geodésica de M si y sólo si $\frac{\overline{\nabla} \frac{d\alpha}{dt}}{dt}$ es normal a M .* \(\square\)

Corolario 2.3.1.3 *Las geodésicas no constantes de la esfera $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ son todas las parametrizaciones de módulo de vector tangente constante de las circunferencias máximas.*

Demostración.- Una circunferencia máxima $\mathcal{C} \subset S^n(r)$ es la intersección de $S^n(r)$ con un plano Π a través del origen en \mathbb{R}^{n+1} . Si α es una parametrización de \mathcal{C} con $\left\langle \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle = cte.$, entonces $\frac{d\alpha}{dt}$ y $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ son ortogonales y tangentes al plano Π . Pero sobre α el campo vectores posición P_α es también tangente a Π y ortogonal a $\frac{d\alpha}{dt}$ (pues es ortogonal a todos los vectores tangentes a $S^n(r)$). Así $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ y P_α son colineales en cada punto, luego $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ es normal a $S^n(r)$ y entonces, por el corolario anterior, α es una geodésica de la esfera. Pues, en este caso, si D es la conexión natural en \mathbb{R}^{n+1} :

$$\frac{D \frac{d\alpha}{dt}}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

Demostremos finalmente, que toda geodésica no constante γ puede ser obtenida así. Sea Π un plano que contiene al origen y al punto $\gamma(0)$ y que es tangente al vector $\frac{d\gamma}{dt}(0)$. Entonces, con una conveniente parametrización de $\Pi \cap S^n(r)$, tenemos que $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{d\gamma}{dt}(0)$. Entonces $\alpha = \gamma$, por la unicidad de las geodésicas. \square

2.4 Subvariedades totalmente geodésicas

Definición 2.4.1 Una subvariedad semi-riemanniana M de \overline{M} es totalmente geodésica si su segunda forma fundamental es nula: $\mathcal{B} \equiv 0$.

Así un subvariedad totalmente geodésica M es extrínsecamente llana: Observadores en \overline{M} no la ven curvada. Esto no significa que M sea intrínsecamente llana; en efecto, por la ecuación de Gauss ella tiene la misma curvatura que \overline{M} .

Proposición 2.4.1 Sea $M \hookrightarrow \overline{M}$, entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

1. M es totalmente geodésica.
2. Toda geodésica en M es también geodésica en \overline{M} .
3. Si $v \in T_x(\overline{M})$ es tangente a M , entonces la geodésica γ_v de \overline{M} queda inicialmente en M .
4. Si α es una curva en M y $v \in T_{\alpha(0)}(M)$, entonces el transporte paralelo de v a lo largo de α es el mismo en M y en \overline{M} .

Demostración.- (2) \Rightarrow (3). Si $\alpha: I \rightarrow M$ es la geodésica de M con $\alpha'(0) = v$, entonces ya que α es también geodésica de \overline{M} se sigue, por la unicidad de las geodésicas, que $\alpha = \gamma_v|_I$.

(3) \Rightarrow (1). Para todo v tangente a M , $\gamma_v: I \rightarrow \overline{M}$, $\gamma_v(t) \in M$, entonces

$$\frac{\overline{\nabla} \frac{d\gamma_v}{dt}}{dt} \Big|_0 = \frac{\nabla \frac{d\gamma_v}{dt}}{dt} \Big|_0 + \mathcal{B}(v, v) \implies \mathcal{B}(v, v) = 0.$$

Por polarización

$$\mathcal{B}(u + v, u + v) = \mathcal{B}(u, u) + 2\mathcal{B}(u, v) + \mathcal{B}(v, v) \quad \text{resulta} \quad \mathcal{B} \equiv 0.$$

(1) \Rightarrow (4). Sea X el campo de vectores paralelo en M sobre α tal que $X(0) = v$. Entonces, por las hipótesis y por la fórmula de Gauss, X es paralelo en \overline{M} . Así los dos transportes paralelos coinciden.

(4) \Rightarrow (2). Si γ es una geodésica en M , entonces $\frac{d\gamma}{dt}$ es paralelo en M , y por hipótesis paralelo en \overline{M} , luego α es geodésica en \overline{M} . \square

Definición 2.4.2 Si F es un subespacio (no degenerado) k -dimensional de \mathbb{R}_ν^n , a cada conjunto trasladado $x + F$ se le denomina k -plano (no degenerado) en \mathbb{R}_ν^n ($1 \leq k \leq n$).

Es fácil ver que los k -planos no degenerados son subvariedades semi-riemannianas totalmente geodésicas de \mathbb{R}_ν^n . El siguiente resultado demuestra que éstas son las únicas conexas y completas:

Proposición 2.4.2 Sean M y N subvariedades semi-riemannianas de \overline{M} , completas, conexas y totalmente geodésicas. Si existe un punto $x \in M \cap N$ en el que $T_x(M) = T_x(N)$, entonces $M = N$.

Demostración.- Es suficiente demostrar que si M es conexas y N es completa, entonces $M \subset N$.

Sea σ un segmento geodésico en M que une x con y . Entonces σ es una geodésica en \overline{M} , y, por las hipótesis, $\frac{d\sigma}{dt}(0) \in T_x(N)$. Así, σ es una geodésica de N mientras permanezca en N . Pero ya que N es completa, σ está enteramente contenida en N . Ahora bien, el transporte paralelo en M de $T_x(M) = T_x(N)$ a lo largo de σ dará $T_y(M) = T_y(N)$. Este argumento puede repetirse para demostrar que toda geodésica quebrada de M partiendo de x queda también en N . Ya que M es conexas se sigue que $M \subset N$. \square

Ejemplo 2.4.1 Las subvariedades riemannianas de $S^n(r)$ k -dimensionales, totalmente geodésicas, completas y conexas son las k -esferas máximas: las subvariedades $F \cap S^n(r)$, donde F es un $(k+1)$ -plano a través del origen.

Definición 2.4.3 Un punto $x \in M \hookrightarrow \overline{M}$ es umbilical si existe un vector normal $w \in T_x(M)^\perp$ tal que

$$\mathcal{B}_x(u, v) = g(u, v)w \quad \forall u, v \in T_x(M).$$

A w se le denomina vector curvatura normal de M en x .

Nota 2.4.1

- En el caso de variedades riemannianas, en un punto umbilical x , $\mathcal{B}_x(u, u) = w$, para todo vector unitario. Esto significa que M se curva del mismo modo en toda las direcciones en un punto umbilical.
- Para métricas indefinidas, la fórmula $\mathcal{B}_x(u, u) = g(u, u)w$ demuestra que M se curva hacia w o $-w$ según que $g(u, u) > 0$ ó $g(u, u) < 0$.

Definición 2.4.4 Una subvariedad semi-riemannian M de \overline{M} es totalmente umbilical si todo punto de M es umbilical.

En una subvariedad M totalmente umbilical existe un campo de vectores diferenciable normal Z sobre M , llamado campo de vectores curvatura normal de M , tal que $\mathcal{B}(X, Y) = g(X, Y)Z$, $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Una subvariedad totalmente geodésica es totalmente umbilical ($Z = 0$).

En el Ejemplo 2.2.1 de la página 36, se demuestra que en la esfera $S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se tiene $\mathcal{B}(X, Y) = -\frac{1}{r}\langle X, Y \rangle \mathbf{U}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(S^n(r))$, donde \mathbf{U} es la normal unitaria apuntando hacia afuera. En consecuencia, $S^n(r)$ es totalmente umbilical.

2.5 Hipersuperficies semi-riemannianas

Definición 2.5.1 Una hipersuperficie semi-riemanniana M de \overline{M} es una subvariedad semi-riemanniana de codimensión 1.

Definición 2.5.2 La signatura ε de una hipersuperficie \mathbf{M} de $\overline{\mathbf{M}}$ es:

- +1 si $\overline{g}(z, z) > 0$ para todo vector normal $z \neq 0$.
- 1 si $\overline{g}(z, z) < 0$ para todo vector normal $z \neq 0$.

Ejemplo 2.5.1 En una variedad de Riemann, toda hipersuperficie es riemanniana de signatura +1.

Proposición 2.5.1 Sea $\overline{\mathbf{M}}$ una variedad semi-riemanniana, $f \in \mathfrak{F}(\overline{\mathbf{M}})$ y $b \in f(\overline{\mathbf{M}}) \subset \mathbb{R}$. Entonces, $\mathbf{M} = f^{-1}(b)$ es una hipersuperficie semi-riemanniana de $\overline{\mathbf{M}}$ si y sólo si $\overline{g}(\text{grad } f, \text{grad } f)$ es mayor o menor que cero en \mathbf{M} . En este caso, la signatura de \mathbf{M} es el signo de $\overline{g}(\text{grad } f, \text{grad } f)$, y $\mathbf{U} = \frac{1}{\|\text{grad } f\|} \text{grad } f$ es un campo de vectores normal unitario sobre \mathbf{M} .

Demostración.- $\mathbf{M} = f^{-1}(b)$ es una subvariedad pues $df \neq 0$, al ser df métricamente equivalente a $\text{grad } f \neq 0$. $\text{grad } f$ es normal a \mathbf{M} , pues si $v \in T_x(\mathbf{M})$

$$\overline{g}(\text{grad } f, v) = df(v) = v(f) = v(f|_{\mathbf{M}}) = 0.$$

ya que f es constante sobre \mathbf{M} .

Finalmente, cada espacio vectorial $T_x(\mathbf{M})$, $x \in \mathbf{M}$, es no degenerado; pues si $\overline{g}(u, v) = 0$, para todo $u \in T_x(\mathbf{M})$, y como también $\overline{g}(\text{grad } f, v) = 0$, resulta $v = 0$. \square

Ejemplo 2.5.2 En \mathbb{R}^{n+1} , si $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x^1, \dots, x^n) = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2$, entonces $f^{-1}(r^2)$ es la esfera $S^n(r)$.

$$\left(\text{grad } f = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{y} \quad \langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right)^2 > 0 \right).$$

Nota 2.5.1 No toda hipersuperficie semi-riemanniana $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ se puede obtener mediante la proposición anterior, ya que en general no existe una normal unitaria diferenciable sobre todo \mathbf{M} : la banda de Moebius en \mathbb{R}^3 es un ejemplo.

Ahora bien, es fácil demostrar que existe una normal unitaria diferenciable en el entorno de cada punto de \mathbf{M} .

Definición 2.5.3 Sea \mathbf{U} un campo de vectores normal unitario, sobre una hipersuperficie semi-riemanniana $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$. Al campo de tensores de tipo $(1, 1)$ \mathcal{S} sobre \mathbf{M} tal que

$$g(\mathcal{S}(X), Y) = \overline{g}(\mathcal{B}(X, Y), \mathbf{U}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$$

se le denomina operador forma de $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ (que se deriva de \mathbf{U}).

Nota 2.5.2 \mathcal{S} determina un operador lineal

$$\mathcal{S}_x: T_x(\mathbf{M}) \rightarrow T_x(\mathbf{M}) \quad \forall x \in \mathbf{M}.$$

Proposición 2.5.2 Si \mathcal{S} es el operador forma, derivado de \mathbf{U} , de $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$, entonces

$$\mathcal{S}_x(v) = -\overline{\nabla}_v \mathbf{U}, \quad \forall v \in T_x(\mathbf{M}),$$

y en cada punto el operador lineal \mathcal{S}_x es autoadjunto:

$$g(\mathcal{S}_x(u), v) = g(u, \mathcal{S}_x(v)) \quad \forall u, v \in T_x(\mathbf{M}).$$

Demostración.- $\bar{\nabla}_X \mathbf{U}$ es tangente a \mathbf{M} , para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, pues $\bar{g}(\bar{\nabla}_X \mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0$, al ser $\bar{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = cte$. Además, para $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$:

$$\bar{g}(\mathfrak{S}(X), Y) = \bar{g}(\mathcal{B}(X, Y), \mathbf{U}) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \mathbf{U}) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X \mathbf{U}),$$

luego $\mathfrak{S}(X) = -\bar{\nabla}_X \mathbf{U}$.

La simetría de \mathcal{B} implica que \mathfrak{S} es autoadjunto. \square

Nota 2.5.3

■ Esta caracterización de \mathfrak{S} permite describir la forma de \mathbf{M} en $\bar{\mathbf{M}}$: \mathfrak{S} mide la variación de \mathbf{U} en todas las direcciones.

■ El campo de tensores simétrico de tipo $(0, 2)$ métricamente equivalente a \mathfrak{S} , se denomina tradicionalmente segunda forma fundamental de $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$ (la primera forma fundamental es el tensor métrico de \mathbf{M}).

■ Si la normal unitaria \mathbf{U} , puede que sólo definida localmente, se reemplaza por $-\mathbf{U}$, entonces \mathfrak{S} cambia de signo. Así, aunque \mathbf{M} no admita una normal unitaria global, \mathfrak{S} está globalmente definida salvo signo.

Para hipersuperficies la ecuación de Gauss toma la forma siguiente:

Proposición 2.5.3 Sea \mathfrak{S} el operador forma de una hipersuperficie semi-riemanniana $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$. Si $\{u, v\}$ genera un plano no degenerado tangente a \mathbf{M} , entonces

$$K(u, v) = \bar{K}(u, v) + \varepsilon \frac{g(\mathfrak{S}(u), u)g(\mathfrak{S}(v), v) - g(\mathfrak{S}(u), v)^2}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}$$

donde ε es la signatura de $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$.

Demostración.- Basta con tener presente que $\mathcal{B}(u, v) = \varepsilon \bar{g}(\mathfrak{S}(u), v)\mathbf{U}$ y $\bar{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \varepsilon$. \square

Proposición 2.5.4 Sea \mathbf{M} una hipersuperficie semi-riemanniana de $\bar{\mathbf{M}}$, entonces \mathbf{M} es totalmente umbilical si y sólo si el operador forma \mathfrak{S} es la multiplicación por un escalar, en cada punto.

Demostración.- Si \mathbf{M} es totalmente umbilical, con campo de vectores curvatura normal Z y si \mathfrak{S} es el operador forma, derivado de una normal unitaria \mathbf{U} , puede que sólo definida localmente, entonces

$$g(\mathfrak{S}(X), Y) = \bar{g}(\mathcal{B}(X, Y), \mathbf{U}) = g(X, Y)\bar{g}(Z, \mathbf{U}), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Así, $\mathfrak{S}(X) = \bar{g}(Z, \mathbf{U})X$, $\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

Recíprocamente, supongamos que para toda elección de \mathbf{U} , su operador forma \mathfrak{S} es la multiplicación por un escalar; esto es, existe una función $k_{\mathbf{U}}$ sobre el dominio de \mathbf{U} , tal que $\mathfrak{S}(X) = k_{\mathbf{U}}X$, para todo X ; entonces

$$\mathcal{B}(X, Y) = \varepsilon g(\mathfrak{S}(X), Y)\mathbf{U} = \varepsilon k_{\mathbf{U}}g(X, Y)\mathbf{U}.$$

Ya que, $k_{-\mathbf{U}} = -k_{\mathbf{U}}$, el campo de vectores $Z = \varepsilon k_{\mathbf{U}}\mathbf{U}$ está globalmente bien definido, y la relación de arriba queda

$$\mathcal{B}(X, Y) = g(X, Y)Z. \quad \square$$

Definición 2.5.4 La función k de la proposición anterior se denomina función curvatura normal de $\mathbf{M} \hookrightarrow \bar{\mathbf{M}}$.

Vamos ahora a utilizar el mismo método usado con las esferas en \mathbb{R}^{n+1} para obtener una importante familia de hipersuperficies semi-riemannianas en \mathbb{R}_ν^{n+1} .

Proposición 2.5.5 Consideremos en el espacio semi-euclideo \mathbb{R}_ν^{n+1} la función $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$ definida por $f = \langle P, P \rangle$, donde P es el campo de vectores posición; entonces $Q = f^{-1}(\varepsilon r^2)$ ($\varepsilon = \pm 1, r > 0$) es un hipersuperficie semi-riemanniana de \mathbb{R}_ν^{n+1} , con campo de vectores normal unitario $U = \frac{1}{r}P$ y signatura ε .

Demostración.- Por la Proposición 2.5.1, hay que establecer que $\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle$ es mayor o menor que cero en Q .

Para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$, $\langle \text{grad } f, X \rangle = Xf = X\langle P, P \rangle = 2\langle D_X P, P \rangle = 2\langle X, P \rangle$.

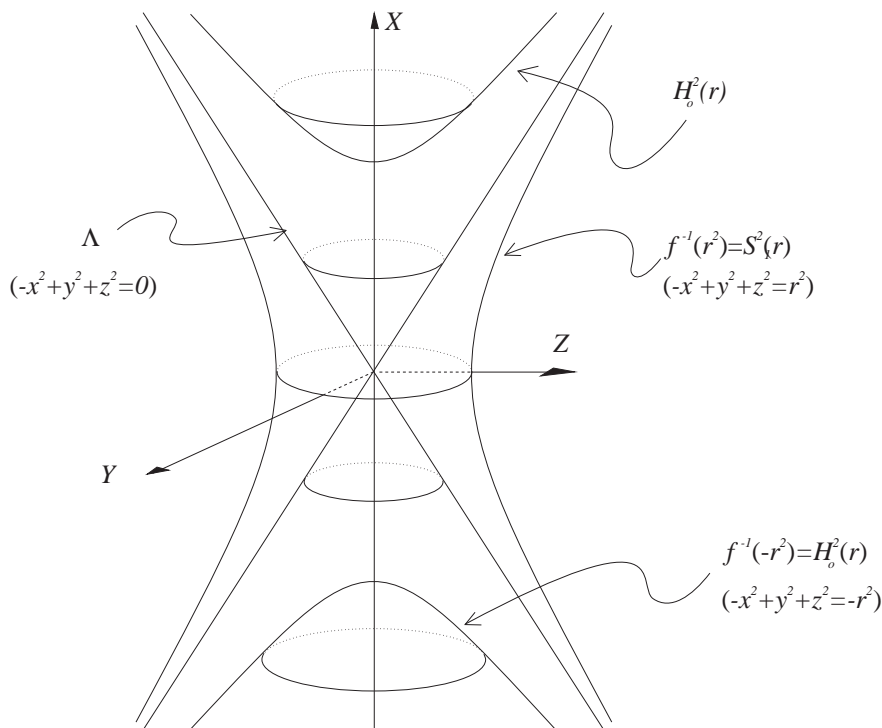
Así, $\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle = 2\langle \text{grad } f, P \rangle = 4\langle P, P \rangle = 4f$. \square

Nota 2.5.4 Con relación a las coordenadas naturales la expresión de la función f del enunciado de la proposición anterior es

$$f(x^1, \dots, x^{n+1}) = -\sum_{i=1}^{\nu} (x^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (x^j)^2.$$

Definición 2.5.5 Estas hipersuperficies semi-riemannianas se denominan hipercuádricas de \mathbb{R}_ν^{n+1} .

Ejemplo 2.5.3 En \mathbb{R}_1^3 tenemos el siguiente diagrama:



Nota 2.5.5 Las dos familias $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = -1$ recubren todo \mathbb{R}_1^{n+1} , salvo el conjunto $f^{-1}(0)$.

Proposición 2.5.6 El conjunto

$$\Lambda = \left\{ (x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} - \{0\} \mid -\sum_{i=1}^{\nu} (x^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n+1} (x^j)^2 = 0 \right\}$$

es una hipersuperficie, denominada cono de nulidad, difeomorfa a $(\mathbb{R}^\nu - \{0\}) \times S^{n-\nu}$.

El campo de vectores posición P de \mathbb{R}_ν^{n+1} en Λ es a la vez tangente y normal a Λ , por lo que Λ no es semi-riemanniana.

Demostración.- $\Lambda = f^{-1}(0) - \{0\}$, donde $f = \langle P, P \rangle$. Luego, como en la Proposición 2.5.5, Λ es una hipersuperficie (el único punto donde $\langle \text{grad } f, \text{grad } f \rangle = 0$ es en el origen) y P es normal a Λ ($\text{grad } f = 2P$). P también es tangente a Λ , ya que es tangente a la curva $t \mapsto tx$, $x \in \Lambda$.

Consideremos ahora, la esfera unidad $S^{n-\nu} \equiv S^{n-\nu}(1)$ en $\mathbb{R}^{n-\nu+1}$. Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi: (\mathbb{R}^\nu - \{0\}) \times S^{n-\nu} &\longrightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1} \\ (y, z) &\longmapsto \phi(y, z) = (y^1, \dots, y^\nu, \|y\|z^1, \dots, \|y\|z^{n-\nu+1}). \end{aligned}$$

Ya que $\langle \phi(y, z), \phi(y, z) \rangle = -\sum_{i=1}^\nu (y^i)^2 + \|y\|^2 = 0$, la imagen de ϕ queda en Λ .

Sea por otra parte, $\psi: \Lambda \rightarrow (\mathbb{R}^\nu - \{0\}) \times S^{n-\nu}$ definida por

$$\psi(x) = (y, z) = \left(x^1, \dots, x^\nu, \frac{1}{h(x)}x^{\nu+1}, \dots, \frac{1}{h(x)}x^{n+1} \right), \quad \text{donde} \quad h(x) = \left(\sum_{j=\nu+1}^{n+1} (x^j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como ϕ y ψ son diferenciables e inversas una de otra, resulta que Λ es difeomorfa a $(\mathbb{R}^\nu - \{0\}) \times S^{n-\nu}$. \square

Definición 2.5.6 Sea $n \geq 2$ y $0 \leq \nu \leq n$, llamamos:

Pseudoesfera de radio $r > 0$, dimensión n e índice ν en \mathbb{R}_ν^{n+1} a la hipercuádrice

$$S_\nu^n(r) = f^{-1}(r^2) = \left\{ x \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = r^2 \right\}.$$

Espacio pseudohiperbólico de radio $r > 0$, de dimensión n e índice ν en $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ a la hipercuádrice

$$H_\nu^n(r) = f^{-1}(-r^2) = \left\{ x \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -r^2 \right\}.$$

Nota 2.5.6

- Ya que las pseudoesferas tienen signatura $+1$, su índice en \mathbb{R}_ν^{n+1} es ν . Los espacios pseudohiperbólicos tienen signatura -1 , así su índice en $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ es $\nu - 1$ (de ahí el cambio a $\mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}$ en la definición).
- Para $\nu = 0$, $S_0^n(r)$ es la esfera ordinaria $S^n(r)$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}_0^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$.

El estudio de las hipercuádrice queda simplificado debido al hecho siguiente:

Proposición 2.5.7 Toda hipercuádrice es homotética a una conveniente pseudoesfera unidad $S_\nu^n \equiv S_\nu^n(1)$.

Demostración.- Primeramente, para todo r , la multiplicación por r en \mathbb{R}_ν^{n+1} es una homotecia de razón r ; entonces también lo es su restricción a $S_\nu^n \rightarrow S_\nu^n(r)$.

Consideremos la aplicación $\sigma: \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}$, dada por

$$\sigma(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^{\nu+1}, \dots, x^{n+1}, x^1, \dots, x^\nu),$$

lo cual es una anti-isometría que lleva cada $S_\nu^n(r)$ anti-isométricamente sobre $H_{n-\nu}^\nu(r)$, y viceversa.

En efecto, σ es un isomorfismo lineal y

$$\langle \sigma(x), \sigma(x) \rangle = -\sum_{j=\nu+1}^{n+1} (x^j)^2 + \sum_{i=1}^\nu (x^i)^2 = -\langle x, x \rangle.$$

Luego σ es una anti-isometría de \mathbb{R}_ν^{n+1} en $\mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}$.

Esta fórmula también demuestra que σ envía $S_\nu^n(r)$ sobre $H_{n-\nu}^\nu(r)$ y viceversa. Así $\sigma|_{S_\nu^n(r)}$ es un difeomorfismo, y entonces una anti-isometría. \square

Proposición 2.5.8 La pseudoesfera $S_\nu^n(r)$ es difeomorfa a $\mathbb{R}^\nu \times S^{n-\nu}$; el espacio pseuhiperbólico $H_\nu^n(r)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}^{n-\nu} \times S^\nu$.

Demostración.- Por la proposición anterior, sólo es suficiente hacer la demostración para $S_\nu^n(r)$.

Sea $\phi: \mathbb{R}^\nu \times S^{n-\nu} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^\nu \times \mathbb{R}^{n+1-\nu} \cong \mathbb{R}_\nu^{n+1}$, definida por

$$(y, z) \mapsto \phi(y, z) = (y, (1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}z).$$

Puesto que $\langle \phi(y, z), \phi(y, z) \rangle = -\|y\|^2 + (1 + \|y\|^2) = 1$, la aplicación ϕ lleva $\mathbb{R}^\nu \times S^{n-\nu}$ en S_ν^n .

La aplicación ϕ es un difeomorfismo, ya que tiene como inversa a la aplicación

$$(x, y) \mapsto (x, (1 + \|x\|^2)^{-\frac{1}{2}}y). \quad \square$$

Proposición 2.5.9 Aparte de las esferas, las únicas variedades de Riemann entre las hipercuádricas son las hipersuperficies $H^n(r) = H_0^n(r)$ en el espacio de Minkowski \mathbb{R}_1^{n+1} .

Demostración.- Por la proposición anterior $H_0^n(r) \cong \{1, -1\} \times \mathbb{R}^n$, tiene dos componentes conexas cada una difeomorfa a \mathbb{R}^n . □

Nota 2.5.7 Las dos componentes conexas de las que se habla en la demostración anterior, son de hecho congruentes (página 37) mediante la isometría de \mathbb{R}_1^{n+1} :

$$(x^1, x^2, \dots, x^{n+1}) \mapsto (-x^1, x^2, \dots, x^{n+1}).$$

Así como ocurre con la esfera (página 39), toda hipercuádrica es totalmente umbilical:

Proposición 2.5.10 La hipercuádrica $Q = f^{-1}(\varepsilon r^2) \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ de signatura ε es totalmente umbilical, con operador forma $\mathcal{S} = -\frac{1}{r}I$ derivado del campo normal hacia afuera $\frac{1}{r}P$.

Demostración.- Si $X \in \mathfrak{X}(Q)$, entonces $\mathcal{S}(X) = -D_X(\frac{1}{r}P) = -\frac{1}{r}X$. □

Nota 2.5.8

- De este resultado se sigue que el campo de vectores curvatura normal de Q es $Z = -\frac{\varepsilon}{r}\mathbf{U}$.
- Ya que \mathbf{U} apunta hacia afuera (afuera del origen), Z apunta hacia adentro sobre las pseudoesferas y hacia afuera sobre los espacios pseudohiperbólicos.
- Esto es lógico sobre las hipercuádricas de Riemann $S^n(r)$ y $H^n(r)$, ya que la esfera se curva hacia adentro en todo punto, mientras que el espacio hiperbólico se curva hacia afuera.

La siguiente proposición demuestra que, como para las esferas, las geodésicas de toda hipercuádrica $Q \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ son las curvas intersección de Q con los planos Π a través del origen de \mathbb{R}_ν^{n+1} . $\Pi \cap Q$ puede tener dos componentes en vez de una como en las esferas.

Proposición 2.5.11 Sea γ una geodésica no constante de $S_\nu^n(r) \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1}$.

1. Si $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$ (γ es “timelike”) γ es una parametrización de una rama de una hipérbola en \mathbb{R}_ν^{n+1} .
2. Si $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$ (γ es “null”) γ es una línea recta (una geodésica en \mathbb{R}_ν^{n+1}).
3. Si $\langle \gamma', \gamma' \rangle > 0$ (γ es “spacelike”) γ es una parametrización periódica de una elipse en \mathbb{R}_ν^{n+1} .

En consecuencia, $S_\nu^n(r)$ es completa.

Demostración.- Sea $p \in S_\nu^n(r)$, Π un plano en \mathbb{R}_ν^{n+1} pasando por el origen y por p . Si g es el producto escalar en \mathbb{R}_ν^{n+1} , entonces, ya que $g(p, p) = \langle p, p \rangle > 0$, existen tres posibilidades para la restricción de g a Π :

I) $g|_\Pi$ es definida positiva.

$S_\nu^n(r) \cap \Pi$ es una circunferencia en $\Pi \cong \mathbb{R}^2$.

En efecto, sea $\{e_1, e_2\}$ una base ortonormal para Π . Un punto $ae_1 + be_2$ de Π está en $S_\nu^n(r)$ si y sólo si $a^2 + b^2 = r^2$.

Así, $\alpha(t) = r \cos t e_1 + r \sin t e_2$ es una parametrización con $\|\alpha'\| = r$ de $\Pi \cap S_\nu^n(r)$. Además $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = -P_{\alpha(t)}$. Con lo que $\frac{D\alpha'(t)}{dt}$ es normal a $S_\nu^n(r)$; en consecuencia, α es una geodésica de $S_\nu^n(r)$.

II) $g|_\Pi$ es no degenerada con índice 1.

Sea $\{e_0, e_1\}$ una base ortonormal para Π tal que $p = re_1$ y $\langle e_0, e_0 \rangle = 0$. Un punto $ae_0 + be_1$ de Π está en $S_\nu^n(r)$ si y sólo si $-a^2 + b^2 = r^2$. Así, $\Pi \cap S_\nu^n(r)$ consta de las dos ramas de una hipérbola en $\Pi \cong \mathbb{R}_1^2$. La rama que contiene al punto p tiene parametrización con velocidad constante

$$\alpha(t) = r \sinh t e_0 + r \cosh t e_1 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Entonces, $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = -r^2 \cosh^2 t + r^2 \sinh^2 t = -r^2$.

Como $\frac{D\alpha'(t)}{dt} = P_{\alpha(t)}$, $\frac{D\alpha'(t)}{dt}$ es normal a $S_\nu^n(r)$. Por tanto, α es una geodésica de $S_\nu^n(r)$.

III) $g|_\Pi$ es degenerada y $\dim N = 1$, siendo $N = \{u \in \Pi / g|_\Pi(u, v) = 0, \forall v \in \Pi\}$.

Si $u \in N - \{0\}$, $\{p, u\}$ es una base de Π . Un punto $ap + bu$ de Π está en $S_\nu^n(r)$ si y sólo si $a^2 = 1$ ($a = \pm 1$). Con lo que $\Pi \cap S_\nu^n(r)$ consta de dos rectas paralelas. La que pasa a través de p está parametrizada por $\alpha(t) = p + tu$.

Ya que α es una geodésica de \mathbb{R}_ν^{n+1} que queda en $S_\nu^n(r)$ es una geodésica de $S_\nu^n(r)$. Además, $\langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle u, u \rangle = 0$.

Finalmente, razonando de forma análoga que como se hizo para las esferas, Corolario 2.3.1.3, se demuestra que toda geodésica de $S_\nu^n(r)$ es una parametrización de uno de los tipos enunciados. \square

Nota 2.5.9

■ Las geodésicas de los espacios pseudohiperbólicos se pueden ahora obtener fácilmente. Ya que la aplicación

$$\sigma: \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_{n-\nu+1}^{n+1}, \quad (x^1, \dots, x^{n+1}) \mapsto (x^{\nu+1}, \dots, x^{n+1}, x^1, \dots, x^\nu)$$

es una anti-isometría, se sigue que la precedente proposición se verifica para $H_\nu^n(r)$ cambiando la palabra “spacelike” y “timelike” y biceversa.

■ En particular, toda geodésica γ del espacio hiperbólico $H^n(r)$ es inyectiva, ya que γ es “spacelike” en \mathbb{R}_1^{n+1} ($\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle > 0$).

Proposición 2.5.12 Las hipercuádricas tienen curvatura constante.

Demostración.- De la expresión de la curvatura seccional (Proposición 2.5.3), se tiene

$$K(u, v) = \overline{K}(u, v) + \varepsilon \frac{\langle \mathcal{S}(u), u \rangle \langle \mathcal{S}(v), v \rangle - \langle \mathcal{S}(u), v \rangle^2}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2},$$

resulta, utilizando la Proposición 2.5.10, que

$$K(u, v) = \varepsilon \frac{\langle -\frac{u}{r}, u \rangle \langle -\frac{v}{r}, v \rangle - \langle -\frac{u}{r}, v \rangle^2}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2} = \frac{\varepsilon}{r^2}. \quad \square$$

En consecuencia, tenemos:

Proposición 2.5.13 Sea $n \geq 2$ y $0 \leq \nu \leq n$, entonces

1. La pseudoesfera $S_\nu^n(r)$ es una variedad semi-riemanniana completa de curvatura constante positiva, $K = \frac{1}{r^2}$.
2. El espacio pseudohiperbólico $H_\nu^n(r)$ es una variedad semi-riemanniana completa de curvatura constante negativa, $K = -\frac{1}{r^2}$. \square

Nota 2.5.10

■ En el caso riemanniano el espacio hiperbólico $H^n(r)$ contrasta con la esfera $S^n(r)$: mientras la esfera es compacta, con geodésicas periódicas y curvatura positiva, $H^n(r)$ no es compacta (difeomorfa a \mathbb{R}^n) con geodésicas inyectivas y de curvatura negativa.

■ Hablando intuitivamente todos los puntos sobre la esfera unidad S^2 en \mathbb{R}^3 y todas las direcciones son geoméricamente iguales. A primera vista parece que esta uniformidad falla en las pseudoesferas, pero de hecho se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.5.14 *Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{f_1, \dots, f_n\}$ referencias ortogonales sobre $S_\nu^n(r)$ en los puntos p y q , respectivamente. Entonces, existe una única isometría $\phi: \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ que aplica $S_\nu^n(r)$ isométricamente en sí misma, con $\phi(p) = q$ y $\phi_*(e_i) = f_i$ ($1 \leq i \leq n$).*

Demostración.- El vector posición p en $p \in S_\nu^n(r)$ es normal a $S_\nu^n(r)$, por tanto ortogonal a cada e_i ; tenemos así unas bases ortonormales $\{e_1, \dots, e_n, \frac{1}{r}p\}$ y $\{f_1, \dots, f_n, \frac{1}{r}q\}$ en \mathbb{R}_ν^{n+1} .

Por la Proposición 1.2.5, existe una única isometría lineal $\phi: \mathbb{R}_\nu^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ tal que $\phi(e_i) = f_i$ ($1 \leq i \leq n$) y $\phi(\frac{1}{r}p) = \frac{1}{r}q$, entonces $\phi(p) = q$ y ϕ es una isometría de \mathbb{R}_ν^{n+1} .

De la definición de $S_\nu^n(r)$ se sigue que $\phi(S_\nu^n(r)) = S_\nu^n(r)$, y ya que $S_\nu^n(r)$ es una subvariedad semi-riemanniana, ϕ restringida a $S_\nu^n(r)$ es una isometría.

Como ϕ es lineal en \mathbb{R}_ν^{n+1} , se identifica con su diferencial. Así, $\phi_*(e_i) = f_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Para demostrar que ϕ es única, sea ψ otra isometría de \mathbb{R}_ν^{n+1} con las propiedades requeridas. Claramente ϕ_* y ψ_* coinciden sobre $T_p(S_\nu^n(r))$. Ya que ϕ y ψ forman un par isométrico, se sigue que ϕ_* y ψ_* conservan los vectores curvatura normal. Así ellas coinciden sobre $T_p(\mathbb{R}_\nu^{n+1})$. Luego $\phi = \psi$ (Proposición 1.12.2). \square

2.6 La ecuación de Codazzi

Sea M una subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} .

Definición 2.6.1 *La conexión normal de $M \hookrightarrow \overline{M}$ es la aplicación*

$$\begin{aligned} \nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp &\longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X^\perp Y = \pi_N(\overline{\nabla}_X Y) \end{aligned}$$

$\nabla_X^\perp Y$ se lee denomina derivada covariante normal de Y respecto a X .

Las siguientes propiedades son inmediatas:

1. ∇^\perp es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal en el primer argumento y \mathbb{R} -lineal en el segundo.
2. $\nabla_X^\perp(fY) = f\nabla_X^\perp Y + (Xf)Y$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.
3. $X\overline{g}(Y, Z) = \overline{g}(\nabla_X^\perp Y, Z) + \overline{g}(Y, \nabla_X^\perp Z)$, $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.

Definición 2.6.2 *Sea \mathcal{B} la segunda forma fundamental de $M \hookrightarrow \overline{M}$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos la derivada covariante, denotada por $\widetilde{\nabla}_X \mathcal{B}$, por*

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \mathcal{B}\right)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\mathcal{B}(Y, Z)) - \mathcal{B}(\nabla_X Y, Z) - \mathcal{B}(Y, \nabla_X Z) \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposición 2.6.1 *La aplicación $\widetilde{\nabla}_X \mathcal{B}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal.* \square

Nota 2.6.1 Esta es la derivada covariante de \mathcal{B} con respecto a la conexión en $T(\mathbf{M}) + T(\mathbf{M})^\perp$, obtenida combinando ∇_X en $T(\mathbf{M})$ y ∇_X^\perp en $T(\mathbf{M})^\perp$.

La ecuación de Gauss describe $\pi_T(\overline{R}(X, Y)Z)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, en términos de la segunda forma fundamental \mathcal{B} ; la siguiente proposición da un resultado análogo para $\pi_N(\overline{R}(X, Y)Z)$ en función de $\tilde{\nabla}\mathcal{B}$.

Proposición 2.6.2 Sea \mathbf{M} una subvariedad semi-riemanniana de $\overline{\mathbf{M}}$. Si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, entonces se tiene

$$\pi_N(\overline{R}(X, Y)Z) = \left(\tilde{\nabla}_X \mathcal{B}\right)(Y, Z) - \left(\tilde{\nabla}_Y \mathcal{B}\right)(X, Z).$$

A esta relación se le denomina ecuación de Codazzi

Demostración.- Supongamos, para facilitar los cálculos, que elegimos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ tales que $[X, Y] = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \pi_N(\overline{R}(X, Y)Z) &= \pi_N(\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z) - \pi_N(\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z) = \\ &= \pi_N(\overline{\nabla}_X \nabla_Y Z) + \pi_N(\overline{\nabla}_X \mathcal{B}(Y, Z)) - \pi_N(\overline{\nabla}_Y \nabla_X Z) - \pi_N(\overline{\nabla}_Y \mathcal{B}(X, Z)) = \\ &= \mathcal{B}(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X^\perp \mathcal{B}(Y, Z) - \mathcal{B}(Y, \nabla_X Z) - \nabla_Y^\perp \mathcal{B}(X, Z) = \\ &= \nabla_X^\perp \mathcal{B}(Y, Z) - \mathcal{B}(Y, \nabla_X Z) - \mathcal{B}(\nabla_X Y, Z) - \left(\nabla_Y^\perp \mathcal{B}(X, Z) - \mathcal{B}(X, \nabla_Y Z) - \mathcal{B}(\nabla_Y X, Z)\right) = \\ &= (\tilde{\nabla}_X \mathcal{B})(Y, Z) - (\tilde{\nabla}_Y \mathcal{B})(X, Z). \end{aligned} \quad \square$$

Definición 2.6.3 Un campo de vectores normal $Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$ se dice que es paralelo respecto a la conexión normal si $\nabla_X^\perp Z = 0$, $\forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$.

Corolario 2.6.2.1 Si $\overline{\mathbf{M}}$ tiene curvatura constante

1. La ecuación de Codazzi de $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ se expresa por

$$\left(\tilde{\nabla}_X \mathcal{B}\right)(Y, Z) = \left(\tilde{\nabla}_Y \mathcal{B}\right)(X, Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

2. Si \mathbf{M} es una hipersuperficie de $\overline{\mathbf{M}}$ con operador forma \mathcal{S} , entonces

$$(\nabla_X \mathcal{S})(Y) = (\nabla_Y \mathcal{S})(X), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

Demostración.- 1) Al ser $\overline{\mathbf{M}}$ de curvatura constante (Proposición 1.10.3)

$$\overline{R}(X, Y)Z = c(\overline{g}(Y, Z)X - \overline{g}(X, Z)Y),$$

luego $\overline{R}(X, Y)Z$ es tangente a \mathbf{M} .

2) Supongamos que \mathcal{S} deriva del campo de vectores unitario \mathbf{U} .

\mathbf{U} es paralelo respecto a la conexión normal ∇^\perp . En efecto:

$$\overline{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = cte. \Rightarrow g(\overline{\nabla}_X \mathbf{U}, \mathbf{U}) = 0 \Rightarrow \nabla_X^\perp \mathbf{U} = \pi_N(\overline{\nabla}_X \mathbf{U}) = 0.$$

Para obtener la fórmula 2) procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} g((\nabla_X \mathcal{S})Y, Z) &= g(\nabla_X (\mathcal{S}Y), Z) - g(\mathcal{S}(\nabla_X Y), Z) = \\ &= -g(\mathcal{S}Y, \nabla_X Z) + Xg(\mathcal{S}Y, Z) - g(\mathcal{S}(\nabla_X Y), Z) = \\ &= -\overline{g}(\mathcal{B}(Y, \nabla_X Z), \mathbf{U}) + X\overline{g}(\mathcal{B}(Y, Z), \mathbf{U}) - \overline{g}(\mathcal{B}(\nabla_X Y, Z), \mathbf{U}) = \\ &= \overline{g}(\overline{\nabla}_X (\mathcal{B}(Y, Z)), \mathbf{U}) + \overline{g}(\mathcal{B}(Y, Z), \overline{\nabla}_X \mathbf{U}) - \overline{g}(\mathcal{B}(Y, \nabla_X Z), \mathbf{U}) - \overline{g}(\mathcal{B}(\nabla_X Y, Z), \mathbf{U}) = \\ &= \overline{g}(\nabla_X^\perp (\mathcal{B}(Y, Z)), \mathbf{U}) - \overline{g}(\mathcal{B}(Y, \nabla_X Z), \mathbf{U}) - \overline{g}(\mathcal{B}(\nabla_X Y, Z), \mathbf{U}) = \\ &= \overline{g}\left((\tilde{\nabla}_X \mathcal{B})(Y, Z), \mathbf{U}\right) \stackrel{1}{=} \overline{g}\left((\tilde{\nabla}_Y \mathcal{B})(X, Z), \mathbf{U}\right) = g((\nabla_Y \mathcal{S})X, Z) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\nabla_X \mathcal{S})Y &= (\nabla_Y \mathcal{S})X. \end{aligned} \quad \square$$

Nota 2.6.2 La expresión de la ecuación de Codazzi 2. de una hipersuperficie, puede ponerse también como sigue:

$$\nabla_X \mathcal{S}(Y) - \nabla_Y \mathcal{S}(X) = \mathcal{S}([X, Y]).$$

2.7 Hipersuperficie totalmente umbilicales

El propósito de este párrafo es encontrar todas las hipersuperficies totalmente umbilicales del espacio semi-euclídeo \mathbb{R}_ν^n . Ya hemos visto (página 39) que toda hipersuperficie totalmente geodésica conexa de \mathbb{R}_ν^n es un conjunto abierto de un hiperplano no degenerado. Por lo que queda por determinar las hipersuperficies totalmente umbilicales que no son totalmente geodésicas. Esta clase incluye de hecho a todas las hipercuádricas.

La siguiente proposición consecuencia inmediata de la ecuación de Codazzi, es esencial para determinar tales hipersuperficies.

Proposición 2.7.1 Sea $M \hookrightarrow \bar{M}$ una hipersuperficie semi-riemanniana conexa de signatura ε y de dimensión $n \geq 2$. Si M es totalmente umbilical y \bar{M} tiene curvatura constante \bar{c} , entonces la curvatura normal k es constante (salvo signo) y M tiene curvatura constante $\bar{c} + \varepsilon k^2$.

Demostración.- Utilizando la ecuación de Gauss

$$K(u, v) = \bar{K}(u, v) + \varepsilon \frac{g(\mathcal{S}(u), u)g(\mathcal{S}(v), v) - g(\mathcal{S}(u), v)^2}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}, \quad \varepsilon = \bar{g}(\mathbf{U}, \mathbf{U}).$$

Si $\{u, v\}$ es una base ortonormal, queda

$$c = \bar{c} + \varepsilon(g(ku, u)g(kv, v) - (g(ku, v))^2) = \bar{c} + \varepsilon k^2.$$

Demostremos ahora que k es constante. Por la conexidad sólo basta probar que $u(k) = 0$ para todo vector $u \in T_x(M)$.

Elijamos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tales que $X_x = u$ e Y_x sea independiente de u . Se tiene:

$$(\nabla_X \mathcal{S})(Y) = \nabla_X \mathcal{S}(Y) - \mathcal{S}(\nabla_X Y) = \nabla_X(kY) - k(\nabla_X Y) = (Xk)Y; \text{ y, análogamente, } (\nabla_Y \mathcal{S})(X) = (Yk)X.$$

Por el Corolario 2.6.2.1, resulta $(Xk)Y = (Yk)X \implies Xk = 0 \implies v(k) = 0$. \square

Ejemplo 2.7.1

- Una hipersuperficie totalmente umbilical llana en \mathbb{R}_ν^n es totalmente geodésica.
- Una hipercuádrica centrada en el origen de \mathbb{R}_ν^n , dada por $\langle P, P \rangle = c \neq 0$, es transformada por traslación en $P \mapsto P - P_0$ en una hipercuádrica centrada en P_0 , dada por $\langle P - P_0, P - P_0 \rangle = c$. Evidentemente la traslación es un par isométrico, entonces, en particular, todas las hipercuádricas son totalmente umbilicales.

Trivialmente, toda hipersuperficie semi-riemanniana de una variedad bidimensional es totalmente umbilical, en consecuencia, sólo trataremos el caso de \mathbb{R}_ν^n , para $n \geq 3$.

Proposición 2.7.2 Si M es una hipersuperficie semi-riemanniana conexa de \mathbb{R}_ν^n ($n \geq 3$), que es totalmente umbilical pero no totalmente geodésica, entonces M es un conjunto abierto en una hipercuádrica. Por tanto, si M además es completa, M es una componente conexa de una hipercuádrica.

Demostración.- Si \mathbf{U} es una normal unitaria definida localmente sobre M , entonces, al ser totalmente umbilical, $\mathcal{S} = kI$, donde \mathcal{S} es el operador forma derivado de \mathbf{U} , y k es la función curvatura normal, que es constante por la proposición anterior.

El campo de vectores normal $\frac{1}{k}\mathbf{U} = \frac{1}{-k}(-\mathbf{U})$ está definido en todo M .

Identificando el espacio tangente de \mathbb{R}_ν^n con \mathbb{R}_ν^n por el isomorfismo canónico, definimos la aplicación

$$\phi: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) = x + \frac{1}{k}\mathbf{U}_x.$$

Demostremos que ϕ es una aplicación constante. Como \mathbb{R}_ν^n es conexa, es suficiente demostrar que cada aplicación diferencial de ϕ es nula.

Con la identificación de arriba, afirmamos que para todo $v \in T_x(\mathbb{M})$

$$\phi_*(v) = v + \frac{1}{k}D_v\mathbf{U}.$$

Ahora bien, $D_v\mathbf{U} = -\mathfrak{S}(v) = -kv$, entonces, $\phi_*(v) = v + \frac{1}{k}(-kv) = 0$.

Así, ϕ es una aplicación constante: $\phi(x) = x_0$, $\forall x \in \mathbb{M}$.

Luego, para $x \in \mathbb{M}$, $x - x_0 = -\frac{1}{k}\mathbf{U}_x$, entonces $\langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \frac{1}{k^2}$.

Por tanto, \mathbb{M} está contenida en una hipercuádriga Q . Ya que \mathbb{M} es conexa, está contenida en una componente conexa C de Q . Al tener \mathbb{M} y C la misma dimensión, \mathbb{M} es una subvariedad abierta de C .

Si \mathbb{M} es completa, entonces $\mathbb{M} = C$. □

Resumiendo tenemos:

Proposición 2.7.3 *Las hipersuperficies totalmente umbilicales, conexas y completas de \mathbb{R}_ν^n ($n \geq 3$) son los hiperplanos no degenerados de \mathbb{R}_ν^n y las componentes conexas de las hipercuádrigas.* □

Basándonos en esta información extrínseca, caracterizaremos intrínsecamente las hipercuádrigas semi-riemannianas de \mathbb{R}_ν^n que tienen curvatura constante no nula.

Proposición 2.7.4 *Si \mathbb{M} es una hipersuperficie semi-riemanniana conexa de \mathbb{R}_ν^n ($n \geq 4$) con curvatura constante ($c \neq 0$), entonces \mathbb{M} es un conjunto abierto de una hipercuádriga. Si además \mathbb{M} es completa, se trata de una componente conexa de una hipercuádriga.*

Demostración.- Se sigue inmediatamente de la proposición anterior y del siguiente resultado algebraico: □

Proposición 2.7.5 *Sea \mathbb{M} una hipersuperficie semi-riemanniana de $\overline{\mathbb{M}}$. Si \mathbb{M} y $\overline{\mathbb{M}}$ tienen curvatura constante $c \neq \bar{c}$ y $\dim \mathbb{M} \geq 3$, entonces \mathbb{M} es totalmente umbilical.*

Demostración.- Sea $b = \varepsilon(c - \bar{c}) \neq 0$, donde ε es la signatura de \mathbb{M} . Por la ecuación de Gauss:

$$(1) \quad g(\mathfrak{S}(u), u)g(\mathfrak{S}(v), v) - (g(\mathfrak{S}(u), v))^2 = b(g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2),$$

siempre que $\{u, v\}$ genere un plano no degenerado tangente a \mathbb{M} .

Se puede demostrar que esta relación (1) es válida para cualquier par de vectores independientes u, v .

En cada punto $x \in \mathbb{M}$ el operador forma \mathfrak{S} sobre $T_x(\mathbb{M})$ es inversible. En efecto, si $u \neq 0$, existe un vector $v \in T_x(\mathbb{M})$, tal que

$$g(u, u)g(v, v) - (g(u, v))^2 \neq 0.$$

Entonces por (1), $\mathfrak{S}(u) \neq 0$. Con lo que \mathfrak{S} es inyectiva; luego biyectiva.

$$(2) \quad g(\mathfrak{S}(u), w)g(\mathfrak{S}(v), t) - g(\mathfrak{S}(u), t)g(\mathfrak{S}(v), w) = b(g(u, w)g(v, t) - g(u, t)g(v, w)).$$

Para probar esto consideremos las aplicaciones de $T_x(\mathbb{M})^4$ en \mathbb{R} , F_1 y F_2 , definidas por el primer y segundo miembro, respectivamente, de (2); esto es:

$$F_1(u, v, w, t) = g(\mathfrak{S}(u), w)g(\mathfrak{S}(v), t) - g(\mathfrak{S}(u), t)g(\mathfrak{S}(v), w)$$

$$F_2(u, v, w, t) = g(u, w)g(v, t) - g(u, t)g(v, w).$$

Ambas verifican las tres propiedades de la Proposición 1.10.2 de la página 24, y además

$$F_1(u, v, u, v) = g(\mathfrak{S}(u), u)g(\mathfrak{S}(v), v) - g(\mathfrak{S}(u), v)g(\mathfrak{S}(v), u)$$

$$F_2(u, v, w, t) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)g(v, u).$$

Luego usando (1) y la proposición citada, resulta $F_1 = bF_2$.

Tenemos que para $u \neq 0$, $\mathcal{S}(u) \neq 0$ y por ser $\dim T_x(\mathbf{M}) \geq 3$, existe un vector $t \neq 0$ ortogonal a u y a $\mathcal{S}(u)$, y por tanto por (2)

$$g(\mathcal{S}(u), w)g(\mathcal{S}(v), t) = bg(u, w)g(v, t).$$

Puesto que \mathcal{S} es inversible la imagen de \mathcal{S} no está en $\{\widetilde{t}\}^\perp$, entonces existe $v \in T_x(\mathbf{M})$ tal que $g(\mathcal{S}(v), t) \neq 0$. Así, para alguna constante, se tiene

$$g(\mathcal{S}(u), w) = kg(u, w) \quad \forall u, w \in T_x(\mathbf{M}).$$

Por tanto \mathcal{S} es la multiplicación por un escalar; esto es, \mathbf{M} es totalmente umbilical (Proposición 2.5.4). \square

Nota 2.7.1 En la proposición anterior si $c = \bar{c}$ el operador forma de la variedad \mathbf{M} no siempre se puede especificar.

2.8 La conexión normal

Para subvariedades semi-riemannianas de codimensión mayor que uno la conexión normal tiene mayor importancia. Del mismo modo que el tensor forma de $\mathbf{M} \hookrightarrow \overline{\mathbf{M}}$ mide la diferencia entre $\overline{\nabla}$ y ∇ , también mide la diferencia entre ∇^\perp y $\overline{\nabla}$, si bien con diferente formulación, como sigue:

$$\begin{aligned} A : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp &\longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \\ (X, Z) &\longmapsto A_Z(X) = \pi_T(\overline{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

Se tiene así la fórmula de Weingarten:

$$\boxed{\overline{\nabla}_X Z = A_Z(X) + \nabla_X^\perp Z \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}), \forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp.} \quad (2.8.1)$$

Proposición 2.8.1 1) La aplicación $A : \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, $(X, Z) \mapsto A_Z(X)$, es $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -bilineal; consecuentemente, en cada punto $x \in \mathbf{M}$, A determina una aplicación \mathbb{R} -bilineal, $A_x : T_x(\mathbf{M}) \times T_x(\mathbf{M})^\perp \rightarrow T_x(\mathbf{M})$.

$$2) g(A_Z(X), Y) = -g(\mathcal{B}(X, Y), Z), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}), \forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp.$$

Así, fijado $Z \in T_x(\mathbf{M})^\perp$, $A_Z : T_x(\mathbf{M}) \rightarrow T_x(\mathbf{M})$ es un operador lineal autoadjunto sobre $T_x(\mathbf{M})$:

$$g(A_Z(X), Y) = g(X, A_Z(Y)), \quad X, Y \in T_x(\mathbf{M}).$$

Demostración.- 1) La bilinealidad respecto a la suma es obvia.

Para todo $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$, tenemos,

$$\overline{\nabla}_X fZ = (Xf)Z + f\overline{\nabla}_X Z = (Xf)Z + fA_Z(X) + f\nabla_X^\perp Z.$$

Comparando con $\overline{\nabla}_X fZ = A_{fZ}(X) + \nabla_X^\perp(fZ)$, obtenemos, para las componentes tangentes:

$$A_{fZ}(X) = fA_Z(X).$$

Procediendo de la misma forma para $\overline{\nabla}_f X Z$, obtenemos

$$A_Z(fX) = fA_Z(X).$$

Luego A es $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -bilineal.

2) Para todo $Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ y $Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$, tenemos $\overline{g}(Y, Z) = 0$. Diferenciando covariantemente (con respecto a la conexión de Levi-Civita $\overline{\nabla}$), tenemos:

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) = \overline{g}(Y, \overline{\nabla}_X Z),$$

y utilizando las fórmulas de Gauss y Weingarten, se sigue

$$\overline{g}(\nabla_X Y, Z) + \overline{g}(\mathcal{B}(X, Y), Z) = -g(Y, A_Z(X)) - \overline{g}(Y, \nabla_X^\perp Z),$$

ya que $g(\nabla_X Y, Z) = g(Y, \nabla_X^\perp Z) = 0$, obtenemos:

$$g(\nabla_Z(X), Y) = -\overline{g}(\mathcal{B}(X, Y), Z).$$

Finalmente, en virtud de la simetría de \mathcal{B} , resulta que A_Z es autoadjunto. \square

Nota 2.8.1 En el caso de las hipersuperficies, si Z es un campo de vectores normal unitario y \mathfrak{S} es el operador forma derivado de Z , se tiene que

$$A_Z(X) = -\mathfrak{S}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

La fórmula de Weingarten toma ahora la forma simple

$$\overline{\nabla}_X Z = -\mathfrak{S}(X).$$

Pues al ser $\overline{g}(\overline{\nabla}_X Z, Z) = 0$, se sigue que $\overline{g}(\nabla_X^\perp Z, Z) = 0$, y por consiguiente $\nabla_X^\perp Z = 0$.

La conexión normal ∇^\perp se adapta como sigue a campos de vectores normales sobre curvas en $\mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{M}}$.

Si Y es un campo de vectores sobre α (curva en \mathbf{M}) siempre normal a \mathbf{M} , entonces su derivada covariante normal inducida $\frac{\nabla^\perp Y}{dt}$ está definida por la componente normal de su derivada covariante inducida en $\overline{\mathbf{M}}$: $\frac{\overline{\nabla} Y}{dt}$.

La Proposición 1.6.1 implica propiedades análogas para $\frac{\nabla^\perp Y}{dt}$:

Proposición 2.8.2 Sea $\alpha: I \rightarrow \mathbf{M} \subset \overline{\mathbf{M}}$ una curva en una subvariedad semi-riemanniana \mathbf{M} de $\overline{\mathbf{M}}$, entonces la derivada covariante normal inducida tiene las siguientes propiedades:

$$1. \frac{\nabla^\perp (\lambda Y_1 + \nu Y_2)}{dt} = \lambda \frac{\nabla^\perp Y_1}{dt} + \nu \frac{\nabla^\perp Y_2}{dt} \quad (\lambda, \nu \in \mathbb{R})$$

$$2. \frac{\nabla^\perp (hY)}{dt} = \frac{dh}{dt} Y + h \frac{\nabla^\perp Y}{dt} \quad (h \in \mathfrak{F}(I))$$

$$3. \frac{\nabla^\perp Z_\alpha}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}^\perp Z \quad (Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp, Z_\alpha \text{ es la restricción de } Z \text{ a } \alpha)$$

$$4. \frac{d}{dt} \overline{g}(Y_1, Y_2) = \overline{g}\left(\frac{\nabla^\perp Y_1}{dt}, Y_2\right) + \overline{g}\left(Y_1, \frac{\nabla^\perp Y_2}{dt}\right). \quad \circledast$$

Si Y un campo de vectores siempre normal a M , sobre una curva α en $M \subset \overline{M}$, entonces la fórmula de Weingarten tiene la siguiente expresión:

$$\overline{\nabla} Y = A_Y(\alpha') + \frac{\nabla^\perp Y}{dt}.$$

Definición 2.8.1 Si $\frac{\nabla^\perp Y}{dt} = 0$, se dice Y es paralelo respecto a la conexión normal.

Proposición 2.8.3 Sea $\alpha: I \rightarrow M$ una curva en $M \subset \overline{M}$. Si $u \in T_{\alpha(a)}(M)^\perp$ ($a \in I$), existe un único campo de vectores Y sobre α paralelo con respecto al conexión normal, tal que $Y_{\alpha(a)} = u$.

Demostración.- Usando un sistema de coordenadas adaptadas y la proyección normal es fácil encontrar, sobre un subintervalo de I , campos de vectores normales E_1, \dots, E_k , que en cada punto determinan una base del espacio normal. Solapando estos campos se pueden definir sobre toda la curva.

Pongamos $Y = \sum_{i=1}^k Y^i E_i$, $u = \sum_{i=1}^k c^i E_i$ y $\frac{\nabla^\perp E_i}{dt} = \sum_{j=1}^k h_j^i E_j$ ($1 \leq i \leq k$), entonces

$$\frac{\nabla^\perp Y}{dt} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{dY^i}{dt} + \sum_{j=1}^k h_j^i Y^j \right) E_i.$$

Sean Y^1, \dots, Y^k las únicas soluciones, con las condiciones iniciales $Y^i(a) = c^i$, del sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\frac{dY^i}{dt} + \sum_{j=1}^k h_j^i Y^j = 0 \quad (1 \leq i \leq k).$$

Estas soluciones están definidas en todo el intervalo I , entonces $Y = \sum_{i=1}^k Y^i E_i$ es el campo de vectores paralelo respecto al conexión normal buscado. \square

Definición 2.8.2 Al campo Y obtenido en la proposición anterior se le denomina trasladado paralelo normal de u .

A la aplicación $P_\alpha: T_{\alpha(a)}(M)^\perp \rightarrow T_{\alpha(b)}(M)^\perp$ definida por $u \mapsto Y(b)$, se le denomina transporte paralelo normal.

Proposición 2.8.4 El transporte paralelo normal es una isometría lineal.

Demostración.- Similar a la Proposición 1.6.3 (página 16). \square

Proposición 2.8.5 La conexión normal se conserva por un par isométrico.

Demostración.- Similar a la Proposición 2.2.5, página 37. \square

En consecuencia, ∇^\perp y las nociones que de ella se derivan pertenecen a la geometría extrínseca de $M \subset \overline{M}$.

Definición 2.8.3 Dos objetos en una variedad semi-riemanniana son congruentes si existe una isometría de \overline{M} transformando uno en otro.

En particular, de la definición dada en la página 37, tenemos:

Definición 2.8.4 Dos subvariedades M_1 y M_2 de \overline{M} son congruentes si existe una isometría $F: \overline{M} \rightarrow \overline{M}$ tal que $F|_{M_1}$ es una isometría de M_1 sobre M_2 . Se dice entonces que M_1 y M_2 tienen la misma geometría intrínseca y extrínseca.

Tratamos ahora de establecer el siguiente resultado: “Tomando $\bar{M} = \mathbb{R}_\nu^n$. Subvariedades isométricas son congruentes si y sólo si ellas tienen el mismo tensor forma”. Más precisamente:

Teorema 2.8.1 *Sea $F: M_1 \rightarrow M_2$ una isometría entre subvariedades semi-riemannianas conexas de \mathbb{R}_ν^n . Existe una isometría $\tilde{F}: \mathbb{R}_\nu^n \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ tal que $\tilde{F}|_{M_1} = F$ si y sólo si en un punto $x_0 \in M_1$ existe una isometría lineal $h_0: T_{x_0}(M_1)^\perp \rightarrow T_{F(x_0)}(M_2)^\perp$, con la siguiente propiedad:*

Si $\alpha: I = [0, 1] \rightarrow M_1$ es una curva en M_1 , $\alpha(0) = x_0$, entonces para todo $t \in I$ la isometría lineal

$$h_{\alpha(t)} = P_{F(\alpha(t))} \circ h_0 \circ P_{\alpha(t)}^{-1}: T_{\alpha(t)}(M_1)^\perp \rightarrow T_{F(\alpha(t))}(M_2)^\perp$$

(P transporte paralelo normal) conserva los tensores forma esto es

$$h_{\alpha(t)}(\mathcal{B}_1(u, v)) = \mathcal{B}_2(F_*(u), F_*(v)), \quad \forall u, v \in T_{\alpha(t)}(M_1).$$

Demostración.- La condición sobre los tensores forma es necesaria ya que hemos visto que el transporte paralelo normal y el tensor forma pertenecen a la geometría extrínseca.

Para probar la suficiencia, sea α una curva verificando las condiciones del enunciado.

a) Si Z es un campo de vectores sobre α normal a M_1 , entonces $(h_\alpha Z)(t) = h_{\alpha(t)}(Z(t))$ define un campo de vectores sobre $F \circ \alpha$, normal a M_2 .

La definición de $h_{\alpha(t)}$ implica que si Z es paralelo respecto a la conexión normal también lo es $h_{\alpha(t)}Z$. Es más, expresando un arbitrario $Z \in \mathfrak{X}(M_1)^\perp$ en términos de un campo de referencias ortonormal sobre α formada por campos de vectores paralelos respecto a la conexión normal ∇_1^\perp , se sigue que

$$\frac{\nabla_2^\perp (h_\alpha Z)}{dt} = h_\alpha \left(\frac{\nabla_1^\perp Z}{dt} \right).$$

b) Ya que $h_{\alpha(t)}$ conserva \mathcal{B} , también conserva A ; esto es,

$$F_*(A_1 Z(X)) = A_2 h_\alpha(Z)(F_*(X)),$$

donde X y Z son campos de vectores sobre α , tangente y normal, respectivamente, a M_1 .

En efecto, sea $Y \in \mathfrak{X}(M_1)$, entonces

$$g_2(A_2 h_\alpha Z(F_*(X)), F_*(Y)) = -\langle \mathcal{B}_2(F_*(X), F_*(Y)), h_\alpha Z \rangle = -\langle h_\alpha(\mathcal{B}_1(X, Y)), h_\alpha Z \rangle$$

$$g_2(F_*(A_1 Z(X)), F_*(Y)) = g_1(A_1 Z(X), Y) = -\langle \mathcal{B}_1(X, Y), Z \rangle.$$

c) Para cada t , $F_* \times h_{\alpha(t)}: T_{\alpha(t)}(\mathbb{R}_\nu^n) \rightarrow T_{F(\alpha(t))}(\mathbb{R}_\nu^n)$ es una isometría lineal.

Si X es un campo de vectores sobre α paralelo respecto a la conexión de \mathbb{R}_ν^n , también lo es $(F_* \times h_{\alpha(t)})(X)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{DX}{dt} = \frac{D(\pi_T X)}{dt} + \frac{D(\pi_N X)}{dt} = \frac{\nabla_1(\pi_T X)}{dt} + \mathcal{B}_1(\alpha', \pi_T X) + A_{1\pi_N X}(\alpha') + \frac{\nabla_1^\perp(\pi_N X)}{dt} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\nabla_1(\pi_T X)}{dt} + A_{1\pi_N X}(\alpha') = 0 \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_1(\alpha', \pi_T X) + \frac{\nabla_1^\perp(\pi_N X)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\frac{D((F_* \times h_\alpha)X)}{dt} = \frac{DF_*(\pi_T X)}{dt} + \frac{Dh_\alpha(\pi_N X)}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nabla_2 F_*(\pi_T X)}{dt} + \mathcal{B}_2(F_*(\alpha'), F_*(\pi_T X)) + A_2 h_\alpha(\pi_N X)(F_*(\alpha')) + \frac{\nabla_2^\perp(h_\alpha(\pi_N X))}{dt} = \\
&= F_* \left(\frac{\nabla_1 \pi_T X}{dt} \right) + h_\alpha(\mathcal{B}_1(\alpha', \pi_T X)) + F_*(A_1 \pi_N X(\alpha')) + h_\alpha \left(\frac{\nabla_1^\perp(\pi_N X)}{dt} \right) = \\
&= F_* \left(\frac{\nabla_1 \pi_T X}{dt} + A_1 \pi_N X(\alpha') \right) + h_\alpha \left(\mathcal{B}_1(\alpha', \pi_T X) + \frac{\nabla_1^\perp \pi_N X}{dt} \right).
\end{aligned}$$

Las expresiones anteriores deducidas de $\frac{DX}{dt} = 0$, demuestran que esta expresión es nula, esto es $(F_* \times h_\alpha)(X)$ es paralelo.

d) Si las curvas $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}_\nu^n$ tienen el mismo punto y vector inicial ($\alpha(0) = \beta(0), \alpha'(0) = \beta'(0)$) y, para todo t , $\alpha''(t)$ es paralelo a $\beta''(t)$, entonces $\alpha = \beta$.

En efecto, el paralelismo significa que las coordenadas naturales de α y β satisfacen a

$$\frac{d^2(r^i \circ \alpha)}{dt^2} = \frac{d^2(r^i \circ \beta)}{dt^2}.$$

Entonces, $r^i \circ \alpha - r^i \circ \beta = a^i t + b^i$ ($1 \leq i \leq n$).

Pero las condiciones iniciales implican que $a^i = b^i = 0$ ($1 \leq i \leq n$).

e) Ya que las traslaciones en \mathbb{R}_ν^n conservan la geometría intrínseca de las subvariedades podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el punto $x_0 \in \mathbf{M}_1$ y su imagen $F(x_0) \in \mathbf{M}_2$ estén ambos en el origen de \mathbb{R}_ν^n . Es suficiente trasladar cada variedad con los consiguientes cambios obvios en F y h_0 .

f) Sea \tilde{F} la isometría lineal de \mathbb{R}_ν^n canónicamente correspondiente a $(F_*)_0 \times h_0: T_0(\mathbb{R}_\nu^n) \rightarrow T_0(\mathbb{R}_\nu^n)$, así \tilde{F} es una isometría de \mathbb{R}_ν^n y $(\tilde{F}_*)_0 = (F_*)_0 \times h_0$.

Demostremos que $\tilde{F}|_{\mathbf{M}_1} = F$.

En virtud de la conexidad, si $x \in \mathbf{M}_1$, sea α una curva en \mathbf{M}_1 que une 0 con x , es suficiente probar que $F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha$.

Por e) $F(0) = 0 = \tilde{F}(0)$, y ya que $(\tilde{F}_*)_0|_{T_0(\mathbf{M}_1)} = (F_*)_0$; se sigue que las curvas $F \circ \alpha$ y $\tilde{F} \circ \alpha$ tienen el mismo punto inicial y el mismo vector tangente inicial. Además

$$\frac{DF_*(\alpha')}{dt} = \frac{\nabla_2 F_*(\alpha')}{dt} + \mathcal{B}_2(F_*(\alpha'), F_*(\alpha')) = F_* \left(\frac{\nabla_1 \alpha'}{dt} \right) + h_\alpha(\mathcal{B}_1(\alpha', \alpha')) = (F_* \times h_\alpha) \left(\frac{D\alpha'}{dt} \right).$$

Sea $\xi_{(t)} \in T_0(\mathbb{R}_\nu^n)$ paralelo a $\frac{D\alpha'}{dt}(t)$, entonces por c)

$$((F_*)_{\alpha(t)} \times h_{\alpha(t)}) \left(\frac{D\alpha'}{dt}(t) \right) \quad \text{es paralelo a} \quad ((F_*)_0 \times h_0)(\xi_{(t)}).$$

Pero $((F_*)_0 \times h_0)(\xi_{(t)}) = (\tilde{F}_*)_0(\xi_{(t)})$.

Ya que \tilde{F} es isometría lineal, $(\tilde{F}_*)_0(\xi_{(t)})$ es paralelo a $(\tilde{F}_*)_{\alpha(t)} \left(\frac{D\alpha'}{dt}(t) \right)$.

Pero

$$(\tilde{F}_*)_{\alpha(t)} \left(\frac{D\alpha'}{dt}(t) \right) = \frac{D(\tilde{F}_* \alpha')}{dt}(t).$$

Consecuentemente, para todo t

$$\frac{D(F \circ \alpha)'}{dt}(t) \quad \text{es paralelo a} \quad \frac{D(\tilde{F} \circ \alpha)'}{dt}(t).$$

Por d) concluimos que $F \circ \alpha = \tilde{F} \circ \alpha$. \(\square\)

TEMA III

Espacios simétricos

Una condición natural impuesta a una variedad riemanniana (semi-riemanniana) es que su tensor curvatura R sea paralelo, esto es, que se anule su diferencial covariante $\nabla R = 0$. Tal variedad se dice que es localmente simétrica. En particular, las variedades de curvatura constante son localmente simétricas.

Un espacio simétrico es aquel en el que a cada punto le está asociado una isometría cuya diferencial en el punto es la opuesta de identidad. Bajo restricciones topológicas todo espacio localmente simétrico es simétrico.

3.1 Campos de Jacobi

Si γ es una geodésica, un campo de vectores Y sobre γ que satisface a la ecuación diferencial de Jacobi

$$\frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\nabla Y}{dt} \right) + R(Y, \gamma') \gamma' = 0$$

se denomina campo de vectores de Jacobi.

Damos ahora el concepto de variación geodésica, lo cual nos proporcionará un ejemplo de campo de Jacobi. Una variación de un segmento de curva de $\tau: [a, b] \rightarrow M$ es una aplicación biparamétrica

$$\phi: [a, b] \times]-\delta, \delta[\rightarrow M, \quad (t, s) \mapsto \phi(t, s),$$

tal que $\phi(t, 0) = \tau(t)$, $a \leq t \leq b$.

Las curvas t -paramétricas de una variación se denominan longitudinales, y las s -paramétricas curvas transversales. A τ se le denomina curva base de la variación.

El campo de vectores V sobre τ dado por $V(t) = \phi'_s(t, 0)$ se denomina campo de vectores variación (cada $V(t)$ es el vector tangente en $s = 0$ a la curva transversal $s \mapsto \phi(t, s)$).

Por variación geodésica se entiende una variación en la que todas las curvas longitudinales son geodésicas.

Proposición 3.1.1 *El campo de vectores variación de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

Demostración.- Sean γ una geodésica, ϕ una variación geodésica de γ y $V = \phi'_s$ el campo de vectores variación. Ya que las curvas longitudinales son geodésicas resulta que $\frac{\nabla \phi'_t}{\partial t} = 0$, luego por el Ejercicio 87

$$\begin{aligned} \frac{\nabla V}{dt} &= \frac{\nabla \phi'_s}{\partial t} = \frac{\nabla \phi'_t}{\partial s}, \\ \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\nabla V}{dt} \right) &= \frac{\nabla}{\partial t} \left(\frac{\nabla \phi'_t}{\partial s} \right) = \frac{\nabla}{\partial s} \left(\frac{\nabla \phi'_t}{\partial t} \right) - R(\phi'_s, \phi'_t) \phi'_t, \\ \frac{\nabla}{dt} \left(\frac{\nabla V}{dt} \right) + R(V, \gamma') \gamma' &= 0. \end{aligned}$$

Así V es un campo de vectores de Jacobi. \(\square\)

Proposición 3.1.2 Sean γ una geodésica con $\gamma(0) = x$ y $u, v \in T_x(\mathbf{M})$. Entonces existe un único campo de vectores de Jacobi Y sobre γ tal que

$$Y(0) = u \quad \frac{\nabla Y}{dt}(0) = v.$$

Demostración.- Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ un campo de referencias ortonormal paralelo sobre γ , y escribimos $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i$, $u = \sum_{i=1}^n u^i E_i(0)$, $v = \sum_{i=1}^n v^i E_i(0)$, entonces las condiciones iniciales se expresan por $Y^i(0) = u^i$, $\frac{dY^i}{dt}(0) = v^i$. Además, al ser γ' paralelo: $\gamma' = \sum_{i=1}^n a^i E_i$ ($a^i = \text{cte.}$).

La ecuación de Jacobi es equivalente al sistema lineal de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2 Y^h}{dt^2} + \sum_{i,j,k=1}^n R_{ijk}^h a^i Y^j a^k = 0 \quad (1 \leq h \leq n),$$

donde $R(E_j, E_k)E_i = \sum_{h=1}^n R_{ijk}^h E_h$, ($1 \leq i, j, k \leq n$).

Tal sistema diferencial tiene solución diferenciable que está unívocamente determinada por las condiciones iniciales impuestas. \square

Corolario 3.1.2.1 El conjunto J_γ de todos los campos de Jacobi sobre una geodésica γ es un espacio vectorial de dimensión $2n$.

Demostración.- Es consecuencia de la linealidad de las ecuaciones de Jacobi y de la elección arbitraria de u y v en el espacio n -dimensional $T_x(\mathbf{M})$. \square

La siguiente proposición relaciona la aplicación exponencial con los campos de Jacobi.

Proposición 3.1.3 Sean $x_0 \in \mathbf{M}$ y $v \in T_{x_0}(\mathbf{M})$. Para $w \in T_v(T_{x_0}(\mathbf{M}))$, se tiene

$$(\exp_{x_0})_*(w) = Y(1),$$

donde Y es el único campo de Jacobi sobre la geodésica γ_v tal que $Y(0) = 0$ y $\frac{\nabla Y}{dt}(0) = w$ (para lo cual indentificaremos los espacios vectoriales $T_v(T_{x_0}(\mathbf{M})) \cong T_{x_0}(\mathbf{M})$).

Demostración.- Consideremos la aplicación biparamétrica en $T_{x_0}(\mathbf{M})$

$$\tilde{\phi}: [0, 1] \times \delta - \delta \rightarrow T_{x_0}(\mathbf{M}), \quad \tilde{\phi}(t, s) = t(v + sw).$$

Entonces

$$\phi: [0, 1] \times \delta - \delta \rightarrow \mathbf{M}, \quad \phi(t, s) = \exp_{x_0}(t(v + sw)) = \gamma_{v+sw}(t)$$

es una variación geodésica de $\gamma_v: [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}$.

Así el campo de vectores variación

$$Y(t) = \phi'_s(t, 0) = (\exp_{x_0})_*(\tilde{\phi}'_s(t, 0))$$

es un campo de Jacobi sobre γ_v .

La curva $s \mapsto \phi(0, s)$ es constante en x_0 , entonces $Y(0) = \phi'_s(0, 0) = 0$.

Por el Ejercicio 87:

$$\frac{\nabla Y}{dt}(0) = \frac{\nabla \phi'_s}{dt}(0, 0) = \frac{\nabla \phi'_t}{\partial s}(0, 0).$$

Ahora $s \mapsto \phi'_t(0, s) = v + sw$, es un campo de vectores sobre la curva constante x_0 . Entonces, para cualquiera que sea s , $\frac{\nabla \phi'_t}{\partial s}(0, s) = w$. En particular, $\frac{\nabla Y}{dt}(0) = w$. \square

3.2 Variedades localmente simétricas

Definición 3.2.1 Una variedad semi-riemanniana M se dice que es localmente simétrica si su tensor curvatura es paralelo; esto es, $\nabla R = 0$.

Proposición 3.2.1 Las siguientes condiciones son equivalentes sobre una variedad semi-riemanniana M .

1. M es localmente simétrica.
2. Si X, Y, Z son campos de vectores paralelos sobre una curva τ , entonces el campo de vectores $R(X, Y)Z$ sobre τ también es paralelo.
3. La curvatura seccional es invariante bajo el transporte paralelo; esto es, la curvatura seccional de un plano tangente no degenerado Π permanece constante cuando Π se traslada paralelamente a lo largo de la curva τ .

Demostración.- Por simplicidad supongamos que la curva τ es regular.

1) \Rightarrow 2) Fijado un punto arbitrario en τ (sea $\tau(0)$), existen campos de vectores $V, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ en un entorno de $\tau(0)$ en M , tales que

$$V_{\tau(t)} = \tau'(t), \quad \bar{X}_{\tau(t)} = X(t), \quad \bar{Y}_{\tau(t)} = Y(t), \quad \bar{Z}_{\tau(t)} = Z(t).$$

Ya que $\nabla R = 0$,

$$(\nabla_V R)(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} = \nabla_V(R(\bar{X}, \bar{Y})\bar{Z}) - R(\nabla_V \bar{X}, \bar{Y})\bar{Z} - R(\bar{X}, \nabla_V \bar{Y})\bar{Z} - R(\bar{X}, \bar{Y})\nabla_V \bar{Z} = 0.$$

Ahora bien evaluando en $t = 0$,

$$(\nabla_V \bar{X})_{\tau(0)} = \frac{\nabla \bar{X}_{\tau}}{dt}(0) = \frac{\nabla X}{dt}(0) = 0.$$

Y análogamente para \bar{Y} y \bar{Z} . Entonces

$$\frac{\nabla(R(X, Y)Z)}{dt}(0) = \nabla_{\tau'(0)}(R(X, Y)Z) = 0.$$

2) \Rightarrow 1) Si $u, v_1, v_2, v_3 \in T_x(M)$, sean X, Y, Z campos de vectores paralelos sobre γ_u , obtenidos por transporte paralelo de v_1, v_2, v_3 , respectivamente. Entonces

$$(\nabla_u R)(v_1, v_2)v_3 = \frac{\nabla R(X, Y)Z}{dt}(0) = 0.$$

2) \Rightarrow 3) Sea $\Pi(0)$ un plano tangente no degenerado en $\tau(0)$, X e Y campos de vectores paralelos sobre τ tales que $\{X(0), Y(0)\}$ forman una base de $\Pi(0)$. Así $\{X(t), Y(t)\}$ es una base de $\Pi(t)$, transporte paralelo de $\Pi(0)$ a lo largo de τ .

Entonces, $g(R(X, Y)X, Y)$ y $Q(X, Y) = g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2$ son constantes a lo largo de τ , y, por tanto, la curvatura seccional de $\Pi(t)$ es constante.

3) \Rightarrow 2) Supongamos dada una curva $\tau: I \rightarrow M$, con $\tau(0) = x$. Basta demostrar que si X, Y, Z, W son campos de vectores paralelos sobre τ , entonces $g(R(X, Y)Z, W)$ es constante.

Fijado $t \in I$, definimos la aplicación

$$F: T_x(M)^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad F(X_x, Y_x, Z_x, W_x) = g(R(X, Y)Z, W)(t)$$

donde X, Y, Z, W son campos paralelos sobre τ obtenidos a partir de X_x, Y_x, Z_x, W_x .

Ya que $Q(X, Y)$ es constante, de 3) se deduce

$$\frac{F(X_x, Y_x, X_x, Y_x)}{Q(X_x, Y_x)} = K(X(t), Y(t)) = K(X_x, Y_x),$$

para todo X_x, Y_x generando un plano tangente no degenerado. Es fácil ver que F cumple las propiedades de la Proposición 1.10.2 de la página 24, se sigue entonces que

$$F(X_x, Y_x, Z_x, W_x) = g_x(R(X_x, Y_x)Z_x, W_x).$$

Así $g(R(X, Y)Z, W)$ es independiente de t . \square

Corolario 3.2.1.1 Una variedad semi-riemanniana de curvatura seccional constante es localmente simétrica.

Demostración.- Es obvia utilizando el criterio 3) de la proposición precedente. \square

Nota 3.2.1 El producto semi-riemanniano de variedades localmente simétricas es igualmente localmente simétrico, pero no necesariamente de curvatura constante (aunque los factores lo sean (excluyendo las llanas)).

Consideremos ahora M y \bar{M} variedades semi-riemannianas de la misma dimensión e índice y sea $x_0 \in M, \bar{x}_0 \in \bar{M}$. Nuestro propósito es encontrar las condiciones bajo las cuales una isometría lineal dada de $T_{x_0}(M)$ en $T_{\bar{x}_0}(\bar{M})$ es la aplicación diferencial de una isometría definida sobre algún entorno normal de x_0 .

Definición 3.2.2 Sea $\ell: T_{x_0}(M) \rightarrow T_{\bar{x}_0}(\bar{M})$ una isometría lineal y sea U un entorno de x_0 en M tal que $\exp_{x_0}^{-1}$ está definida sobre el conjunto $\ell(\exp_{x_0}^{-1}(U))$. Entonces la aplicación

$$\phi_\ell = \exp_{\bar{x}_0} \circ \ell \circ \exp_{x_0}^{-1}: U \rightarrow \bar{M}$$

se le denomina aplicación polar de ℓ sobre U .

Nota 3.2.2 La aplicación polar siempre existe para U suficientemente pequeño.

Las dos primeras propiedades siguientes demuestran que si la isometría buscada existe, debe ser la aplicación polar de ℓ .

Proposición 3.2.2 Sea $\ell: T_{x_0}(M) \rightarrow T_{\bar{x}_0}(\bar{M})$ una isometría lineal y ϕ_ℓ su correspondiente aplicación polar. Entonces:

1. ϕ_ℓ envía geodésicas radiales en geodésicas radiales; esto es, si $v \in T_{x_0}(M), \phi_\ell \circ \gamma_v = \gamma_{\ell(v)}$ (donde ambos miembros estén definidos).
2. $(\phi_\ell)_*(x_0) = \ell$.
3. Si el entorno normal U es suficientemente pequeño, ϕ_ℓ es un difeomorfismo sobre un entorno normal de \bar{x}_0 en \bar{M} .
4. Si \bar{M} es completa, ϕ_ℓ está definida sobre todo entorno normal de $x_0 \in M$.

Demostración.- 1) Ya que $\gamma_v(t) = \exp_{x_0}(tv)$, se sigue para todo t , tal que $\gamma_v(t) \in U$, que

$$\phi_\ell(\gamma_v(t)) = \exp_{\bar{x}_0}(\ell(tv)) = \exp_{\bar{x}_0}(t\ell(v)) = \gamma_{\ell(v)}(t).$$

2) Si $v \in T_{x_0}(M)$, entonces por 1)

$$(\phi_\ell)_*(v) = (\phi_\ell)_*(\gamma'_v(0)) = (\phi_\ell \circ \gamma_v)'(0) = \gamma'_{\ell(v)}(0) = \ell(v).$$

3) Si U es suficientemente pequeño, $\phi_\ell(U)$ está contenido en un entorno normal de $\bar{x}_0 \in \bar{M}$. Entonces $\exp_{\bar{x}_0}$ es un difeomorfismo de $\tilde{V} = \ell(\exp_{x_0}^{-1}(U))$ sobre un entorno normal \bar{U} de $\bar{x}_0 \in \bar{M}$. Así $\phi_\ell: U \rightarrow \bar{U}$ es composición de difeomorfismos.

4) Finalmente, ya que $\exp_{\bar{x}_0}$ está definida sobre todo $T_{\bar{x}_0}(\bar{\mathbf{M}})$, ϕ_ℓ está definida sobre todo entorno normal de $x_0 \in \mathbf{M}$. \square

Sabemos que la diferencial de una isometría conserva la curvatura; esto es, si ϕ es una isometría de \mathbf{M} en $\bar{\mathbf{M}}$,

$$\phi_*(R(u, v)w) = \bar{R}(\phi_*(u), \phi_*(v))\phi_*(w).$$

Luego si ℓ es la diferencial en x de una isometría, conserva la curvatura; esta condición necesaria es también suficiente:

Teorema 3.2.1 *Sea \mathbf{M} y $\bar{\mathbf{M}}$ variedades semi-riemannianas localmente simétricas, y sea $\ell: T_{x_0}(\mathbf{M}) \rightarrow T_{\bar{x}_0}(\bar{\mathbf{M}})$ una isometría lineal que conserva la curvatura. Entonces:*

1) *Si \mathcal{U} es un entorno normal suficientemente pequeño de x_0 , existe una única isometría $\phi: \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathcal{U}}$ ($\bar{\mathcal{U}}$ entorno normal de \bar{x}_0) tal que $(\phi_*)_{x_0} = \ell$.*

2) *Si $\bar{\mathbf{M}}$ es completa, entonces para todo entorno normal \mathcal{U} de x_0 , existe una única isometría local $\phi: \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathbf{M}}$ tal que $(\phi_*)_{x_0} = \ell$.*

Demostración.- La unicidad surge, en ambos casos, de la Proposición 1.12.2 (página 30).

Por la proposición precedente, la existencia, en ambos casos, se sigue si toda aplicación polar $\phi_\ell: \mathcal{U} \rightarrow \bar{\mathbf{M}}$ es una isometría local. Así si $v \in T_x(\mathbf{M})$, $x \in \mathcal{U}$, debemos probar que

$$\bar{g}((\phi_\ell)_*(v), (\phi_\ell)_*(v)) = g(v, v).$$

La idea de la demostración es usar la Proposición 3.1.3 (página 56), y demostrar que los correspondientes campos de Jacobi varían de la misma forma en ambas variedades.

a) Sea \mathcal{N} el entorno en $T_{x_0}(\mathbf{M})$ correspondiente al entorno normal \mathcal{U} . Existen unos únicos $u \in \mathcal{N}$ y $w \in T_u(T_{x_0}(\mathbf{M}))$ tales que

$$(\exp_{x_0})_*(w) = v = Y(1) \in T_x(\mathbf{M}),$$

donde Y es el único campo de Jacobi sobre la geodésica γ_u tal que

$$Y(0) = 0, \quad \frac{\nabla Y}{dt}(0) = w \in T_{x_0}(\mathbf{M}) \equiv T_u(T_{x_0}(\mathbf{M})).$$

b) Ahora consideremos la correspondiente situación en $\bar{\mathbf{M}}$. Ya que ℓ es lineal, $\ell_*(w_u) = \ell(w)_{\ell(u)}$. Entonces, por la definición de aplicación polar ϕ_ℓ

$$(\phi_\ell)_*(v) = (\exp_{\bar{x}_0})_*(\ell(w)_{\ell(u)}) = \bar{Y}(1),$$

donde, como anteriormente, \bar{Y} es el único campo de Jacobi sobre $\gamma_{\ell(u)}$ tal que $\bar{Y}(0) = 0$ y $\frac{\nabla \bar{Y}}{dt}(0) = \ell(w) \in T_{\bar{x}_0}(\bar{\mathbf{M}}) \equiv T_{\ell(u)}(T_{\bar{x}_0}(\bar{\mathbf{M}}))$.

c) Sean $\{E_1, \dots, E_n\}$ y $\{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_n\}$ campos de referencias ortonormales paralelos sobre γ_u y $\gamma_{\ell(u)}$, respectivamente, tales que

$$\ell(E_i(0)) = \bar{E}_i(0), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ya que ℓ es isometría lineal, las coordenadas de u y w relativas a los $E_i(0)$ son las mismas que las coordenadas de $\ell(u)$ y $\ell(w)$ relativas a los $\bar{E}_i(0)$.

Si escribimos $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_i$, entonces las funciones Y^1, \dots, Y^n , satisfacen a un sistema de ecuaciones diferenciales como el de la Proposición 3.1.2 (página 56), con las condiciones iniciales $Y(0) = 0$ y $\frac{\nabla Y}{dt}(0) = w$.

Sobre $\overline{\mathbf{M}}$, poniendo $\overline{Y} = \sum_{i=1}^n \overline{Y}^i \overline{E}_i$ se tiene las correspondientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2 \overline{Y}^h}{dt^2} + \sum_{i,j,k=1}^n \overline{R}_{ijk}^h a^i \overline{Y}^j a^k = 0 \quad (1 \leq h \leq n).$$

Además, como w y $\ell(w)$ tienen las mismas componentes, las funciones Y^1, \dots, Y^n e $\overline{Y}^1, \dots, \overline{Y}^n$, satisfacen las mismas condiciones iniciales.

d) Afirmamos que $\overline{R}_{ijk}^h = R_{ijk}^h$ en un dominio común I de γ_u y $\gamma_{\ell(u)}$.

En efecto, ya que la isometría lineal ℓ , conserva la curvatura, se sigue de nuestra elección de los correspondientes campos de referencias que $\overline{R}_{ijk}^h(0) = R_{ijk}^h(0)$.

Ya que \mathbf{M} es localmente simétrico, se sigue que las funciones $g(R(E_j, E_k)E_i, E_h)$ son constantes en I , y por tanto también lo son R_{ijk}^h .

Similarmente, \overline{R}_{ijk}^h son constante. De donde el resultado.

e) Las funciones \overline{Y}^i e Y^i ($1 \leq i \leq n$) satisfacen al mismo sistema de ecuaciones diferenciales y a las mismas condiciones iniciales. Por la unicidad de la solución $\overline{Y}^i = Y^i$ ($1 \leq i \leq n$).

Entonces

$$\overline{g}(\phi_*(v), \phi_*(v)) = \overline{g}(\overline{Y}(1), \overline{Y}(1)) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\overline{Y}^i(1))^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Y^i(1))^2 = g(Y(1), Y(1)) = g(v, v).$$

☒

Corolario 3.2.2.1 Sea \mathbf{M} y $\overline{\mathbf{M}}$ variedades semi-riemannianas con las misma dimensión e índice y la misma curvatura constante c . Entonces, todo $x_0 \in \mathbf{M}$ y $\overline{x}_0 \in \overline{\mathbf{M}}$ tienen entornos isométricos.

Demostración.- Es inmediata, ya que por la Proposición 1.2.5 (pág. 4) existe una isometría lineal de $T_{x_0}(\mathbf{M})$ sobre $T_{\overline{x}_0}(\overline{\mathbf{M}})$ y debe conservar la curvatura. ☒

Nota 3.2.3 Este corolario nos viene a decir que la curvatura constante determina la geometría local. Otra aplicación del teorema anterior es explicar el término “localmente simétrico”:

Para $x \in \mathbf{M}$ sea s_x la aplicación polar de la isometría lineal

$$v \in T_x(\mathbf{M}) \mapsto -v \in T_x(\mathbf{M}).$$

Esto es, si \mathcal{U} es un conveniente entorno normal, entonces $s_x: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ es el difeomorfismo

$$s_x(y) = \exp_x(-\exp_x^{-1}(y)), \quad y \in \mathcal{U}$$

Evidentemente s_x conserva las geodésicas a través de x : Si γ es una geodésica con $\gamma(0) = x$, entonces

$$s_x(\gamma(t)) = \exp_x(-\exp_x^{-1}(\gamma(t))) = \exp(-t\gamma'(0)) = \gamma(-t).$$

De hecho esta propiedad determina unívocamente a s_x (una vez \mathcal{U} esté especificado).

Definición 3.2.3 s_x se le denomina simetría geodésica local de \mathbf{M} en x .

Corolario 3.2.2.2 Las siguientes condiciones sobre una variedad semi-riemanniana son equivalentes:

- 1) \mathbf{M} es localmente simétrica.
- 2) Si $\ell: T_x(\mathbf{M}) \rightarrow T_y(\mathbf{M})$ es una isometría lineal que conserva la curvatura, entonces existe una isometría entre entornos normales de x e y tal que $(\phi_x)_* = \ell$.
- 3) En cada punto $x \in \mathbf{M}$ la simetría geodésica local s_x es una isometría.

Demostración.-

1) \Rightarrow 2) Por el Teorema 3.2.1 (pág. 59).

2) \Rightarrow 3) Tomemos en 2) $\ell = -I: T_x(\mathbb{M}) \rightarrow T_x(\mathbb{M})$, isometría lineal que envía cada plano no degenerado $\Pi \subset T_x(\mathbb{M})$ en sí mismo; así $-I$ conserva la curvatura (pues, conserva las curvaturas seccionales).

Como $\phi = \phi_{-I}$ es la isometría aplicación polar de $-I$, la cual conserva las geodésicas, es decir verifica

$$\phi_{-I}(\gamma_v(t)) = \gamma_{-I(v)}(t) = \gamma_v(-t),$$

la simetría geodésica local $s_x = \phi_{-I}$ y por consiguiente es una isometría.

3) \Rightarrow 1) Demostraremos que ∇R se anula en un punto arbitrario $x \in \mathbb{M}$. Ya que la isometría geodésica local s_x es una isometría, conserva la curvatura y la derivada covariante, entonces

$$-(\nabla_X R)(Y, Z)W = (\nabla_{-X} R)(-Y, -Z)(-W) = (\nabla_X R)(Y, Z)W, \quad \forall X, Y, Z, W \in T_x(\mathbb{M}).$$

En consecuencia, $\nabla R = 0$ en x . □

3.3 Recubrimientos semi-riemannianos

Definición 3.3.1 Sean \mathbb{M} y $\tilde{\mathbb{M}}$ variedades diferenciables, una aplicación diferenciable $k: \tilde{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{M}$ sobreyectiva, es una aplicación recubridora si cada $x \in \mathbb{M}$ tiene un entorno conexo U tal que $k^{-1}(U)$ es unión disjunta de conjuntos abiertos y k aplica cada componente de $k^{-1}(U)$ difeomórficamente en U .

$\tilde{\mathbb{M}}$ se denomina espacio recubridor (o de recubrimiento) de \mathbb{M} .

A los abiertos conexos U se les llama abiertos simples del recubrimiento.

Una primera consecuencia de esta definición es el siguiente:

Lema 3.3.1 Si $k: \tilde{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{M}$ es un recubrimiento y \mathbb{M} es conexa, entonces el cardinal de $k^{-1}(x)$ es el mismo para todo $x \in \mathbb{M}$.

Demostración.- Para cada $m \leq \infty$, sea $\mathcal{O}_p = \{x \in \mathbb{M} / \text{card}(k^{-1}(x)) = p\}$, entonces de la definición de recubrimiento surge que \mathcal{O}_p es abierto. En efecto, tenemos que demostrar que todo $y \in \mathcal{O}_p$ está contenido en un abierto enteramente contenido en \mathcal{O}_p . Basta tomar un abierto simple U de y . Para todo $x \in U$ existe una biyección $h: k^{-1}(x) \rightarrow k^{-1}(y)$ definida como sigue, sea $z \in k^{-1}(x) \subset k^{-1}(U) = \cup_{i \in I} V_i$ (unión disjunta de abiertos V_i , difeomorfos a U). Existe un único $i^* \in I$ tal que $z \in V_{i^*}$; sea $h(z)$ el único elemento de V_{i^*} tal que $k|_{V_{i^*}}(h(z)) = y$. Concluimos que $U \subset \mathcal{O}_p$. Luego \mathcal{O}_p es abierto.

También es cerrado pues su complementario $\mathbb{M} - \mathcal{O}_p$ es abierto: Si $y \in \mathbb{M} - \mathcal{O}_p$ con $\text{card}(k^{-1}(y)) = q \neq p$, siguiendo el mismo razonamiento que antes, existe un entorno abierto enteramente contenido en $\mathbb{M} - \mathcal{O}_p$.

Finalmente el resultado se sigue de que \mathbb{M} es conexa. □

Ejemplo 3.3.1 $k: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto k(t) = (\cos t, \sin t)$, es una aplicación recubridora. Sin embargo, en virtud del Lema, $k|_I: I \rightarrow S^1$, I intervalo de \mathbb{R} , no lo es.

Definición 3.3.2 Una aplicación recubridora semi-riemanniana $k: \tilde{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{M}$ es una aplicación recubridora de variedades semi-riemannianas que es una isometría local.

Ejemplo 3.3.2

1) $k: \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto k(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) El producto de aplicaciones recubridoras semi-riemannianas también lo es. Así, $k \times k: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ es una aplicación recubridora del toro por el plano.

3) Si $k: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ es una aplicación recubridora de una variedad diferenciable \mathbb{M} sobre una variedad semi-riemanniana \mathbb{N} , con tensor métrico g , entonces asignándole a \mathbb{M} el tensor métrico $k^*(g)$, k se convierte en una aplicación recubridora semi-riemanniana.

El Teorema 3.2.1 de la sección anterior tiene la siguiente generalización:

Teorema 3.3.1 Sean M y \bar{M} variedades semi-riemannianas localmente simétricas, conexas y completas y supongamos además que M sea simplemente conexa.

Si $\ell: T_{x_0}(M) \rightarrow T_{\bar{x}_0}(\bar{M})$ es una isometría lineal que conserva la curvatura, existe una única aplicación recubridora semi-riemanniana $\phi: M \rightarrow \bar{M}$ tal que $(\phi_*)_{x_0} = \ell$. \square

Omitiremos la demostración y nos limitaremos a dar algunas consecuencias.

Hablando sin rigor, el teorema afirma que una variedad localmente simétrica conexa y completa \bar{M} está determinada salvo recubrimiento semi-riemanniano por su curvatura en un punto.

Lema 3.3.2 Si $k: \tilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación recubridora. Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable y $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ tal que $k(\tilde{x}_0) = \alpha(0)$.

Entonces existe una única curva diferenciable $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$ tal que

$$\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0 \quad \text{y} \quad k \circ \tilde{\alpha} = \alpha.$$

Demostración.- Descompongamos el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos I_i tales que si $\alpha_i: I_i \rightarrow M$ ($\alpha_i = \alpha|_{I_i}$), $\alpha_i(I_i)$ quede en abiertos simples del recubrimiento, $U_i \subset M$.

Si V es la componente conexa de $k^{-1}(U_1)$ que contiene a \tilde{x}_0 , entonces $\tilde{\alpha}_1$ debe ser $k|_V^{-1} \circ \alpha_1$.

Reiterando el proceso, reemplazando \tilde{x}_0 por el apropiado punto final de α_i , construimos $\tilde{\alpha}$. \square

Proposición 3.3.1 Sean $k: \tilde{M} \rightarrow M$ una aplicación recubridora, $\psi: P \rightarrow M$ una aplicación diferenciable, $p_0 \in P$ y $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ tales que $\psi(p_0) = k(\tilde{x}_0)$. Entonces:

1) Si P es conexa, existe a lo sumo una aplicación diferenciable $\tilde{\psi}: P \rightarrow \tilde{M}$ tal que

$$k \circ \tilde{\psi} = \psi \quad \text{y} \quad \tilde{\psi}(p_0) = \tilde{x}_0.$$

2) Si P es simplemente conexa, $\tilde{\psi}$ existe.

Demostración.- La afirmación 1) se sigue de la unicidad del lema anterior.

2) Si $p \in P$, sea $\beta: [0, 1] \rightarrow P$ una curva que une p_0 con p ($\beta(0) = p_0$, $\beta(1) = p$) y $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ la curva en M definida por $\alpha = \psi \circ \beta$. Sea $\tilde{\alpha}$ la única curva en \tilde{M} con punto inicial \tilde{x}_0 , tal que $k \circ \tilde{\alpha} = \psi \circ \beta = \alpha$.

Entonces $\tilde{\psi}(p) = \tilde{\alpha}(1)$ es la aplicación buscada. \square

Enunciamos el siguiente resultado:

Teorema 3.3.2 Toda variedad conexa tiene un recubrimiento simplemente conexo. \square

Utilizando la última proposición, es fácil demostrar que dos recubrimientos simplemente conexos arbitrarios

$$k_i: M_i \rightarrow M \quad (i = 1, 2)$$

de una misma variedad M son equivalentes, esto es, existe un difeomorfismo $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ tal que $k_2 \circ \psi = k_1$.

Así, podemos hablar de “el recubrimiento simplemente conexo” de M (también llamado recubrimiento universal de M).

3.4 Espacios simétricos

Definición 3.4.1 Un espacio simétrico semi-riemanniano es una variedad semi-riemanniana conexa M , tal que para cada $x \in M$, existe una única isometría $s_x: M \rightarrow M$ con aplicación diferencial $-I$ sobre $T_x(M)$.

A la isometría s_x se le denomina simetría global de M en x .

Proposición 3.4.1 Todo espacio simétrico es localmente simétrico.

Demostración.- Ya que s_x transforma las geodésicas a través de x en sí mismas, ella es la extensión de una simetría geodésica local de M en x ; con lo que ésta última es una isometría, y de acuerdo con el Corolario 3.2.2.2 (pág. 60), se tiene el resultado enunciado. \square

Ejemplo 3.4.1

- 1) \mathbb{R}^n es simétrico. Ya que para todo p la aplicación $p + x \mapsto p - x$, es una isometría.
- 2) La esfera S^n es simétrica. Ya que para cada $p \in S^n$, s_p es la simetría en el espacio euclídeo en el sentido usual respecto a la recta en \mathbb{R}^{n+1} que pasa por p y $-p$.
- 3) Toda hipercuadrada conexa es simétrica. Como se sigue de la Proposición 2.5.14 (pág. 46), tomando en vez la referencia $\{f_1, \dots, f_n\}$ la $\{-e_1, \dots, e_n\}$.
- 4) Posteriormente veremos espacios simétricos con curvatura no constante.

Nota 3.4.1 Una variedad localmente simétrica no necesariamente es completa, ya que toda subvariedad abierta de una variedad localmente simétrica también es localmente simétrica.

No obstante, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.4.2 Un espacio simétrico semi-riemanniano es completo.

Demostración.- Para demostrar que una geodésica $\gamma: [0, b[\rightarrow M$ es prolongable, elegimos c cerca de b en un intervalo, y sea $s_{\gamma(c)}$ la simetría global en $\gamma(c)$. Ya que $s_{\gamma(c)}$ envía geodésicas a través de $\gamma(c)$ en sí mismas, una reparametrización de $s_{\gamma(c)} \circ \gamma$ da la extensión requerida. \square

Proposición 3.4.3 Una variedad semi-riemanniana localmente simétrica, simplemente conexa y completa es simétrica.

Demostración.- Por la proposición anterior la completitud es necesaria.

En todo punto $x \in M$ la isometría lineal $-I: T_x(M) \rightarrow T_x(M)$ conserva la curvatura; así, aplicando el Teorema 3.3.1 (pág. 62), se obtiene una aplicación recubridora semi-riemanniana $\phi: M \rightarrow M$ tal que $(\phi_*)_x = -I$.

Ya que M es simplemente conexa, ϕ es un difeomorfismo de M sobre M ; esto surge de la Proposición 3.3.1 (pág. 62), poniendo $P = M, \tilde{M} = M, \psi = 1_M, k = \phi$, resultando entonces que existe una única aplicación diferenciable $\tilde{\psi}: M \rightarrow M$ tal que $\phi \circ \tilde{\psi} = 1_M$. Por tanto ϕ es una isometría. \square

3.5 Espacios forma simplemente conexos

Definición 3.5.1 Un espacio forma es una variedad semi-riemanniana conexa y completa de curvatura constante.

Proposición 3.5.1 Dos espacio forma simplemente conexos son isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión, índice y curvatura c .

Demostración.- Obviamente la condición es necesaria.

Para el inverso, nótese que, ya que curvatura constante implica (Corolario 3.2.1.1, pág. 58) localmente simétrico, por la Proposición 3.4.3 los espacios forma simplemente conexos son simétricos.

Supongamos que M y N son espacios forma simplemente conexos con la misma dimensión e índice. Entonces estas últimas condiciones implican (Proposición 1.2.5, pág. 4) que existe una isometría lineal de $T_x(M)$ en $T_y(N)$. Y por el Teorema 3.3.1 (pág. 62), existe un recubrimiento semi-riemanniano $M \rightarrow N$, el cual, ya que N es simplemente conexo y por análogo razonamiento al de la demostración de la Proposición 3.4.3, es entonces una isometría. \square

Esta última proposición nos permite afirmar que, salvo isometrías, existe a lo sumo un espacio simplemente conexo $M(n, \nu, c)$ de dimensión n , índice ν y curvatura c .

Corolario 3.5.1.1 *El espacio forma simplemente conexo $M(n, \nu, c)$ es isométrico a:*

$$\begin{array}{llll} \mathbb{R}_\nu^1 & n = 1 & 0 \leq \nu \leq n & c = 0 \\ \mathbb{R}_\nu^n & n \geq 2 & 0 \leq \nu \leq n & c = 0 \\ S_\nu^n(r) & n \geq 2 & 0 \leq \nu \leq n - 2 & c = \frac{1}{r^2} \\ H_\nu^n(r) & n \geq 2 & 2 \leq \nu \leq n & c = -\frac{1}{r^2} \\ \mathcal{C}(S_n^n(r)) & n \geq 2 & \nu = n & c = \frac{1}{r^2} \\ H^n(r) & n \geq 2 & \nu = 0 & c = -\frac{1}{r^2} \\ \widetilde{S}_{n-1}^n(r) & n \geq 2 & \nu = n - 1 & c = \frac{1}{r^2} \\ \widetilde{H}_1^n(r) & n \geq 2 & \nu = 1 & c = -\frac{1}{r^2} \end{array}$$

donde denotamos con tilde el recubrimiento universal, por $\mathcal{C}(S_n^n(r))$ una componente conexa de $S_n^n(r)$ y por $H^n(r)$ una de las componentes conexas del espacio hiperbólico $H_0^n(r) \subset \mathbb{R}_1^{n+1}$.

Demostración.- Para $n = 1$, toda variedad semi-riemanniana es trivialmente llana, entonces $M(1, \nu, 0)$ es llana, conexa y completa y por el Ejercicio 100, la aplicación $\exp_{x_0}: T_{x_0}(M) \rightarrow M$ es un recubrimiento semi-riemanniano. Teniéndose: $T_{x_0}(M) \simeq \mathbb{R}^1$ (ó \mathbb{R}_1^1).

Para los tres siguientes basta observar que $S_\nu^n(r) \simeq S^{n-\nu} \times \mathbb{R}^\nu \simeq H_{n-\nu}^n(r)$ y estos espacios forma son simplemente conexos. \square

Nota 3.5.1 Ya que \mathbb{R}^n es el recubrimiento (simplemente conexo) de $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, los cuatro últimos tipos son difeomorfos a \mathbb{R}^n

Corolario 3.5.1.2 *Una variedad de Riemann n -dimensional, completa, simplemente conexa y de curvatura constante c es isométrica a*

la esfera $S^n(r)$ si $c = \frac{1}{r^2}$

el espacio euclídeo \mathbb{R}^n si $c = 0$

el espacio hipérbólico $H^n(r)$ si $c = -\frac{1}{r^2}$. \square

Corolario 3.5.1.3 *Una variedad de Lorentz n -dimensional completa simplemente conexa y de curvatura constante c es isométrica a*

$$\begin{array}{llll} \text{la esfera de Lorentz} & S_1^n(r) & \text{si } c = \frac{1}{r^2} & n \geq 3 \\ & \widetilde{S}_1^2(r) & \text{si } c = \frac{1}{r^2} & n = 2 \\ \text{el espacio de Minkowski} & \mathbb{R}_1^n & \text{si } c = 0 & \\ & \widetilde{H}_1^n(r) & \text{si } c = -\frac{1}{r^2} & n \geq 2 \end{array}$$

\square

Ejemplo 3.5.1 *Un modelo de \widetilde{H}_1^n*

H_1^n puede ser considerado como una superficie de revolución en $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_2^2 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Desarrollando los círculos de revolución obtenemos una aplicación recubridora

$$k: \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow H_1^n \quad k(t, x) = (\sqrt{1 + \langle x, x \rangle} \cos t, \sqrt{1 + \langle x, x \rangle} \sin t, x)$$

Dotado con la métrica “pull-back” o imagen recíproca, $\widetilde{\mathbb{R}}^n$ se convierte en un espacio recubridor semi-riemanniano simplemente conexo de H_1^n , que denotamos por \widetilde{H}_1^n .

La geometría de este modelo puede ser descrita a partir de la de H_1^n a través de la aplicación k .

3.6 Espacios semi-riemannianos homogéneos

Definición 3.6.1 *Una acción de un grupo de Lie G sobre una variedad diferenciable M es una aplicación diferenciable $\psi: G \times M \rightarrow M$, denotada por*

$$\psi(a, x) = ax \quad \forall a \in G, \forall x \in M$$

tal que

- 1) $(ab)x = a(bx) \quad \forall a, b \in G, \forall x \in M.$
- 2) $ex = x \quad \forall x \in M \quad (e \text{ elemento neutro de } G).$

Nota 3.6.1 Para una acción dada, si se fija $a \in G$, entonces la aplicación $\psi_a: M \rightarrow M, x \mapsto \psi_a(x) = ax \in M$ es un difeomorfismo con inverso $\psi_a^{-1} = \psi_{a^{-1}}$.

Definición 3.6.2 *Una acción $G \times M \rightarrow M$ se dice que es transitiva si cada $x, y \in M$, existe una $a \in G$, tal que $ax = y$.*

Ejemplo 3.6.1 $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, (A, x) \mapsto Ax$, considerando x como una matriz columna y Ax el producto de matrices, es una acción de $GL(n, \mathbb{R})$ sobre \mathbb{R}^n . Pero no es transitiva, ya que $A0 = 0$, para todo $A \in GL(n, \mathbb{R})$.

Definición 3.6.3 *Si $G \times M \rightarrow M$ es una acción y $x_0 \in M$, entonces,*

$$H = \{a \in G / ax_0 = x_0\}$$

es un subgrupo cerrado de G , denominado subgrupo de isotropía de x_0 .

La diferencial del automorfismo interior $j_a: G \rightarrow G, x \mapsto j_a(x) = axa^{-1}$ la denotamos por $ada = (j_a)_*$. La aplicación $ad: G \rightarrow \text{Aut}(\underline{G}), a \mapsto ada$ se llama representación adjunta, su diferencial induce una aplicación que se denota por $Ad: \underline{G} \rightarrow \text{End}(\underline{G}), X \mapsto Ad X, verificando Ad X \cdot Y = [X, Y]$.

Teorema 3.6.1 ([8, pág. 46]) *Sea M una variedad semi-riemanniana, $I(M)$ el grupo de isometrías de M , entonces existe una única estructura de variedad diferenciable sobre $I(M)$, tal que*

- 1) $I(M)$ es un grupo de Lie.
- 2) La aplicación natural $I(M) \times M \rightarrow M, (\phi, x) \mapsto \phi(x)$, es una acción de $I(M)$ sobre M . \square

Definición 3.6.4 *Una variedad semi-riemanniana M es homogénea (o espacio semi-riemanniano homogéneo) si el grupo de isometrías actúa transitivamente sobre M .*

Nota 3.6.2 Si M es un espacio semi-riemanniano homogéneo, entonces toda propiedad geométrica en un punto de M se verifica en todo otro punto.

Para demostrar que una variedad semi-riemanniana es homogénea es suficiente encontrar isometrías que lleven algún fijo en todo punto (o viceversa).

Proposición 3.6.1 *Un espacio simétrico semi-riemanniano es un espacio semi-riemanniano homogéneo.*

Demostración.- Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ una geodésica. La simetría global $s_{\gamma(1/2)}$ es una isometría que envía el punto $\gamma(0)$ en $\gamma(1)$. Ya que los espacios simétricos son conexos por definición, todo par de puntos $x, y \in M$, pueden unirse por una geodésica quebrada. Así un número finito de composiciones de isometrías como la de arriba da la isometría que envía x en y . \square

Proposición 3.6.2 *Un espacio de Riemann homogéneo es completo.*

Demostración.- Es suficiente demostrar que una geodésica con tangente unitaria $\gamma: [0, b[\rightarrow M$ tiene una extensión geodésica más allá de b . La existencia de un entorno $B_{x_0}(\varepsilon)$ normal (ver Apéndice B, pág. 93) demuestra, en el caso riemanniano, que para todo $x_0 \in M$ existe un ε tal que toda geodésica de tangente unitaria en x_0 está definida sobre $[0, \varepsilon[$. Si ϕ es una isometría enviando x_0 en $\gamma(b - \frac{\varepsilon}{2})$, existe un único vector $v \in T_{x_0}(M)$ tal que $\phi_*(v) = \gamma'(b - \frac{\varepsilon}{2})$. En consecuencia, la geodésica $\phi \circ \gamma_v$ de una extensión de γ . \square

Proposición 3.6.3 *Un espacio semi-riemanniano homogéneo no es necesariamente completo.*

Demostración.- Sea M el semiplano derecho $M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0\}$ con tensor métrico $g \equiv 2du dv$. M es un espacio semi-riemanniano homogéneo, en efecto:

Tomemos $(1, 0) \in M$, y veamos que para cualquier otro punto (a, b) existe una isometría que lleva (a, b) en $(1, 0)$. Para cada (a, b) , la aplicación $\phi: M \rightarrow M$, $\phi(u, v) = (\frac{u}{a}, av)$, envía (a, b) en $(1, ab)$. La isometría $\psi: M \rightarrow M$, $\psi(u, v) = (u, v - ab)$, envía $(1, ab)$ en $(1, 0)$. Con lo que M es un espacio semi-riemanniano homogéneo.

Pero M no es completo ya que claramente la geodésica $\gamma(t) = (t, 0)$ tiene como dominio máximo \mathbb{R}^+ . \square

Nota 3.6.3 Si una variedad de Riemann es compacta u homogénea, es completa; pero ninguna de estas condiciones en solitario son suficientes para el caso de métricas indefinidas. Sin embargo ambos juntos si son suficientes (Ejercicio 129):

Proposición 3.6.4 (Marsden) *Una variedad semi-riemanniana homogénea y compacta es completa.* \square

3.7 Métricas bi-invariantes sobre grupos de Lie

Definición 3.7.1 *Sea H un subgrupo de Lie de un grupo de Lie G . Un objeto definido sobre el álgebra de Lie \underline{G} de G es $\text{ad}(H)$ -invariante si se conserva por $\text{ad}(h): \underline{G} \rightarrow \underline{G}$, $\forall h \in H$.*

Proposición 3.7.1 *Si una forma bilineal simétrica B sobre \underline{G} es $\text{ad}(H)$ -invariante, entonces*

$$B([X, Z], Y) = B(X, [Z, Y]), \quad \forall X, Y \in \underline{G}, \forall Z \in \underline{H}.$$

Demostración.- Por polarización la fórmula a establecer es equivalente a

$$B([Z, X], X) = 0, \quad \forall X \in \underline{G}, \forall Z \in \underline{H}.$$

Sea $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow H$ el subgrupo uniparamétrico asociado a Z . Definimos la aplicación

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(t) = B(\text{ad}(\alpha(t))X, \text{ad}(\alpha(t))X).$$

Entonces

$$f'(0) = B(ad_*(\alpha'(0))X, X) + B(X, ad_*(\alpha'(0))X) = B(Ad Z \cdot X, X) + B(X, Ad Z \cdot X) = 2B([Z, X], X).$$

Como B es $\text{ad}(\mathfrak{H})$ -invariante, f es constante y por tanto, $f'(0) = 0$. Es decir

$$B([Z, X], X) = 0.$$

□

Nota 3.7.1 El resultado recíproco se tiene cuando \mathfrak{H} es conexo.

Definición 3.7.2 Una métrica invariante a la izquierda sobre un grupo de Lie G es una métrica sobre G tal que las traslaciones a la izquierda $L_a: G \rightarrow G$ ($L_a(b) = ab$) son isometrías.

Proposición 3.7.2 Una métrica invariante a la izquierda sobre un grupo de Lie G es virtualmente un producto escalar sobre el álgebra de Lie $\underline{\mathfrak{G}}$ de G (o producto escalar sobre $T_e(G)$).

Demostración.- En efecto, si g es un tensor métrico invariante a la izquierda sobre G , entonces $g(X, Y)$ es constante para todo $X, Y \in \underline{\mathfrak{G}}$, por tanto define un producto escalar en $\underline{\mathfrak{G}}$.

Recíprocamente, si \langle, \rangle es un producto escalar en $T_e(G)$, definimos

$$g_a(X_a, Y_a) = \langle (L_{a^{-1}})_*(X_a), (L_{a^{-1}})_*(Y_a) \rangle, \quad \forall X_a, Y_a \in T_a(G).$$

La cual es una métrica invariante a la izquierda sobre G .

□

Definición 3.7.3 Una métrica sobre un grupo de Lie G que es invariante a la izquierda e invariante a la derecha ($L_a: G \rightarrow G$, $R_a: G \rightarrow G$ son isometrías, $\forall a \in G$), se denomina bi-invariante.

Proposición 3.7.3 Sea G un grupo de Lie conexo dotado de un tensor métrico invariante a la izquierda g . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. g es invariante a la derecha (bi-invariante).
2. g es $\text{ad}(G)$ -invariante.
3. La aplicación $J: G \rightarrow G$, $a \mapsto a^{-1}$ es una isometría.
4. $g(X, [Y, Z]) = g([X, Y], Z)$, $\forall X, Y, Z \in \underline{\mathfrak{G}}$.
5. $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$, $\forall X, Y \in \underline{\mathfrak{G}}$.
6. Las geodésicas de G partiendo de e son subgrupos uniparamétricos de G .

Demostración.- 1) \Leftrightarrow 2) Es inmediata, ya que $j_a = L_a \circ R_{a^{-1}}$ y $(L_a)_*|_{\underline{\mathfrak{G}}} = 1_{\underline{\mathfrak{G}}}$. Entonces

$$g(ad(a)X, ad(a)Y) = g(L_{a*}R_{a^{-1}*}X, L_{a*}R_{a^{-1}*}Y) = g(R_{a^{-1}*}X, R_{a^{-1}*}Y) = g(X, Y).$$

Y también, recíprocamente:

$$g(R_{a*}X, R_{a*}Y) = g(R_{a*}L_{a^{-1}*}X, R_{a*}L_{a^{-1}*}Y) = g(ad(a^{-1})X, ad(a^{-1})Y) = g(X, Y).$$

1) \Rightarrow 3) $J_*(e) = -I$.

En efecto, si α es un subgrupo de un parámetro de G , $J(\alpha(t)) = \alpha(t)^{-1} = \alpha(-t)$. Si $a \in G$, $J = R_{a^{-1}} \circ J \circ L_{a^{-1}}$, resulta entonces que

$$J_*(a): T_a(G) \rightarrow T_{a^{-1}}(G) \text{ es } (R_{a^{-1}})_* \circ J_*(e) \circ (L_{a^{-1}})_*$$

3) \Rightarrow 1)

$$\begin{aligned} g((R_a)_*X, (R_a)_*Y) &= g((J \circ L_{a^{-1}} \circ J)_*X, (J \circ L_{a^{-1}} \circ J)_*Y) = g((L_{a^{-1}}J)_*X, (L_{a^{-1}}J)_*Y) = \\ &= g(J_*X, J_*Y) = g(X, Y). \end{aligned}$$

2) \Leftrightarrow 4) Situación particular de la Proposición 3.7.1.

4) \Rightarrow 5) Por la fórmula de Koszul (1.5.3), que determina la conexión:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]),$$

como $g(Y, Z) = cte.$ y por 4) $g(X, [Y, Z]) = g([Z, X], Y)$, resulta

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) \quad \text{es decir} \quad \nabla_X Y = -\frac{1}{2}[X, Y].$$

5) \Rightarrow 4)

$$g(X, [Y, Z]) = 2g(X, \nabla_Y Z) = -2g(\nabla_Y X, Z) = -g([Y, X], Z) = g([X, Y], Z).$$

5) \Rightarrow 6) Por polarización 5) equivale a $\nabla_X X = 0, \forall X \in \underline{G}$.

Sea α el subgrupo uniparamétrico de X . Entonces

$$\frac{\nabla \alpha'}{dt} = \nabla_X X|_\alpha = 0.$$

Luego, α es una geodésica.

6) \Rightarrow 5) Si α es una geodésica, entonces $\nabla_X X|_\alpha = 0$, siendo X el campo de vectores sobre α tal que $\alpha'(0) = X_e$. Por traslaciones a la izquierda que son isometrías, resulta $\nabla_X X = 0$. \square

Definición 3.7.4 Decimos que un grupo de Lie G es un grupo semi-riemanniano si está dotado de un métrica bi-invariante.

Corolario 3.7.3.1 Un grupo semi-riemanniano G es un espacio simétrico. En particular, es completo.

Demostración.- Es consecuencia de 3) en la proposición anterior: La aplicación J es una isometría global en e ; y, así, $L_a \circ J \circ L_{a^{-1}}$ es una simetría en $a \in G$. \square

Corolario 3.7.3.2 Si G es un grupo semi-riemanniano:

1. $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z], \quad \forall X, Y, Z \in \underline{G}$.
2. Si X e Y generan un plano no degenerado en \underline{G} , entonces

$$K(X, Y) = \frac{1}{4} \frac{g([X, Y], [X, Y])}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}.$$

Demostración.- 1) Ya que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = \frac{1}{2} \nabla_X [Y, Z] - \frac{1}{2} \nabla_Y [X, Z] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z] = \\ &= \frac{1}{4} [X, [Y, Z]] - \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] - \frac{1}{2} [[X, Y], Z]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Identidad de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

resulta

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[Z, [X, Y]] - \frac{1}{2}[[X, Y], Z] = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z].$$

2) Por 4) de la proposición anterior y por la primera parte de este corolario

$$g(R(X, Y)X, Y) = -\frac{1}{4}g([[X, Y], X], Y) = -\frac{1}{4}g([X, Y], [X, Y]).$$

☒

Definición 3.7.5 La forma de Killing de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es la aplicación

$$\mathcal{B}(X, Y) = \text{traza}(Ad X \circ Ad Y), \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Corolario 3.7.3.3 Si G es un grupo semi-riemanniano, tenemos las siguientes relaciones relativas al curvatura seccional K y al tensor de Ricci S :

1. Si G es abeliano, entonces $K = 0$.
2. Si la métrica es riemanniana, entonces $K \geq 0$.
3. $S|_{\underline{G}} = \frac{1}{4}\mathcal{B}$.

☒

3.8 Espacios homogéneos como cociente de grupos

Veamos en lo queda de este tema como un espacio simétrico (variedad semi-riemanniana simétrica) puede ser construido a partir de grupos de Lie y por consiguiente su geometría descrita en términos de álgebras de Lie. Así, por ejemplo, en ciertos casos, podemos determinar la curvatura y las geodésicas mediante cálculo matricial.

Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G y sea G/H el conjunto de clases a la izquierda de G

$$G/H = \{\bar{a} = aH / a \in G\}$$

Definimos $\tau_a: G/H \rightarrow G/H$ $\tau_a(\bar{b}) = \overline{ab}$. Se verifica $\pi \circ L_a = \tau_a \circ \pi$ y $\tau_{ab} = \tau_a \circ \tau_b$, donde $\pi: G \rightarrow G/H$ es la proyección canónica.

Enunciamos el siguiente resultado que garantiza la existencia de una estructura diferenciable sobre G/H , cuando H es cerrado:

Proposición 3.8.1 Si H es un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G , existe una única estructura de variedad diferenciable sobre G/H , tal que la proyección $\pi: G \rightarrow G/H$ es una submersión. ☒

Definición 3.8.1 La variedad G/H así construida se denomina variedad homogénea (o espacio homogéneo).

Nota 3.8.1 La aplicación $\tau: G \times G/H \rightarrow G/H$ $(a, bH) \mapsto abH$, es una acción de G sobre G/H , denominada acción natural de G sobre G/H , la cual es transitiva.

Veremos ahora que toda acción transitiva sobre una variedad M permite considerar a ésta como un espacio homogéneo.

Si $G \times M \rightarrow M$ es una acción y $x_0 \in M$, el subgrupo de isotropía de x_0 , $H = \{a \in G / ax_0 = x_0\}$ es cerrado, existe entonces una aplicación natural ϕ del espacio homogéneo G/H sobre M que envía cada clase aH en el punto ax_0 . Esta aplicación está bien definida, pues

$$\bar{a} = \bar{b} \Rightarrow b^{-1}a \in H \Rightarrow b^{-1}ax_0 = x_0 \Rightarrow ax_0 = bx_0.$$

Y tenemos el siguiente resultado (cuya demostración, así como la de la proposición anterior puede verse por ejemplo en [12, 17]):

Proposición 3.8.2 *Sea $G \times M \rightarrow M$ una acción transitiva y H el grupo de isotropía de un punto $x_0 \in M$. Entonces la aplicación natural*

$$\phi: G/H \rightarrow M, \quad \bar{a} \mapsto ax_0.$$

es un difeomorfismo.

□

Ejemplo 3.8.1 *Las esferas como espacios homogéneos:*

1. $S^n = SO(n+1)/SO(n) = O(n+1)/O(n)$.
2. $S^{2n+1} = SU(n+1)/SU(n) = U(n+1)/U(n)$.
3. $S^{4n+3} = Sp(n+1)/Sp(n)$.

El espacio proyectivo como espacio homogéneo:

4. $P^{n-1}(\mathbb{R}) = SO(n)/O(n-1)$.

Las variedades grassmannianas reales:

5. G_{pq} el conjunto de los p -subespacios orientados de un espacio vectorial n -dimensional ($n = p + q$)

$$G_{pq} = O(n)/O(p) \times O(q).$$

3.9 Espacios homogéneos reductivos

Definición 3.9.1 *Si un grupo de Lie G actúa sobre una variedad M , un tensor métrico sobre M se dice que es G -invariante si, para cada $a \in G$, el difeomorfismo $x \in M \mapsto ax \in M$ es una isometría.*

Nota 3.9.1

- Cuando la acción es transitiva, tal métrica convierte a M en espacio semi-riemanniano homogéneo.
- No es difícil demostrar que todo espacio semi-riemanniano homogéneo puede ser expresado como un espacio homogéneo $M=G/H$ con métrica G -invariante. La geometría de M puede entonces ser descrita en términos de la teoría de grupos de Lie.

Definición 3.9.2 *Un espacio homogéneo $M=G/H$ es reductivo si existe un subespacio $\mathfrak{m} \subset \underline{G}$ $ad(H)$ -invariante que es complementario de \underline{H} en \underline{G} . Se dice que \mathfrak{m} es un subespacio de Lie para G/H*

Nota 3.9.2

- Aunque $\underline{G} = \mathfrak{m} \oplus \underline{H}$, \mathfrak{m} no es necesariamente cerrado respecto al corchete como lo es \underline{H} .
- Si \mathfrak{m} es un subespacio de Lie para G/H entonces $[\underline{H}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Proposición 3.9.1 Si $M=G/H$ es un espacio homogéneo y $\pi:G \rightarrow G/H$ es la proyección canónica y $x_0 = \pi(e)$, entonces

$$\pi_{*|m}: \mathfrak{m} \rightarrow T_{x_0}(M)$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración.- $\underline{H} \equiv T_e(H) \subset T_e(G) \equiv \underline{G}$, tenemos $\pi_*(\underline{H}) = 0$.

Ya que $\pi:G \rightarrow M$ es una submersión, π_* es sobre. Luego, teniendo en cuenta las dimensiones, $\pi_{*|m}$ es un isomorfismo. \square

Proposición 3.9.2 Sea $M=G/H$ un espacio homogéneo reductivo con subespacio de Lie \mathfrak{m} . Existe una correspondencia biyectiva entre las métricas semi-riemannianas G -invariantes sobre M y las formas bilineales simétricas no degeneradas $\text{ad}(H)$ -invariantes sobre \mathfrak{m} .

Tal correspondencia está dada por

$$B(X, Y) = \bar{g}_0(\bar{X}, \bar{Y}) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}$$

donde \bar{X} e \bar{Y} son las imágenes de X e Y mediante el isomorfismo $\pi_{*|m}$.

Demostración.- Sea B una forma bilineal simétrica no degenerada $\text{ad}(H)$ -invariante sobre \mathfrak{m} .

Todo $x \in M$ es de la forma $x = \tau_a(x_0)$, para algún $a \in G$.

Definimos la forma bilineal simétrica no degenerada

$$\bar{g}_x: T_x(M) \times T_x(M) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{g}_x(u, v) = B(X, Y)$$

siendo $u, v \in T_x(M)$ y $X, Y \in \mathfrak{m}$ tales que $\pi_{*|m}(X) = (\tau_{a^{-1}})_*(u)$, $\pi_{*|m}(Y) = (\tau_{a^{-1}})_*(v)$.

Esta definición es independiente de a , pues si $a'x_0 = x$, resulta que $a'^{-1}ax_0 = x_0$, es decir $a'^{-1}a \in H$, por tanto si

$$X', Y' \in \mathfrak{m} \text{ tales que } \pi_{*|m}(X') = (\tau_{a'^{-1}})_*(u), \text{ y } \pi_{*|m}(Y') = (\tau_{a'^{-1}})_*(v),$$

se tiene

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= B(\text{ad}(a'^{-1}a)X, \text{ad}(a'^{-1}a)Y) = \\ &= B\left(\left((\pi_{*|m})^{-1} \circ (\tau_{a'^{-1}a})_* \circ \pi_{*|m}\right)(X), \left((\pi_{*|m})^{-1} \circ (\tau_{a'^{-1}a})_* \circ \pi_{*|m}\right)(Y)\right) = \\ &= B\left(\left(\pi_{*|m}\right)^{-1} \circ \left((\tau_{a'^{-1}})_*(u)\right), \left(\pi_{*|m}\right)^{-1} \circ \left((\tau_{a'^{-1}})_*(v)\right)\right) = B(X', Y'), \end{aligned}$$

en virtud de que, si $h \in H$, la comutatividad del primer diagrama siguiente implica la comutatividad del diagrama segundo

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{j_h} & G & & \mathfrak{m} & \xrightarrow{\text{ad}(h)} & \mathfrak{m} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi & & \pi_{*|m} \downarrow & & \downarrow \pi_{*|m} \\ M & \xrightarrow{\tau_h} & M & & T_{x_0}(M) & \xrightarrow{(\tau_h)_*} & T_{x_0}(M) \end{array}$$

La forma bilineal \bar{g} , así definida, es G -invariante: Si $b \in G$, $u, v \in T_x(M)$ y $ax = x_0$ ($a \in G$), se tiene

$$\begin{aligned} (\tau_b^* \bar{g})(u, v) &= g_{bx}\left((\tau_b)_*(u), (\tau_b)_*(v)\right) = \\ &= B\left(\left(\pi_{*|m}^{-1} \circ (\tau_{ab^{-1}})_* \circ (\tau_b)_*\right)(u), \left(\pi_{*|m}^{-1} \circ (\tau_{ab^{-1}})_* \circ (\tau_b)_*\right)(v)\right) = g_x(u, v). \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea \bar{g} una métrica semi-riemanniana G -invariante sobre $M=G/H$. Definimos la forma bilineal

$$B: \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R} \quad B(X, Y) = \bar{g}_{x_0}(\pi_{*|m}(X), \pi_{*|m}(Y)).$$

B es $\text{ad}(H)$ -invariante:

$$\begin{aligned} B(\text{ad}(h)X, \text{ad}(h)Y) &= B\left(\left((\pi_{*|m}^{-1} \circ (\tau_h)_* \circ \pi_{*|m}\right)(X), \left((\pi_{*|m}^{-1} \circ (\tau_h)_* \circ \pi_{*|m}\right)(Y)\right)\right) = \\ &= \bar{g}_{x_0}\left(\left((\tau_h)_* \circ \pi_{*|m}\right)(X), \left((\tau_h)_* \circ \pi_{*|m}\right)(Y)\right) = \bar{g}_{h^{-1}x_0}(\pi_{*|m}(X), \pi_{*|m}(Y)) = B(X, Y). \end{aligned}$$

⊠

La idea es tratar la geometría de los espacios homogéneos G/H como una generalización de la geometría de los grupos de Lie (ya que G/H se reduce a G cuando $H = \{e\}$). Desde este punto de vista el isomorfismo $\mathfrak{m} \equiv T_{x_0}(M)$ canónico generaliza el isomorfismo canónico $\underline{G} \equiv T_e(G)$ y una métrica G -invariante sobre G/H generaliza una métrica invariante a la izquierda sobre G .

La noción de métrica bi-invariante se generaliza como sigue:

Definición 3.9.3 *Un espacio naturalmente reductivo es un espacio homogéneo reductivo $M=G/H$ dotado de una métrica G -invariante \bar{g} tal que*

$$B(X, [Z, Y]_{\mathfrak{m}}) = B([Z, X]_{\mathfrak{m}}, Y), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{m},$$

siendo B la forma bilineal simétrica no degenerada $\text{ad}(H)$ -invariante sobre el subespacio de Lie \mathfrak{m} , correspondiente a \bar{g} . El subíndice \mathfrak{m} indica la componente en \mathfrak{m} respecto a la descomposición $\underline{G} = \mathfrak{m} \oplus \underline{H}$.

Se trata en efecto de una generalización, pues para $H = \{e\}$, $\mathfrak{m} = \underline{G}$ y esta fórmula es la condición 4) de la Proposición 3.7.3.

Para determinar las geodésicas y curvatura de un espacio homogéneo naturalmente reductivo G/H en función de las geodésicas y curvatura de G , usaremos la submersión $\pi: G \rightarrow G/H$.

El subespacio de Lie \mathfrak{m} tiene un producto escalar; extendemos éste a $\underline{G} = \underline{H} \oplus \mathfrak{m}$, eligiendo un producto escalar en \underline{H} y definiendo un producto escalar en \underline{G} tal que $\underline{H} \perp \mathfrak{m}$. Este producto escalar en \underline{G} dota a G de una métrica invariante a la izquierda g para la cual los elementos de \underline{H} son verticales (tangentes a las fibras) y los elementos de \mathfrak{m} son horizontales (normales a las fibras). Con esta métrica en G y con la métrica \bar{g} (G -invariante en G/H correspondiente al producto escalar $\text{ad}(H)$ -invariante en \mathfrak{m}) $\pi: G \rightarrow G/H$ es una submersión semi-riemanniana.

Proposición 3.9.3 *Si $M = G/H$ es un espacio homogéneo naturalmente reductivo, sus geodésicas partiendo de $x_0 = \pi(e)$, están dadas por*

$$\gamma_{\pi_*(X)}(t) = \tau_{\alpha(t)}(x_0) = \pi(\alpha(t)), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde α es un subgrupo uniparamérico de $X \in \mathfrak{m}$ y $\tau_{\alpha(t)}: G/H \rightarrow G/H$ es el difeomorfismo natural, asociado a la traslación a la izquierda $L_{\alpha(t)}: G \rightarrow G$.

Demostración.- Recordemos que $\pi_{*|\mathfrak{m}}: \mathfrak{m} \rightarrow T_{x_0}(M)$ es un isomorfismo. Entonces para encontrar las geodésicas partiendo de x_0 , sólo tenemos que demostrar que, para todo $X \in \mathfrak{m}$, el subgrupo uniparamérico α asociado a X en G es una geodésica y su proyección sobre M también lo es.

Esto último es inmediato, pues

$$\frac{\bar{\nabla}(\pi \circ \alpha)'}{dt} = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{X}|_{\pi \circ \alpha} \stackrel{(1)}{=} \pi_*(\nabla_X Y)|_{\pi \circ \alpha} = 0$$

donde $\bar{\nabla}$ es la conexión en $M=G/H$ correspondiente a la métrica G -invariante, $\bar{X} = \pi_*(X)$ y ∇ la conexión en G .

Probar que α es una geodésica, por la Proposición 3.7.3, es equivalente a probar que

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Para ello, si $X, Y \in \mathfrak{m}$, $W \in \underline{G}$, la fórmula de Koszul (1.5.3)

$$2g(\nabla_X Y, W) = Xg(Y, W) + Yg(W, X) - Wg(X, Y) - g(X, [Y, W]) + g(Y, [W, X]) + g(W, [X, Y]),$$

⁽¹⁾ Esta igualdad surge de que sobre campos de vectores horizontales el producto escalar se conserva y además π conserva el corchete. Y haciendo uso de la fórmula de Koszul

queda, si $W \in \mathfrak{m}$, por la definición de naturalmente reductivo

$$2g(\nabla_X Y, W) = -B(X, [Y, W]_{\mathfrak{m}}) + B(Y, [W, X]_{\mathfrak{m}}) + g([X, Y], W) = g([X, Y], W).$$

Y si $W \in \mathfrak{H}$, como B es $\text{ad}(\mathfrak{H})$ -invariante ($B(X, [Y, W]) = B(Y, [W, X])$)

$$2g(\nabla_X Y, W) = -B(X, [Y, W]) + B(Y, [W, X]) + g([X, Y], W) = g([X, Y], W).$$

Luego, en ambos casos: $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. \(\square\)

Corolario 3.9.3.1 *Los espacios homogéneos naturalmente reductivos son completos.*

Demostración.- Los subgrupos uniparamétricos en G están definidos para toda la recta real; por la precedente proposición lo mismo ocurre para las geodésicas a través de x_0 , y , por homogeneidad, para todas las geodésicas. \(\square\)

Proposición 3.9.4 *Sea $M=G/H$ un espacio homogéneo naturalmente reductivo. Si X e Y generan un plano no degenerado en \mathfrak{m} , entonces*

$$\overline{K}_{x_0}(\pi_*(X), \pi_*(Y)) = \frac{\frac{1}{4}B([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) + B([X, Y]_{\mathfrak{H}}, X), Y)}{B(X, X)B(Y, Y) - B(X, Y)^2}$$

Demostración.- Continuando en el contexto de la proposición precedente, $\pi: G \rightarrow G/H$ es una submersión semi-riemanniana. Un resultado relativo a submersiones (O'Neill.- The fundamental equations of a submersion. Michigan Math. J. 13(1966), 459-469) afirma que

$$\overline{K}(\pi_*X, \pi_*Y) = K(X, Y) + \frac{\frac{3}{4}B([X, Y]_{\mathfrak{H}}, [X, Y]_{\mathfrak{H}})}{B(X, X)B(Y, Y) - B(X, Y)^2} \quad (3.9.1)$$

donde K es la curvatura seccional de G .

Por la proposición anterior $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ para $X, Y \in \mathfrak{m}$.

De la relación:

$$g(R(X, Y)X, Y) = g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) + g(\nabla_Y \nabla_X X, Y) - g(\nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{H}}} X, Y) - g(\nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{m}}} X, Y),$$

el segundo sumando del segundo miembro es nulo ($\nabla_X X = 0$), y los otros se transforman en:

$$\text{a) } g(\nabla_X \nabla_Y X, Y) = -g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) = \frac{1}{4}g([X, Y], [X, Y]) =$$

$$= \frac{1}{4} \langle [X, Y]_{\mathfrak{H}}, [X, Y]_{\mathfrak{H}} \rangle + \frac{1}{4}B([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]_{\mathfrak{m}}) \quad (\mathfrak{H} \perp \mathfrak{m}).$$

$$\text{b) } g(\nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{m}}} X, Y) = \frac{1}{2}g([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]) = \frac{1}{2}B([X, Y]_{\mathfrak{m}}, [X, Y]) \quad (\text{por naturalmente reductivo}).$$

$$2g(\nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{H}}} X, Y) = -g([X, Y]_{\mathfrak{H}}, [X, Y]) + g(X, [Y, [X, Y]_{\mathfrak{H}}]) + g(Y, [[X, Y]_{\mathfrak{H}}, X]) \quad (\text{fórmula de Koszul}).$$

$$\text{c) } g(\nabla_{[X, Y]_{\mathfrak{H}}} X, Y) = -\frac{1}{2}g([X, Y]_{\mathfrak{H}}, [X, Y]) + g([X, Y]_{\mathfrak{H}}, X), Y) \quad (\text{ad}(\mathfrak{H})\text{-invariante}).$$

Haciendo uso de a) b) c) y (3.9.1) se tiene el resultado enunciado. \(\square\)

3.10 Construcción de espacios simétricos

Vamos a expresar un espacio simétrico semi-riemanniano M en términos de grupos de Lie. Ya que M es homogéneo, $I(M)$ actúa transitivamente sobre M ; entonces la componente conexa de la identidad $G = I_0(M)$ es transitiva. Así M puede ser identificado con el espacio homogéneo G/H , donde H es el grupo de isotropía de un punto $x_0 \in M$.

Lema 3.10.1 Sea $M=G/H$ un espacio simétrico semi-riemanniano $G = I_0(M)$, si s_0 es una isometría global de M en x_0 , la aplicación

$$\sigma: G \rightarrow G \quad a \mapsto \sigma(a) = s_0 a s_0$$

es un automorfismo involutivo.

El conjunto $F = \{a \in G/\sigma(a) = a\}$ de puntos fijos de σ es un subgrupo cerrado de G tal que $F_0 \subset H \subset F$.

Demostración.- Ya que s_0 es involutiva, $s_0^{-1} = s_0$, también σ es un automorfismo involutivo. En consecuencia σ envía $I_0(M)$ en sí mismo, y F es un subgrupo cerrado de G .

Probemos que $H \subset F$. Si $h \in H$, la aplicación diferencial de la isometría $\sigma(h)$ en x_0 es $s_{0*} \circ h_* \circ s_{0*} = h_*$, ya que $s_{0*}(x_0) = -I$. Puesto que M es conexo, $\sigma(h) = h$. Así $H \subset F$.

Para demostrar que $F_0 \subset H$, ya que F_0 es conexo, y, por consiguiente, está generado por puntos $\alpha(t)$ de un subgrupo uniparamétrico de F_0 , así es suficiente demostrar que $\alpha(t) \in H$. Pero $\sigma(\alpha(t)) = \alpha(t)$, y entonces s_0 y $\alpha(t)$ conmutan. Así

$$s_0(\alpha(t)x_0) = \alpha(t)s_0(x_0) = \alpha(t)x_0 \quad \forall t$$

Ya que x_0 es un punto aislado de la simetría s_0 , se sigue que $\alpha(t)x_0 = x_0$ para $|t| < \varepsilon$, y entonces para todo t , $\alpha(t)$ es el grupo de isotropía de H en x_0 . \square

El siguiente resultado es clarificador a la hora de construir espacios simétricos a partir de un grupo de Lie dado.

Teorema 3.10.1 Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie conexo G . Sea σ un automorfismo involutivo de G tal que $F_0 \subset H \subset F = \{a \in G/\sigma(a) = a\}$. Entonces todo tensor métrico G -invariante sobre $M = G/H$ convierte a M en un espacio simétrico semi-riemanniano tal que $s_0 \circ \pi = \pi \circ \sigma$, donde s_0 es la simetría global de M en x_0 y $\pi: G \rightarrow M$ la proyección canónica.

Demostración.- a) Existe una única aplicación $s_0: M \rightarrow M$ tal que $s_0 \circ \pi = \pi \circ \sigma$. Si $a \in G$, entonces $s_0(\pi(a)) = \pi(\sigma(a))$, está bien definida, pues si $\pi(a_1) = \pi(a_2)$ entonces $a_1^{-1}a_2 \in H$; y como $\sigma(h) = h$, $\forall h \in H$, resulta

$$\sigma(a_1^{-1})\sigma(a_2) \in H \Rightarrow \pi(\sigma(a_1)) = \pi(\sigma(a_2)).$$

b) s_0 es un difeomorfismo.

Que s_0 es diferenciable surge de la existencia de secciones locales de la submersión π . Ya que σ es involutiva, se sigue que s_0 es involutiva, entonces $s_0^{-1} = s_0$.

c) $(s_0)_* = -I$.

Claramente $s_0(x_0) = x_0$. Si $u \in T_{x_0}(M)$, implica que existe $Y \in \underline{G}$ tal que $\sigma_*(Y) = -Y$ y $\pi_*(Y) = u$ (Ver (2) del lema siguiente). Así

$$(s_0)_*(u) = s_{0*}(\pi(Y)) = \pi_*(\sigma_*(Y)) = \pi_*(-Y) = -u.$$

d) $\tau_{\sigma(a)} = s_0 \tau_a s_0$, $\forall a \in G$.

En efecto, para todo $b \in G$,

$$(s_0 \tau_a \pi)(b) = (s_0 \pi)(ab) = \pi(\sigma(a)\sigma(b)) = (\tau_{\sigma(a)} \pi)(\sigma(b)) = (\tau_{\sigma(a)} s_0 \pi)(b).$$

e) Relativamente a todo tensor métrico G -invariante g sobre M , s_0 es una isometría.

Si $v \in T_a(\mathbf{M})$, sea $v_0 = (\tau_{a^{-1}})_*(v) \in T_{x_0}(\mathbf{M})$. Entonces usando d) y c),

$$\begin{aligned} g((s_0)_*(v), (s_0)_*(v)) &= g(s_{0*}\tau_{a*}(v_0), s_{0*}\tau_{a*}(v_0)) = g(\tau_{\sigma(a)*}s_{0*}(v_0), \tau_{\sigma(a)*}s_{0*}(v_0)) = \\ &= g(s_{0*}(v_0), s_{0*}(v_0)) = g(-v_0, -v_0) = g(v, v). \end{aligned}$$

La demostración del teorema se completa observando que si un espacio homogéneo tiene una simetría s_0 en un punto x_0 , tiene una en todo otro punto $x = \tau(x_0)$, a saber $\tau s_0 \tau^{-1}$. \square

Lema 3.10.2 Sea $\mathbf{H} \subset \mathbf{G}$ un subgrupo cerrado de un grupo de Lie \mathbf{G} . σ un automorfismo involutivo de \mathbf{G} tal que $F_0 \subset \mathbf{H} \subset F = \{a \in \mathbf{G}/\sigma(a) = a\}$. Entonces

1. $\underline{\mathbf{H}} = \{X \in \underline{\mathbf{G}}/\sigma_*(X) = -X\}$
2. $\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{H}} \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m} = \{X \in \underline{\mathbf{G}}/\sigma_*(X) = -X\}$
3. $ad(h)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$, $\forall h \in \mathbf{H}$
4. $[\underline{\mathbf{H}}, \underline{\mathbf{H}}] \subset \underline{\mathbf{H}}$ $[\underline{\mathbf{H}}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$ $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \underline{\mathbf{H}}$

Demostración.- 1) Ya que $\sigma|_{\mathbf{H}} = 1$, si $X \in \underline{\mathbf{H}}$ se tiene $\sigma_*(X) = X$.

Inversamente, supongamos $\sigma(X) = X$. Si α es el subgrupo uniparamétrico de X , entonces α y $\sigma \circ \alpha$ tienen el mismo vector tangente inicial. Pero $\sigma \circ \alpha$ es también un subgrupo uniparamétrico, entonces $\sigma \circ \alpha = \alpha$. Así α queda en F , de hecho en su componente conexa de la identidad F_0 . Ya que $F_0 \subset \mathbf{H}$, se tiene que $X \in \underline{\mathbf{H}}$.

2) Para $X \in \underline{\mathbf{G}}$, sea $X_{\underline{\mathbf{H}}} = \frac{1}{2}(X + \sigma_*(X))$ y $X_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}(X - \sigma_*(X))$. Entonces, $X = X_{\underline{\mathbf{H}}} + X_{\mathfrak{m}}$. Puesto que σ es involutivo, también lo es σ_* ; entonces $\sigma_*(X_{\underline{\mathbf{H}}}) = X_{\underline{\mathbf{H}}}$ y $\sigma_*(X_{\mathfrak{m}}) = -X_{\mathfrak{m}}$. Así $\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{H}} \oplus \mathfrak{m}$, ya que evidentemente $\underline{\mathbf{H}} \cap \mathfrak{m} = 0$.

3) Si $X \in \mathfrak{m}$ y $h \in \mathbf{H}$, debemos demostrar que $\sigma_*(ad(h)X) = -ad(h)X$. Ya que $\sigma(h) = h$, los automorfismos σ u j_h conmutan; en efecto, $\sigma(j_h(a)) = \sigma(hah^{-1}) = h\sigma(a)h^{-1}$. Así

$$\sigma_*(ad(h)X) = (\sigma \circ j_h)_*(X) = (j_h \circ \sigma)_*(X) = ad(h)\sigma_*(X) = ad(h)(-X) = -ad(h)X.$$

4) La primera inclusión se tiene ya que \mathbf{H} es un subgrupo de Lie, la segunda por ser \mathfrak{m} $ad(\mathbf{H})$ -invariante. Pero las tres son consecuencia inmediata del hecho de que $\underline{\mathbf{H}}$ y \mathfrak{m} son los subespacios propios de σ_* correspondientes a los valores propios $+1$ y -1 , respectivamente.

Por ejemplo, si $X, Y \in \mathfrak{m}$, entonces $\sigma_*[X, Y] = [\sigma_*X, \sigma_*Y] = [-X, -Y] = [X, Y]$. Entonces $[X, Y] \in \underline{\mathbf{H}}$. \square

El teorema establece que \mathbf{G}/\mathbf{H} es un espacio simétrico respecto a un tensor métrico \mathbf{G} -invariante el cual se corresponde con un producto escalar B $ad(\mathbf{H})$ -invariante sobre $\mathfrak{m} = \{X \in \underline{\mathbf{G}}/\sigma(X) = -X\}$. \mathbf{G}/\mathbf{H} es entonces un espacio homogéneo naturalmente reductivo con \mathfrak{m} como subespacio de Lie.

En efecto, de acuerdo con el lema anterior, \mathfrak{m} es $ad(\mathbf{H})$ -invariante complementario de $\underline{\mathbf{H}}$ en $\underline{\mathbf{G}}$ y la condición de naturalmente reductivo:

$$B([X, Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = B(X, [Y, Z]_{\mathfrak{m}}), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{m}$$

es trivial, ya que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \underline{\mathbf{H}}$.

En consecuencia podemos aplicar el resultado a geodésicas y curvatura obtenido para espacios homogéneos naturalmente reductivos (proposiciones 3.9.3, 3.9.4) para obtener:

Proposición 3.10.1 Sea $\mathbf{M}=\mathbf{G}/\mathbf{H}$ un espacio simétrico semi-riemanniano (obtenido de un automorfismo σ de \mathbf{G} , como en el teorema anterior).

1. Las geodésicas partiendo de $x_0 = \pi(e)$ están dadas por

$$\gamma_{\pi_*(X)}(t) = \tau_{\alpha(t)}(x_0) = \pi(\alpha(t)), \quad \forall t$$

donde α es el subgrupo uniparamétrico de $X \in \mathfrak{m}$.

2. El tensor curvatura en x_0 está dado por

$$R(u, v)w = \pi_*([[X, Y], Z])$$

donde $u, v, w \in T_{x_0}(\mathbf{M})$ correspondiente a $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, a través de π_* .

Si u y v generan un plano no degenerado, entonces

$$\overline{K}(u, v) = \frac{B([[X, Y], X], Y)}{B(X, Y)B(Y, Y) \cdot B(X, Y)^2}$$

Demostración.- 1) Se deduce de la Proposición 3.9.3, ya que \mathbf{G}/\mathbf{H} es naturalmente reductivo con subespacio de Lie $\mathfrak{m} = \{X \in \underline{\mathbf{M}}/\sigma_*(X) = -X\}$.

2) La Proposición 3.9.4 da la fórmula de la curvatura seccional, ya que $[X, Y] \in \underline{\mathbf{H}}$ para $X, Y \in \mathfrak{m}$.

La fórmula de la curvatura surge de la Proposición 1.10.2, comprobando que se verifican las tres propiedades allí requeridas para la aplicación multilineal sobre \mathfrak{m}

$$(X, Y, Z, W) \longmapsto B([[X, Y], Z], W)$$

A saber: 1) Obviamente es antisimétrica en X e Y .

2) La simetría cíclica en X, Y, Z es justamente la Identidad de Jacobi.

3) Finalmente, ya que $[X, Y] \in \underline{\mathbf{H}}$, la antisimetría en Z y W se sigue del hecho de que \mathfrak{m} y B son ambos $\text{ad}(\mathbf{H})$ -invariantes. \square

Para ilustrar la teoría, tomemos un espacio simétrico bien conocido, obtenido a partir de un grupo de Lie con un apropiado automorfismo:

Ejemplo 3.10.1 $S^n = SO(n+1)/SO(n)$.

Como esfera unidad en \mathbb{R}^{n+1} , S^n es simétrico, con simetría s_{x_0} en $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ dada por

$$(t_0, t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_0, -t_1, \dots, -t_n).$$

1) El automorfismo σ de $SO(n+1)$

$$s_{x_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma(a) = s_0 a s_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & -a_{01} & \cdots & -a_{0n} \\ \hline -a_{10} & & & \\ \vdots & & a_{ij} & \\ -a_{n0} & & & \end{array} \right) \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Así $F = \{a \in SO(n+1)/\sigma(a) = a\} = S(O(1) \times O(n))$ y F_0 es el grupo de isotropía $1 \times SO(n) \simeq SO(n)$.

2) El subespacio $\mathfrak{m} = \{X \in O(n+1)/\sigma_*(X) = -X\}$.

Ya que $s_{x_0} = s_{x_0}^{-1} \Rightarrow \sigma(a) = s_{x_0} a s_0^{-1} \Rightarrow \sigma_*(X) = s_{x_0} X s_0^{-1}$, $X \in O(n+1)$. Se sigue que \mathfrak{m} consta de las matrices de la forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t x \\ x & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

donde $\tilde{0}$ es la matriz cuadrada de orden n nula y $x \in \mathbb{R}^n$ considerado como una matriz columna. $X \leftrightarrow x$ establece una correspondencia entre \mathbb{R}^n y \mathfrak{m} .

3) La $\text{ad}(\mathbf{H})$ -invariancia de B sobre \mathfrak{m} .

A través de $X \leftrightarrow x$ el producto escalar $\langle x, y \rangle$ sobre \mathbb{R}^n se corresponde con $B(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{traza } XY$. $\mathbf{H} = SO(n) \subset SO(n+1)$ y es conocido que la traza es $\text{ad}(SO(n+1))$ -invariante.

4) Geodésicas.

Sea γ una geodésica se S^n partiendo de x_0 . Entonces $\gamma(t) = \exp(tX)x_0$, para algún $X \in \mathfrak{m}$. Calculando directamente $\gamma(t)$ usando $\exp(tX) = e^{tX}$ se obtiene que γ es el círculo máximo parametrizado por

$$(\cos t)x_0 + (\sin t) \frac{x}{\|x\|}, \quad \text{donde } X \leftrightarrow x.$$

5) Curvatura

En términos del subespacio de Lie \mathfrak{m} , se tiene que $R(X, Y)Z = [[X, Y], Z]$.

Si $u, v, w \in T_0(S^n) \simeq \mathbb{R}^n$ son los vectores que corresponde a X, Y, Z

$$[X, Y] = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad A = (u^i v^j - u^j v^i)$$

y entonces $R(X, Y)Z = \begin{pmatrix} 0 & -{}^t(Aw) \\ Aw & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow Aw$, que es justamente $\langle u, v \rangle w - \langle v, w \rangle u$.

En consecuencia, S^n tiene curvatura constante 1.

A P E N D I C E A

Diferentes enfoques de conexiones

En este apéndice expondremos varias vías para introducir el concepto de conexión lineal, sobre una variedad diferenciable \mathbf{M} , así como primeras propiedades deducidas de tales definiciones.

A1 Enfoque axiomático

El enfoque de conexiones que sigue es debido a Koszul. La definición que vamos a dar está justificada en la sección 1.5 y corresponde a la Definición 1.5.1.

Una *conexión lineal* sobre \mathbf{M} es una aplicación

$$\nabla: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M}), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y, \text{ verificando}$$

- 1) $\nabla_{X+Y}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- 2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- 3) $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X Y$
- 4) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

donde $f \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$ (función diferenciable).

Si (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas en un entorno coordinado U , y $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ son los campos de vectores coordinados, definimos las funciones Γ_{ij}^k sobre U (que llamaremos coeficientes de la conexión) por

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (1 \leq i, j \leq n). \quad (\text{A1.1})$$

Si D es la conexión natural sobre \mathbb{R}^n (ver página 9) y si $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$D_X Y - D_Y X = [X, Y].$$

Pero esto no es cierto en general. Si ∇ es una conexión lineal sobre \mathbf{M} , definimos las siguiente aplicación

$$T: \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \times \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathfrak{X}(\mathbf{M}) \quad (X, Y) \mapsto T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

Se ve fácilmente, usando las propiedades de ∇ y del corchete de campos de vectores, que T es $\mathfrak{F}(\mathbf{M})$ -lineal y, por tanto, define un campo de tensores de tipo $(1,2)$, sobre \mathbf{M} , al que se le denomina *tensor torsión*.

Respecto a un sistema coordinado $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ las componentes del campo de tensores torsión vienen dadas por las funciones

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k.$$

Se deduce que ∇ tiene torsión nula si y sólo si sus coeficientes, relativos a un sistema coordinado, son simétricos respecto de sus subíndices. Es por lo que se suele decir a veces que una conexión *sin torsión* (con tensor torsión nulo) es *simétrica*. Aunque es preferible decir conexión sin torsión, ya que cuando los coeficientes

de una conexión con torsión nula se expresan con respecto a una referencia arbitraria (distinta de la formada por los campos de vectores coordenados), entonces los coeficientes no son simétricos en general.

Si consideramos de nuevo la conexión natural D sobre \mathbb{R}^n y si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, se verifica

$$D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) = D_{[X, Y]} Z.$$

Pero, esto tampoco es cierto en general, por lo que si ∇ es una conexión lineal sobre M , definimos la siguiente aplicación, denominada *curvatura*:

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad (Z, X, Y) \mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Se trata de una aplicación $\mathfrak{F}(M)$ -lineal, por lo que define un campo de tensores de tipo $(1, 3)$.

Respecto a un sistema coordenado $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^n))$ las componentes del campo tensorial R son

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n R_{j k \ell}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

siendo

$$R_{j k \ell}^i = \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{k j}^i}{\partial x^\ell} + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{\ell j}^h \Gamma_{k h}^i - \Gamma_{k j}^h \Gamma_{\ell h}^i).$$

Para problemas locales relativos a conexiones, se pueden transformar sus propiedades a ciertas propiedades de formas diferenciales:

Sean ∇ una conexión lineal sobre una variedad diferenciable M n -dimensional, U conjunto abierto (pudiendo ser un abierto coordenado) de M y $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de campos de vectores diferenciables sobre U . Consideremos el conjunto $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ de 1-formas diferenciables sobre U , que constituyen la base dual de $\{E_1, \dots, E_n\}$ en cada punto de U .

Se denominan *formas de conexión* a las n^2 1-formas θ_j^i sobre U asociadas a ∇ y a la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ en cada punto de U por

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^n \theta_j^i(X) E_i. \quad \forall X \in \mathfrak{X}(U).$$

Las θ_j^i son lineales, por la propiedad 1) de la conexión ∇ , y son diferenciables, ya que si $X \in \mathfrak{X}(U)$, se tiene $\nabla_X E_j \in \mathfrak{X}(U)$, y en consecuencia $\theta_j^i(X) = \theta^i(\nabla_X E_j) \in \mathfrak{F}(U)$.

Las 1-formas de conexión θ_j^i están relacionadas con los coeficientes de la conexión respecto a la base $\{E_1, \dots, E_n\}$ por $\theta_k^i(E_j) = \Gamma_{j k}^i$.

Los campos de tensores torsión y curvatura pueden también expresarse a través de formas diferenciales asociadas a una base de campos de vectores $\{E_1, \dots, E_n\}$ sobre un abierto U : Definimos las 2-formas Θ y Ω (denominadas respectivamente forma torsión y forma curvatura) sobre U , si $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, por

$$T(X, Y) = \sum_{i=1}^n \Theta^i(X, Y) E_i.$$

$$R(X, Y)E_j = \sum_{i=1}^n \Omega_j^i(X, Y) E_i.$$

Las formas diferenciales $\theta^i, \theta_j^i, \Theta^i, \Omega_j^i$, están relacionadas por las ecuaciones de estructura de Cartan, que son equivalentes a la definición de los tensores torsión y curvatura. Dichas ecuaciones son (Ejercicios 36 y 37):

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \theta_j^i + \Theta^i \quad (1^{\text{a}} \text{ ecuación de estructura})$$

$$d\theta_j^i = \sum_{k=1}^n \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \Omega_j^i \quad (2^{\text{a}} \text{ ecuación de estructura})$$

A2 Enfoque tensorial o clásico

Derivada covariante de campos de vectores

Pasamos a generalizar el concepto de derivadas parciales en espacios euclídeos, a cualquier espacio con coordenadas arbitrarias.

En una variedad M , consideremos un campo de vectores diferenciable X , el cual respecto a un sistema de coordenadas locales $(U, (x^1, \dots, x^n))$ se expresa por ⁽¹⁾ $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, pues bien, las funciones diferenciables que resultan al hallar las derivadas parciales de las componentes del campo X respecto de cada una de las coordenadas en cada sistema coordinado, no constituyen, en general, las componentes de un tensor de tipo (1,1). En efecto, si $(U, (x^1, \dots, x^n))$ es otro sistema coordinado, con puntos comunes con el anterior, y respecto al cual $X = \bar{X}^i \frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}$ se sigue, teniendo en cuenta la ley de transformación relativa a este cambio de coordenadas

$$\bar{X}^i = X^j \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}, \quad (\text{A2.1})$$

que las derivadas parciales se transforman según la relación:

$$\frac{\partial \bar{X}^i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(X^\ell \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\ell} \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial X^\ell}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\ell} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} + X^\ell \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^k \partial x^\ell} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}. \quad (\text{A2.2})$$

Luego las funciones $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, no son, en general, las componentes de un tensor pues no cumplen la ley relativa al cambio de coordenadas.

Esto mismo ocurre para cualquier campo tensorial: sus derivadas ordinarias no son en general, las componentes de un tensor. Se presenta por tanto el problema de ver si es posible generalizar la operación de derivación parcial de manera que, aplicada a tensores, dé como resultado nuevos tensores. A esta nueva operación le llamaremos *derivación covariante*.

La condición que impondremos, de antemano, a esta derivación covariante es que respecto del producto de tensores se comporte como derivada ordinaria.

Comenzaremos con un campo de vectores X . De su ley de transformación relativa al cambio de coordenadas (A2.1), se deduce que las derivadas parciales se transforman según (A2.2), que no es la ley de transformación de tensores.

Se trata de ver si es posible añadir algo, lo más sencillo posible, a las derivadas ordinarias $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, para que el

⁽¹⁾Suprimiremos el símbolo del sumatorio, adoptando el convenio de Einstein, según el cual, índices en factores distintos de un mismo sumando colocados uno arriba y otro abajo, indica sumatorio en todo el rango del índice.

resultado sea un tensor.

El término que se agregue puede depender de las coordenadas (x^1, \dots, x^n) del punto donde está aplicado el vector y del vector mismo, es decir de sus componentes X^i . Por simplicidad, ensayamos el caso en que dicho término a añadir dependa linealmente de las componentes del vector; es decir, el caso en que el término a agregar a las derivadas parciales $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$, sea de la forma $\Gamma_{jk}^i X^k$, donde Γ_{jk}^i sean funciones diferenciables en U .

La suma obtenida será:

$$X_{;j}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k \quad (\text{A2.3})$$

Las n^3 funciones Γ_{jk}^i pueden ser arbitrarias, con tal que $X_{;j}^i$ sean las componentes de un tensor (en el cual el índice j será covariante; de aquí el nombre de derivada covariante). Para ello, su ley de transformación debe ser

$$\bar{X}_{;\beta}^\alpha = X_{;j}^i \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \quad \circ \quad X_{;i}^k = \bar{X}_{;\alpha}^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}$$

de donde,

$$\frac{\partial X^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k X^j = \left(\frac{\partial \bar{X}^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{X}^\beta \right) \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}$$

y usando (A2.1) y (A2.2), resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{X}^\beta}{\partial \bar{x}^\delta} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\beta} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^\delta \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^i} \bar{X}^\beta + \Gamma_{ij}^k \bar{X}^\beta \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} &= \frac{\partial \bar{X}^\gamma}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \bar{X}^\beta \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \Rightarrow \\ \left(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} - \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^\delta \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^i} \right) \bar{X}^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Expresión que tiene que ser nula para cualquier campo de vectores X (es decir, las funciones Γ_{ij}^k a obtener deben servir para cualquier campo de vectores), luego tenemos las n ecuaciones

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^\delta \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^i} \quad (\beta = 1, \dots, n).$$

De estas ecuaciones, podemos despejar las funciones $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$, como soluciones de este sistema lineal, cuyos coeficientes forman una matriz de determinante no nulo (el jacobiano de la transformación de coordenadas), obteniéndose:

$$\boxed{\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial \bar{x}^\delta \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k}} \quad (\text{A2.4})$$

Por consiguiente, si se tienen n^3 funciones Γ_{ij}^k que mediante un cambio de coordenadas, se transforman según (A2.4), las expresiones de $X_{;j}^i$ dadas por (A2.3) son las componentes de un campo de tensores de tipo (1,1), cualquiera que sea el campo de vectores X .

Dar una conexión en \mathbf{M} consiste en dar n^3 funciones Γ_{ij}^k verificando (A2.4), a las que se les denomina coeficientes de la conexión.

Al tensor de componentes $X_{;j}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k$ dadas por (A2.3), se le llama **derivada covariante** del campo de vectores X .

Utilizando ahora el principio relativo al comportamiento de la derivada covariante respecto al producto, podemos ver cómo es la derivada covariante de cualquier campo de tensores, con la misma conexión Γ_{ij}^k obtenida con un campo de vectores.

Comencemos viendo, dado que las derivadas parciales de una función sí son las componentes de un tensor, que las derivadas covariantes de una función coinciden con las derivadas parciales. En efecto:

Sea f una función y X un campo de vectores arbitrario, el producto fX es un campo de vectores, y su derivada covariante será

$$(fX^i)_{;j} = \frac{\partial(fX^i)}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i fX^k = \frac{\partial f}{\partial x^j} X^i + f \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i fX^k.$$

Pero, según el postulado admitido sobre la derivada covariante de un producto, se tiene

$$(fX^i)_{;j} = f_{;j} X^i + f X^i_{;j} = f_{;j} X^i + f \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + f \Gamma_{jk}^i X^k,$$

que comparada con la anterior, y puesto que X es arbitrario, resulta:

$$f_{;j} = \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Tratemos ahora de hallar la derivada covariante de un campo de covectores o tensor de tipo $(0,1)$; es decir, de una 1-forma. Se tiene la siguiente expresión para su derivada covariante:

Si ω es una 1-forma, su derivada covariante es el tensor de tipo $(0,2)$ de componentes

$$\omega_{j;k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^i \omega_i. \quad (\text{A2.5})$$

En efecto, para un campo de vectores arbitrario X consideremos la función definida en cada sistema coordenado por $f = X^i \omega_i$. Es fácil ver que esta definición de la función f está bien definida en todo M . Su derivada covariante coincide con las derivadas ordinarias:

$$(X^i \omega_i)_{;k} = \frac{\partial(X^i \omega_i)}{\partial x^k}.$$

Desarrollando los dos miembros de esta igualdad resulta, teniendo en cuenta el principio relativo a la derivada covariante del producto:

$$X^i_{;k} \omega_i + X^i \omega_{i;k} = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \omega_i + X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k}.$$

Y según la expresión (A2.3) de la derivada covariante de un campo de vectores, tenemos

$$\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i X^j \right) \omega_i + X^i \omega_{i;k} - \frac{\partial X^i}{\partial x^k} \omega_i - X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} = 0.$$

Es decir,

$$\left(\Gamma_{kj}^i \omega_i + \omega_{j;k} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} \right) X^j = 0$$

y, como X es arbitrario, resulta:

$$\omega_{j;k} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^k} - \Gamma_{kj}^i \omega_i.$$

El procedimiento que hemos utilizado para hallar la derivada covariante de una 1-forma, sirve para obtener la derivada covariante de cualquier tensor K . Basta multiplicar sus componentes por componentes de campos de vectores y 1-formas en número conveniente para obtener una función, y aplicar luego el hecho de que para funciones, la derivada parcial ordinaria y la derivada covariante coinciden.

Así, si K es un tensor de tipo (p, q) , consideremos q campos de vectores X_1, \dots, X_q y p 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^p$ y la función:

$$K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} X_1^{j_1} \dots X_q^{j_q} \theta_{i_1}^1 \dots \theta_{i_p}^p.$$

De donde, hallando la derivada covariante (utilizando el postulado de la derivada de un producto) y la derivada ordinaria, e igualando las relaciones obtenidas, dada la arbitrariedad de los campos y 1-formas tomados, resultará:

$$K_{j_1 \dots j_q, k}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} + \Gamma_{k\ell}^{i_\alpha} K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_\alpha - 1 \ell i_\alpha + 1 \dots i_p} - \Gamma_{kj\beta}^h K_{j_1 \dots j_\beta - 1 h j_\beta + 1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}. \quad (\text{A2.6})$$

Podemos ahora relacionar el concepto de conexión dado aquí con el enfoque axiomático dado en el párrafo anterior:

La fórmula (A1.1) definen los coeficientes de la conexión Γ_{ij}^k , los cuales están sujetos a la ley de transformación (A2.4).

Recíprocamente, dado un sistema de componentes Γ_{ij}^k para cada sistema coordenado $(U, (x^1, \dots, x^n))$ en \mathbf{M} que están sujetos a la ley de transformación (A2.4), la fórmula (A1.1) junto con las propiedades formales del comportamiento de la derivada covariante respecto al producto, definimos $(\nabla_U)XY$ para todo campo de vectores en un entorno coordenado U . Para campos de vectores X e Y en \mathbf{M} , definimos el campo de vectores $\nabla_X Y$ sobre \mathbf{M} poniendo

$$(\nabla_X Y)(x) = \left((\nabla_U)_{X_U} Y_U \right)(x)$$

donde X_U e Y_U son las restricciones de X e Y al entorno U conteniendo a x ; el término de la derecha es independiente de la elección del entorno coordenado U que contiene a x , como fácilmente se verifica, en virtud de (A2.4).

Tensores torsión y curvatura

De las relaciones (A2.4) que expresan los coeficientes de una conexión sobre una variedad \mathbf{M} , respecto a diferentes sistemas coordenados, resulta que dichos coeficientes Γ_{jk}^i no son las componentes de un tensor de tipo (1,2); sin embargo, sí es un tensor el que tiene por componentes:

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i. \quad (\text{A2.7})$$

El tensor así obtenido se denomina **tensor torsión**.

Otro tensor muy importante en una variedad con una conexión, se obtiene buscando las condiciones para que las derivadas covariantes segundas sean independientes del orden de derivación.

Consideremos, por ejemplo, el campo de vectores X y el campo de tensores de tipo (1,1) cuyas componentes son las derivadas covariantes de X , es decir, $X_{;k}^i$. Las derivadas covariantes de éste serán, según (A2.6)

$$X_{;kl}^i = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^i X^j \right)_{;l} = \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} X^j + \Gamma_{kj}^i \frac{\partial X^j}{\partial x^l} + \Gamma_{lh}^i \left(\frac{\partial X^h}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^h X^j \right) - \Gamma_{lk}^h \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} + \Gamma_{hj}^i X^j \right).$$

Análogamente, invirtiendo el orden de derivación, resulta

$$X_{;lk}^i = \frac{\partial^2 X^i}{\partial x^l \partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} X^j + \Gamma_{lj}^i \frac{\partial X^j}{\partial x^k} + \Gamma_{kh}^i \left(\frac{\partial X^h}{\partial x^l} + \Gamma_{lj}^h X^j \right) - \Gamma_{kl}^h \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^h} + \Gamma_{hj}^i X^j \right).$$

Restando miembro a miembro, resulta

$$X_{;kl}^i - X_{;lk}^i = \left(\frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^h \Gamma_{lh}^i - \Gamma_{lj}^h \Gamma_{kh}^i \right) X^j + T_{kl}^h X_{;h}^i.$$

Poniendo

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma^i_{\ell j}}{\partial x^k} + \Gamma^h_{kj} \Gamma^i_{\ell h} - \Gamma^h_{\ell j} \Gamma^i_{kh}, \quad (\text{A2.8})$$

nos queda

$$X^i_{;kl} - X^i_{;lk} = R^i_{jkl} X^j + T^h_{kl} X^i_{;h}. \quad (\text{A2.9})$$

Lo que nos permite afirmar que las n^4 funciones R^i_{jkl} son componentes de un campo de tensores, ya que en (A2.9) tanto el primer miembro como $T^h_{kl} X^i_{;h}$ son componentes de tensores para cualquier campo de vectores X .

Al tensor de tipo (1,3) de componentes R^i_{jkl} se le denomina **tensor curvatura**.

Si en vez de un campo de vectores X se parte de un campo de tensores arbitrario, al hallar las derivadas covariantes cruzadas se obtiene una expresión del tipo (A2.9). Luego, podemos afirmar:

“En general, no se puede invertir el orden en la derivada covariante”.

“Para que las derivadas covariantes segundas de cualquier campo de tensores sean independientes del orden de derivación es necesario y suficiente que los tensores de curvatura y de torsión sean nulos”.

Conexión de Riemann

A partir del producto euclídeo en \mathbb{R}^3 , usando el isomorfismo $T_p(\mathbb{R}^3) \simeq \mathbb{R}^3$, podemos realizar las operaciones básicas, como calcular la longitud de un vector tangente o los ángulos entre vectores tangentes a \mathbb{R}^3 .

La teoría de superficies en \mathbb{R}^3 , ciñéndonos a su forma clásica inspirada en los trabajos de Gauss, quién en 1827 expuso la geometría intrínseca de una superficie en \mathbb{R}^3 (es decir, la geometría observada por un habitante de ella), sólo depende del producto escalar de vectores tangentes a la superficie.

Hacia 1854, Riemann generaliza estos casos especiales e introduce la geometría sobre una variedad arbitraria n -dimensional, para lo que es necesario definir un producto interior en cada espacio tangente.

Bajo el impulso de la teoría de la relatividad general de Einstein (1915), una mayor generalización se hace necesaria: la condición de definido positivo del producto interior se debilita a solamente exigir no degenerado. Para ello definimos un **tensor métrico** g sobre una variedad M , como un campo de tensores de tipo (0,2) sobre M , simétrico, no degenerado y de índice constante. En otras palabras, g es una asignación diferenciable que a cada punto $x \in M$ le asocia un producto escalar g_x en el espacio tangente $T_x(M)$ y el índice de g_x es el mismo para todo $x \in M$. Una variedad semi-riemanniana, a la que llamaremos simplemente **espacio de Riemann**, es una variedad provista de un tensor métrico g . Como caso particular tenemos que, si el índice $\nu = 0$, se trata de una variedad de Riemann: cada g_x es un producto interior (definido positivo) sobre $T_x(M)$, y si $\nu = 1$ y $2 \leq n = \dim M$, M es una variedad de Lorentz.

Para definir una derivada covariante se necesita una conexión. Se trata de ver ahora si del tensor métrico g de un espacio riemanniano, se puede obtener una conexión que permita la operación de derivación covariante y a partir de ella, obtener un tensor curvatura.

Vamos a demostrar que tal conexión se puede obtener y que además se pueden exigir las siguientes condiciones:

- 1) Que la conexión sea simétrica; es decir, que su tensor torsión $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj}$ sea nulo.
- 2) Que la derivada covariante del tensor métrico g , $g_{ij;k}$, obtenida mediante la conexión buscada, sea nula.

Para ello supongamos 2) y de (A2.6), expresión que da la derivada covariante de un tensor arbitrario, resulta:

$$0 = g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{ki} g_{hj} - \Gamma^h_{kj} g_{ih},$$

de donde obtenemos por permutación circular

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma_{ki}^h g_{hj} + \Gamma_{kj}^h g_{ih} \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \Gamma_{ij}^h g_{hk} + \Gamma_{ik}^h g_{jh} \\ \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= \Gamma_{jk}^h g_{hi} + \Gamma_{ji}^h g_{kh}.\end{aligned}$$

Restando las dos últimas relaciones de la primera y teniendo en cuenta la condición impuesta 1), simetría de los coeficientes de la conexión, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$, resulta:

$$\Gamma_{ij}^h g_{kh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

de donde, dado que el tensor métrico g es no degenerado, podemos despejar los coeficientes Γ_{jk}^i , obteniéndose:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right), \quad (\text{A2.10})$$

donde los g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de la formada con los g_{ij} .

Por lo que si existe una conexión que cumple las condiciones 1) y 2), ella debe estar dada por (A2.10). Sólo queda por probar que estas expresiones de los Γ_{jk}^i (denominados símbolos de Christoffel de segunda especie) son de hecho las componentes de una conexión. Para lo cual, después de una transformación de coordenadas debe comportarse de acuerdo con la ley dada por las fórmulas (A2.4). Lo cual no tiene dificultad establecerlo, usando las correspondientes leyes de transformación para los coeficientes g_{ij} y g^{ij} .

Líneas geodésicas

Sean A y B dos puntos fijos en un espacio de Riemann y $x^i = x^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), las ecuaciones paramétricas de una curva \mathcal{C} que los une, obtenidos respectivamente para $t = t_0$ y $t = t_1$.

Utilizando cálculo variacional, resulta que una condición necesaria para que la curva \mathcal{C} haga que la integral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt$$

tome un valor mínimo es que la función $F(x^1, \dots, x^n, \frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}) = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}$, satisfaga a las ecuaciones

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial (x^i)'} \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Las cuales dan lugar, si se toma t como parámetro arco s , a las ecuaciones

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0.$$

Estas son las ecuaciones diferenciales de las geodésicas del espacio de Riemann.

Tensores deducidos del tensor curvatura por contracción

El tensor curvatura de un espacio de Riemann es, ver (A2.8)

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^h \Gamma_{\ell h}^i - \Gamma_{\ell j}^h \Gamma_{kh}^i,$$

donde las componentes de la conexión Γ_{jk}^i , son ahora los símbolos de Christoffel de segunda especie.

Por contracción del último índice del tensor curvatura se obtiene el tensor

$$S_{ij} = R_{ij}^h.$$

Por contracción del índice intermedio, resulta el mismo tensor salvo signo. Y, finalmente, por contracción del primer índice, resulta

$$R_{ijk}^i = \frac{\partial \Gamma_{jj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^i}{\partial x^j},$$

que se comprueba fácilmente que es nulo. Luego resulta que en un espacio de Riemann:

“Por contracción de índices del tensor curvatura se puede obtener un sólo tensor no nulo el cual es simétrico y que le denominamos **tensor de Ricci**”.

A partir del tensor de Ricci se puede construir la función, denominada **curvatura escalar** del espacio:

$$r = g^{ij} S_{ij}.$$

Otro tensor importante es el tensor gravitatorio de Einstein definido por

$$G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij},$$

el cual es simétrico y tiene la propiedad de tener la divergencia nula, o sea

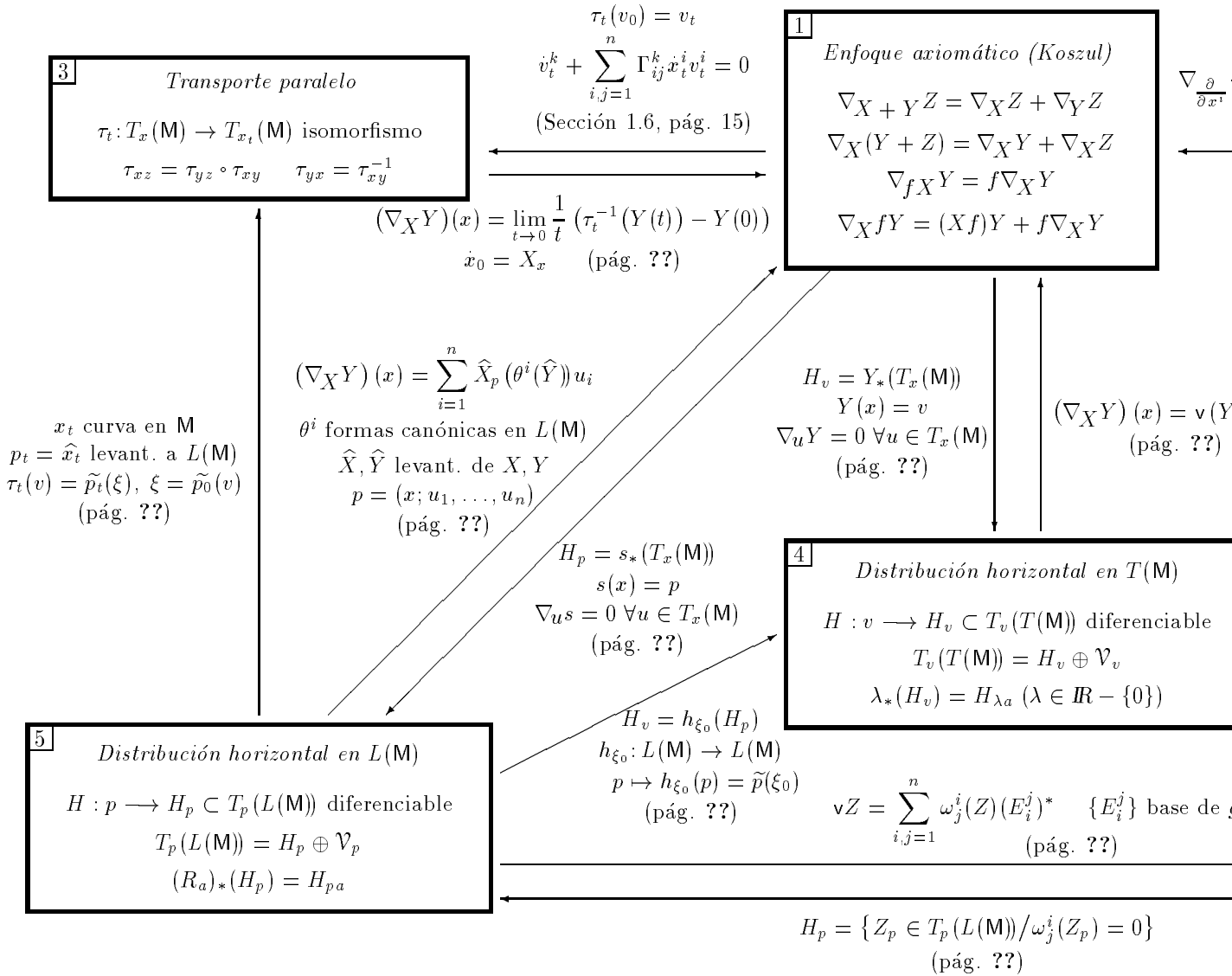
$$G_{;i}^{ij} = 0$$

donde $G^{ij} = g^{ih} g^{kj} G_{kh}$.

La demostración de este hecho, fundamental en la teoría de la relatividad general de Einstein, se lleva a cabo utilizando la llamada identidad de Bianchi, relativa a las derivadas covariantes del tensor curvatura:

$$R_{jk\ell;h}^i + R_{j\ell h;k}^i + R_{j h k;\ell}^i = 0.$$

CONEXIONES LINEALES



A P E N D I C E B

Completitud riemanniana

En este Apéndice enunciamos hechos fundamentales en variedades de Riemann (es decir, en una variedad semi-riemanniana de índice $\nu = 0$). El tensor métrico de una variedad de Riemann \mathbf{M} dota a cada espacio tangente de un producto interior, linealmente isométrico al espacio euclídeo \mathbf{R}^n . Entonces la noción de longitud de arco da lugar a la noción de distancia riemanniana entre puntos de \mathbf{M} que generaliza la distancia euclídea usual en \mathbf{R}^n . La distancia riemanniana convierte a \mathbf{M} en un espacio métrico lo que simplifica el estudio de su geometría.

B1 Lema de Gauss

La clave para el estudio de la geometría local de una variedad semi-riemanniana en las proximidades de un punto $x_0 \in \mathbf{M}$, está en la comparación con el espacio semi-euclídeo $T_{x_0}(\mathbf{M}) \cong \mathbf{R}^n$, a través de la aplicación exponencial. Hemos visto (Nota 1.8.1, página 19) que la aplicación exponencial \exp_{x_0} transforma rectas a través del origen en $T_{x_0}(\mathbf{M})$ en geodésicas radiales γ_{x_0} en \mathbf{M} pasando por x_0 . El siguiente resultado, conocido por Lema de Gauss, implica en particular que la ortogonalidad de direcciones radiales también se conserva por la \exp_{x_0} .

Proposición B1.1 (Lema de Gauss) *Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana, $x_0 \in \mathbf{M}$ y $v \in T_{x_0}(\mathbf{M})$, $v \neq 0$. Si $V_v, W_v \in T_v(T_{x_0}(\mathbf{M}))$ con V_v radial, entonces*

$$g((\exp_{x_0})_*(V_v), (\exp_{x_0})_*(W_v)) = \langle V_v, W_v \rangle.$$

Demostración.- Cuando se dice que V_v es radial significa que V_v es la multiplicación de v por un escalar. Podemos entonces, eligiendo $V_v = v$, reemplazar V_v por v .

Consideremos la aplicación biparamétrica, para $v, w \in T_{x_0}(\mathbf{M})$, siguiente:

$$\tilde{\phi}: I \times J \rightarrow T_{x_0}(\mathbf{M}) \quad (t, s) \mapsto \tilde{\phi}(t, s) = t(v + sw)$$

y su imagen exponencial en \mathbf{M} , $\phi = \exp_{x_0} \circ \tilde{\phi}$, es

$$\phi: I \times J \rightarrow \mathbf{M} \quad (t, s) \mapsto \exp_{x_0}(t(v + sw)).$$

Se tiene $\tilde{\phi}_t(1, 0) = v_v \in T_v(T_{x_0}(\mathbf{M}))$ y $\tilde{\phi}_s(1, 0) = w_v \in T_v(T_{x_0}(\mathbf{M}))$, por tanto

$$\phi_t(1, 0) = (\exp_{x_0})_*(v_v) \quad \phi_s(1, 0) = (\exp_{x_0})_*(w_v).$$

Por consiguiente, nos bastará demostrar que

$$g(\phi_t(1, 0), \phi_s(1, 0)) = \langle v, w \rangle.$$

La curva longitudinal $t \mapsto \phi(t, s)$ es una geodésica en \mathbf{M} por x_0 con vector inicial $v + sw$. Entonces

$$\frac{\nabla \phi_t}{dt} = 0, \quad g(\phi_t, \phi_t) = \langle v + sw, v + sw \rangle.$$

Ya que ϕ_t es autoparalelo, es decir $\frac{\nabla \phi_t}{dt} = 0$, y el transporte paralelo conserva el producto escalar:

$$g(\phi_t, \phi_t) = g_{x_0}(\phi_t(0, s), \phi_t(0, s)) = \langle v + sw, v + sw \rangle.$$

Por otro lado, se tiene $\frac{\nabla \phi_s}{ds} = \frac{\nabla \phi_t}{ds}$. En efecto, respecto a un sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) , poniendo $\phi^i = x^i \circ \phi$ ($i = 1, \dots, n$).

$$\begin{aligned} \phi_t &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi^k}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x^k} & \phi_s &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi^k}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \frac{\nabla \phi_t}{ds} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial^2 \phi^k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi^i}{\partial t} \frac{\partial \phi^j}{\partial s} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\nabla \phi_s}{dt} \end{aligned}$$

debido a la simetría de los subíndices e Γ_{ij}^k e igualdad de las derivadas cruzadas de funciones diferenciables reales.

Utilizando esto resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\phi_t, \phi_s) = g\left(\frac{\nabla \phi_t}{dt}, \phi_s\right) + g\left(\phi_t, \frac{\nabla \phi_s}{dt}\right) = g\left(\phi_t, \frac{\nabla \phi_t}{ds}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g(\phi_t, \phi_t) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \langle v + sw, v + sw \rangle.$$

Por tanto:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(t,0)} g(\phi_t, \phi_s) = \langle v, w \rangle, \quad \forall t$$

Ya que $\phi_s(0, 0) = 0$, resulta que

$$g_{x_0}(\phi_t(0, 0), \phi_s(0, 0)) = 0.$$

Concluimos que

$$g(\phi_t(t, 0), \phi_s(t, 0)) = t \langle v, w \rangle.$$

Tomando $t = 1$, se obtiene la igualdad buscada. \square

Nota B1.1 La aplicación exponencial conserva la longitud de vectores radiales, es por lo que se puede decir que el Lema de Gauss da un ejemplo de un tipo de isometrías parciales. Además la máxima distorsión es en las direcciones ortogonales a las direcciones radiales en $T_{x_0}(\mathbf{M})$.

B2 Longitud de arco

El familiar concepto de longitud de un segmento de curva en espacios euclídeos se generaliza a variedades semi-riemannianas como sigue:

Definición B2.1 Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ una curva diferenciable a trozos sobre una variedad semi-riemanniana \mathbf{M} , se define longitud de arco de α por

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

En coordenadas locales, y en el supuesto que la curva esté contenida en un entorno coordenado U de funciones coordenadas (x^1, \dots, x^n) , la longitud de α se expresa por

$$L(\alpha) = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} \frac{d(x^j \circ \alpha)}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Sobre una variedad de Riemann viene a ser como en un espacio euclídeo, pero para métrica indefinidas la longitud puede ser engañosa, ya que por ejemplo una curva cuyos vectores tangentes verifiquen $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$, tiene longitud nula.

Consideremos ahora los efectos sobre la longitud de una curva por un cambio de parametrización.

Definición B2.2 Una reparametrización $h: [c, d] \rightarrow [a, b]$ de una curva $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ es una función diferenciable a trozos tal que o bien $h(c) = a$, $h(d) = b$ (se dice entonces que h conserva la orientación) o $h(c) = b$, $h(d) = a$ (h invierte la orientación). Si las derivadas de h no cambian de signo entonces h es monótona.

En estos términos es fácil establecer el siguiente resultado:

Proposición B2.1 1) La longitud de un segmento de curva diferenciable a trozos es invariante por una reparametrización monótona.

2) Si α es un segmento de curva con $\|\alpha'\| > 0$, existe entonces una reparametrización h estrictamente creciente tal que $\beta = \alpha \circ h$ verifica $\|\beta'\| = 1$.

En este caso se dice que β tiene parametrización longitud de arco. □

Sea U_{x_0} un entorno normal de un punto x_0 de \mathbf{M} (Definición 1.8.3).

Definición B2.3 A la función

$$\rho: U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R} \quad y \in U_{x_0} \mapsto \rho(y) = \|\exp_{x_0}^{-1}(y)\|$$

se denomina función radio sobre \mathbf{M} en x_0 . Siendo $\exp_{x_0}: \mathcal{N}_{x_0} \rightarrow U_{x_0}$ la aplicación exponencial, difeomorfismo local de $T_{x_0}(\mathbf{M})$ en \mathbf{M} .

En términos de coordenadas normales (Definición 1.8.5) ρ se expresa por:

$$\rho(y) = \left| -\sum_{i=1}^{\nu} (y^i)^2 + \sum_{j=\nu+1}^n (y^j)^2 \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Así ρ es diferenciable excepto cuando es cero, es decir en el punto x_0 y en el cono de nulidad local de x_0 .

Proposición B2.2 Si $\rho: U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función radio sobre un entorno normal U_{x_0} de x_0 y si γ es la geodésica radial desde x_0 a $y \in U_{x_0}$, se tiene que $L(\gamma) = \rho(y)$.

Demostración.- Si $v = \gamma'(0)$, sabemos de la Proposición 1.8.1 que $v = \exp_{x_0}^{-1}(y)$ para un único $y \in U_{x_0}$. Ya que $\|\gamma'\|$ es constante, se tiene

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'\| dt = \int_0^1 \|v\| dt = \|v\| = \rho(y). \quad \square$$

En lo que queda de este Apéndice, (\mathbf{M}, g) será una variedad de Riemann; esto es, en cada espacio tangente g induce un producto interior \langle, \rangle . Así, en un entorno normal de un punto $x_0 \in \mathbf{M}$, la función radio ρ es diferenciable salvo en x_0 .

Proposición B2.3 Sea U_{x_0} un entorno normal de un punto x_0 de una variedad de Riemann \mathbf{M} . Si $y \in U_{x_0}$ entonces la geodésica radial $\gamma: [0, 1] \rightarrow U_{x_0}$ desde x_0 a y es la única curva más corta en U_{x_0} desde x_0 a y .

Demostración.- En virtud de la Proposición B2.1, la unicidad de γ debe ser interpretada salvo una reparametrización monótona. Así si $\sigma: [0, b] \rightarrow U_{x_0}$ es una curva en U_{x_0} desde x_0 a y , debemos demostrar que

a) $L(\sigma) \geq L(\gamma)$.

b) Si $L(\sigma) = L(\gamma)$, entonces σ es una reparametrización monótona de γ .

Para establecer a), consideremos la función radio ρ sobre el entorno U_{x_0} de x_0 , que es la composición

$$\rho = \tilde{\rho} \circ \exp_{x_0}^{-1},$$

donde $\tilde{\rho}: \mathcal{N}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$ es la función norma sobre $T_{x_0}(\mathbf{M})$:

$$\tilde{\rho}(v) = \|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

A diferencia de lo que ocurre en variedades semi-riemannianas resulta que ahora ρ es diferenciable excepto sólo en x_0 . Aplicando entonces la Proposición 2.5.1, relativa a hipersuperficies, para la función $f: U_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = (\rho(y))^2$, resulta que los conjuntos

$$H(r) = f^{-1}(r^2) = \{y \in U_{x_0} / \langle \exp_{x_0}^{-1}(y), \exp_{x_0}^{-1}(y) \rangle = r^2\}$$

son hipersuperficies de Riemann y $\mathbf{U} = \frac{1}{\|\text{grad} f\|} \text{grad} f$ es el campo de vectores unitario normal sobre $H(r)$. A este campo de vectores se le denomina **campo de vectores unitario radial** (local) en x_0 ; es proporcional a la imagen mediante $(\exp_{x_0})_*$ del campo de vectores posición P sobre $\exp_{x_0}^{-1}(U_{x_0}) = \mathcal{N}_{x_0} \subset T_{x_0}(\mathbf{M})$, y por tanto es tangente a todas las geodésicas radiales que parten de x_0 .

De hecho se tiene:

$$\text{grad} f = 2(\exp_{x_0})_*(P),$$

en efecto, si $v \in T_{x_0}(\mathbf{M})$

$$\begin{aligned} g(\text{grad} f, (\exp_{x_0})_*(v)) &= df((\exp_{x_0})_*(v)) = \\ &= v(f \circ \exp_{x_0}) = v(\tilde{\rho}^2) = \langle \text{grad} \tilde{\rho}^2, v \rangle = 2 \langle P, v \rangle = 2g((\exp_{x_0})_*(P), (\exp_{x_0})_*(v)), \end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades surgen de la Proposición 2.5.5 y del Lema de Gauss (pág. 89), respectivamente.

Restrinjamos ahora el campo de vectores \mathbf{U} a σ ; en cada punto $\sigma(t)$, \mathbf{U} se descompone de forma única como sigue

$$\sigma' = g(\sigma', \mathbf{U})\mathbf{U} + T$$

donde T es un campo de vectores sobre σ ortogonal a \mathbf{U} (en $t = 0$, ponemos $\mathbf{U}(0) = \sigma'(0)$ y $T(0) = 0$). Entonces

$$\|\sigma'\| = g(\sigma', \sigma')^{\frac{1}{2}} = (g(\sigma', \mathbf{U})^2 + g(T, T))^{\frac{1}{2}} \geq |g(\sigma', \mathbf{U})| \geq g(\sigma', \mathbf{U}).$$

Pero como

$$\text{grad} \rho = \text{grad} \sqrt{f} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \text{grad} f$$

y

$$\begin{aligned} f(y) &= \langle \exp_{x_0}^{-1}(y), \exp_{x_0}^{-1}(y) \rangle = \langle P_{\exp_{x_0}^{-1}(y)}, P_{\exp_{x_0}^{-1}(y)} \rangle = \\ &= g((\exp_{x_0})_*(P_{\exp_{x_0}^{-1}(y)}), (\exp_{x_0})_*(P_{\exp_{x_0}^{-1}(y)})) = g_y\left(\frac{1}{2} \text{grad} f, \frac{1}{2} \text{grad} f\right) = \frac{1}{4} \|\text{grad} f\|^2, \end{aligned}$$

resulta que

$$\mathbf{U} = \frac{\text{grad} f}{\|\text{grad} f\|} = \text{grad} \rho.$$

Así

$$\|\sigma'\| \geq g(\sigma', \mathbf{U}) = g(\sigma', \text{grad } \rho) = \sigma'(\rho) = \frac{d}{dt}(\rho \circ \sigma)$$

$$L(\sigma) = \int_0^b \|\sigma'\| dt \geq \int_0^b \frac{d}{dt}(\rho \circ \sigma) dt = \rho(\sigma(b)) - \rho(\sigma(0)) = \rho(y) = L(\gamma).$$

La última igualdad es por la Proposición B2.2.

Para demostrar b), si $L(\sigma) = L(\gamma)$, todas las desigualdades anteriores se convierten en igualdades:

$$\left. \begin{array}{l} \|\sigma'\| = g(\sigma', \mathbf{U}) \\ \sigma' = g(\sigma', \mathbf{U})\mathbf{U} + T \\ \frac{d\rho}{dt} = g(\sigma', \mathbf{U}) = |g(\sigma', \mathbf{U})| \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow T = 0 \quad \left\} \Rightarrow \sigma' = \frac{d\rho}{dt}\mathbf{U}$$

Por tanto σ es transversalmente monótona en la dirección de la geodésica radial de x_0 a y , es decir en la dirección de γ . σ es pues un reparametrización monótona de γ : $\sigma(t) = \gamma(\frac{\rho(t)}{b})$. \square

En los espacios euclídeos la distancia $d(p, q) = \|p - q\|$, puede también definirse como la longitud del segmento de línea recta que une p con q . Pero, por ejemplo, en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ no existe una línea recta desde $p = (-1, 0)$ a $q = (1, 0)$. No obstante la siguiente definición funciona en general.

Definición B2.4 *Dados dos puntos x e y en una variedad de Riemann conexa \mathbf{M} , consideremos el conjunto*

$$\mathfrak{C}(x, y) = \left\{ \alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbf{M}/\alpha \text{ es una curva diferenciable a trozos que une } x \text{ con } y \text{ } (\alpha(0) = x, \alpha(1) = y) \right\},$$

la distancia riemanniana $d(x, y)$ desde x a y es el ínfimo de $\{L(\alpha)/\alpha \in \mathfrak{C}(x, y)\}$.

Si $x_0 \in \mathbf{M}$ y $\varepsilon \in \mathbb{R} - \{0\}$ el conjunto

$$B_{x_0}(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{M}/d(x_0, x) < \varepsilon\}$$

se le llama un ε -entorno de x_0 en \mathbf{M} . Usando esta notación la proposición precedente queda mejorada como sigue:

Proposición B2.4 *Sea x_0 un punto de una variedad de Riemann \mathbf{M} .*

1. *Para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, el ε -entorno $B_{x_0}(\varepsilon)$ es normal.*
2. *Para un ε -entorno normal $B_{x_0}(\varepsilon)$ la geodésica radial γ desde x_0 a $x \in B_{x_0}(\varepsilon)$ es la única curva más corta en \mathbf{M} desde x_0 a x . Y se tiene*

$$L(\gamma) = \rho(x) = d(x_0, x).$$

Demostración.- 1) Sea U_{x_0} un entorno normal de x_0 en \mathbf{M} , con \mathcal{N}_0 un entorno normal de 0 en $T_{x_0}(\mathbf{M})$, a través de la aplicación exponencial. Para $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeño, \mathcal{N}_0 contiene un abierto estrellado

$$\mathcal{V} = \mathcal{B}_{x_0}(\varepsilon) = \{v \in T_{x_0}(\mathbf{M})/\|v\| < \varepsilon\}.$$

Así, $V = \exp_{x_0}(\mathcal{B}_{x_0}(\varepsilon))$ es también un entorno normal de x_0 .

2) Si $x \in V$, por la Proposición B2.3, la geodésica radial γ desde x_0 a x es la única curva más corta en V desde x_0 a x , y $L(\gamma) = \rho(x)$. Y ya que $\exp_{x_0}^{-1}(x) = v \in \mathcal{V}$, se tiene que $\rho(x) = \|v\| < \varepsilon$, será suficiente probar que:

“Si σ es una curva en \mathbf{M} partiendo de x_0 y permaneciendo en V , entonces $L(\sigma) \geq \varepsilon$ ”.

En efecto, esto demostrará que γ es la única curva más corta en \mathbf{M} desde x_0 a x , y consecuentemente $L(\gamma) = \rho(x)$ es $d(x_0, x)$. Así, $d(x_0, x) < \varepsilon$. Pero si $y \notin V$, entonces $d(x_0, y) \geq \varepsilon$, demostrando que V es un ε -entorno de x_0 .

Para demostrar la afirmación enunciada, nótese primeramente que por pertenecer σ a V interseca a toda esfera $S(a)$, $a < \varepsilon$. Si σ_1 es el segmento más corto inicial de σ , desde x_0 a $S(a)$, entonces σ_1 queda en V ; así la Proposición B2.3 da $L(\sigma) \geq L(\sigma_1) \geq a$, para todo $a < \varepsilon$. Por consiguiente $L(\sigma) \geq \varepsilon$. \square

Ejemplo B2.1 Geodésicas en el cilindro

El siguiente ejemplo expresa la diferencia entre un entorno normal arbitrario y un ε -entorno normal:

Un cilindro $\mathbf{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ puede considerarse como una variedad producto riemanniana $S^1 \times \mathbb{R}$.

La aplicación $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{M}$, $(u, v) \mapsto (\cos u, \sin u, v)$ es una isometría local. Por tanto, las geodésicas son curvas de la forma

$$\gamma(t) = (\cos(at + b), \sin(at + b), ct + d)$$

es decir, imagen de rectas en \mathbb{R}^2 . Ellas son hélices que, en particular, se reducen a una circunferencia cuando $c = 0$ y a una recta (generatriz del cilindro) cuando $a = 0$.

El conjunto $\mathbf{M} - \ell$, donde ℓ es una generatriz, es un abierto de \mathbf{M} que es un entorno normal de todos sus puntos. Si $p_0 \in \mathbf{M} - \ell$, por la Proposición B2.3 la geodésica radial desde p_0 a $p \in \mathbf{M} - \ell$ es la única curva más corta en $\mathbf{M} - \ell$ desde p_0 a p , pero evidentemente la geodésica τ de la figura es la curva más corta desde p_0 a p , pero no está contenida en $\mathbf{M} - \ell$.

Para todo punto $p_0 \in \mathbf{M}$, su ε -entorno normal mayor es $B_{p_0}(\pi)$. Así, por la Proposición B2.4, un segmento geodésico radial desde p_0 a un punto p desde este entorno es la única curva más corta en \mathbf{M} desde p_0 a p . Para un punto q fuera de $B_{p_0}(\pi)$ existe siempre una curva más corta desde p_0 a q , pero la unicidad se pierde si q está en la generatriz vertical opuesta a aquella en la que esté p_0 .

La siguiente proposición demuestra que d tiene las propiedades de una distancia.

Proposición B2.5 Si \mathbf{M} es una variedad de Riemann conexa, la función $d: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ de la Definición B2.4 verifica, para todo $x, y, z \in \mathbf{M}$:

- 1) $d(x, y) \geq 0$. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (definida positiva)
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simétrica)
- 3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (desigualdad triangular)

Además d es compatible con la topología de \mathbf{M} .

Demostración.- Probemos, por ejemplo la desigualdad triangular.

Dado un $\varepsilon > 0$, elijamos $\alpha \in \mathcal{C}(x, y)$ y $\beta \in \mathcal{C}(y, z)$, tales que

$$L(\alpha) < d(x, y) + \varepsilon \quad L(\beta) < d(y, z) + \varepsilon$$

Sea $\gamma \in \mathcal{C}(x, z)$ unión de las curvas α, β , se tiene

$$d(x, z) \leq L(\gamma) = L(\alpha) + L(\beta) < d(x, y) + d(y, z) + 2\varepsilon.$$

Ya que ε es arbitrario, se tiene la desigualdad.

Las otras propiedades son inmediatas. Salvo acaso que $d(x, y) = 0$ implica $x = y$. Pero si fuera $x \neq y$, ya que M es Hausdorff, existe un entorno normal U_x de x que no contiene a y . Pero U_x contiene un ε -entorno de x , así llegamos a la siguiente contradicción $d(x, y) \geq \varepsilon > 0$.

Para ver que la topología de M coincide con la topología inducida por la función distancia d , observemos que todo entorno de un punto de M contiene un ε -entorno y los ε -entornos son conjuntos abiertos de M (ver demostración de la proposición anterior). \square

B3 Variedades de Riemann completas

Enunciamos ahora, para terminar este Apéndice, unos resultados fundamentales en variedades de Riemann que relacionan la geometría riemanniana con la topología subyacente de la variedad, para más información y demostración de los mismos acudir, por ejemplo a [4],[6] o [11].

Por definición de distancia de Riemann un segmento de curva σ desde x a y en una variedad de Riemann M es el segmento de curva más corto desde x a y si y sólo si $L(\sigma) = d(x, y)$; en este caso decimos que σ es un segmento de curva **minimizante** desde x a y .

Se tiene el siguiente resultado:

Proposición B3.1 *En una variedad de Riemann un segmento de curva minimizante desde x a y es una reparametrización monótona de un segmento geodésico desde x a y .* \square

Ejemplo B3.1 Geodésicas minimizantes en la esfera $S^n(r)$.

Si p y q son puntos no antipodales en $S^n(r)$ existe una única circunferencia máxima a través de p y q . Su arco más corto es la única geodésica minimizante γ desde p a q . Si θ es el ángulo $0 < \theta < \pi$, entre p y q (como vectores de \mathbb{R}^n), se sigue que

$$d(p, q) = L(\gamma) = r\theta.$$

Por continuidad cuando q se acerca a p' (punto antipodal de p), $d(p, p') = r\pi$, Así, el entorno normal $S^n(r) - \{p'\}$ coincide con el ε -entorno $B_p(r\pi)$.

Cada semicírculo desde p a p' es una geodésica minimizante desde p a p' . Con lo que una geodésica de $S^n(r)$ es minimizante si y sólo si su longitud es a lo más $r\pi$.

El hemisferio $B_p(\frac{r\pi}{2})$ es el mayor ε -entorno de p que es un entorno normal de cada uno de sus puntos.

El teorema fundamental de las variedades de Riemann completas es el siguiente:

Proposición B3.2 (Teorema de Hopf–Rinow) *En una variedad de Riemann conexa M las siguientes condiciones son equivalentes:*

- 1) M es completo como espacio métrico relativo a la distancia riemanniana d ; esto es, toda sucesión de Cauchy es convergente.
- 2) Existe un punto $x \in M$ en el que M es geodésicamente completa; esto es, la aplicación \exp_x está definida en todo $T_x(M)$.
- 3) M es completamente geodésica.
- 4) Todo subconjunto acotado de M es compacto. \square

El siguiente resultado está estrechamente relacionado con el Teorema de Hopf–Rinow.

Proposición B3.3 *En una variedad de Riemann conexa y completa todo par de puntos pueden unirse con un segmento geodésico minimizante.* \square

A P E N D I C E C

Nota sobre geometría semi-riemanniana y órbitas planetarias

Empezamos recordando algunos conceptos de Astronomía, describiendo el fenómeno conocido como precesión de los equinoccios y citando alguna de sus consecuencias, entre las que se encuentra lo que se conoce como avance del perihelio, del cual daremos una explicación al final de esta nota desde el punto de vista de la geometría diferencial de los espacios riemannianos.

La segunda sección está dedicada a dar una somera descripción de la ecuación de Einstein, cuyas incógnitas (potenciales gravitatorios) son las componentes de un tensor métrico.

En la sección tercera, se expresa, en coordenadas polares, la ecuación de la cónica trayectoria de una partícula sometida a una fuerza central; utilizando para su determinación las ecuaciones del movimiento de la teoría clásica de Newton. Solución que es tomada como límite de las geodésicas de la geometría definida sobre el espacio-tiempo por una métrica, solución de las ecuaciones de Einstein.

En el apartado cuarto comentamos la solución de Schwarzschild a las ecuaciones de Einstein, basándonos en la adopción intuitiva de un sistema de coordenadas supeditado a la existencia de una masa con simetría esférica.

La última sección está dedicada al estudio de las geodésicas en el espacio-tiempo con la métrica obtenida por Schwarzschild, lo que nos permitirá comentar ciertas perturbaciones en las órbitas de los planetas (en particular, la de Mercurio) no explicadas por la teoría clásica de Newton y además justificar, considerando geodésicas de longitud nula, la desviación de un rayo luminoso cuando pasa junto a una gran masa.

C1 Precesión de los equinoccios

Los astros observados desde un cierto lugar de la Tierra se suponen proyectados sobre una gran esfera, a la que llamaremos **esfera celeste**, y en ella observamos el Sol, la Luna, los planetas, las estrellas y demás astros visibles durante la noche e invisibles cuando vemos al Sol.

En esta esfera consideraremos dos círculos máximos: Uno, que llamaremos **ecuador celeste**, es la intersección del plano que contiene al ecuador terrestre con dicha esfera. El otro, es la intersección del plano que contiene a la órbita terrestre, en su movimiento alrededor del Sol, con la esfera celeste, al que se le denomina **eclíptica**. Es el recorrido aparente que hace el Sol en dicha esfera.

Estos dos círculos se intersectan en dos puntos, denominados Aries y Libra (γ, Ω). El ángulo que forman los planos ecuatoriales y eclípticos es de $23^\circ 27'$, correspondiente a la inclinación del eje de la Tierra respecto a la perpendicular a su órbita.

En Astronomía se utilizan sistemas coordenados polares esféricos, ya que en general, como no se conoce la distancia que existe desde un astro al origen de coordenadas, sólo utilizamos las coordenadas ϕ, θ , las cuales nos dan la dirección en que se encuentra.

Para definir un sistema coordenado de este tipo debemos dar un círculo máximo, fijar un punto en él y dar un sentido para la medida de ángulos. Aunque en Astronomía existen diferentes formas de elegir tal sistema, aquí nos centraremos en dos, denominados coordenadas ecuatoriales absolutas y coordenadas eclípticas.

En el primer sistema se toma como círculo máximo el ecuador celeste y en él, el punto origen de medida de ángulos el punto γ (punto Aries, vernal o equinoccio de primavera), que es la posición que ocupa el Sol

cuando atraviesa el ecuador celeste. El punto γ se llama así por ser el símbolo que designaba a la constelación Aries hace unos 2000 años. En este sistema, un astro tendrá dos coordenadas: **ascensión recta** " α ", que es el arco contado sobre el ecuador a partir del punto γ hasta el meridiano que pasa por el centro de dicho astro, en sentido directo (contrario a las agujas del reloj); se mide en unidades angulares o bien en horas, minutos y segundos (0^h a 24^h) y **declinación** " δ ", que es el arco de meridiano desde el ecuador al astro, se cuenta de 0° a $+90^\circ$ y de 0° a -90° , según que el astro se encuentre sobre o debajo de él.

En el sistema de coordenadas eclípticas, el círculo máximo es la eclíptica y como punto de referencia se toma el punto Aries γ y sentido, el directo; las coordenadas en este sistema son: **longitud celeste** " λ " y **latitud celeste** " β ". Siendo la longitud celeste λ de un astro el arco de eclíptica contado desde el punto γ hasta el punto donde ella es cortada por el círculo máximo que pasa por el centro del astro y los polos de la eclíptica (puntos donde la perpendicular a la eclíptica por el centro de la Tierra corta a la esfera celeste). Y la latitud celeste β es el arco del círculo máximo que pasa por el centro del astro y por los polos de la eclíptica, contado desde la eclíptica al centro del astro.

Si observamos en épocas sucesivas una serie de estrellas y vamos anotando sus longitudes y latitudes celestes, λ y β , nos encontramos con que parece como si todas las estrellas se desplazasen en sentido directo.

Hiparco, de las observaciones realizadas por los caldeos, 600 años antes de nuestra era, dedujo un cierto valor para esta variación anual de las longitudes de las estrellas. El valor que obtuvo fue de $36''$ (el valor dado actualmente es de $50.4''$).

Podría explicarse este fenómeno de la variación de las longitudes de las estrellas, admitiendo que fuesen éstas las que se moviesen. Sin embargo, para justificar así este hecho, habría que admitir que las estrellas se mueven a unas velocidades enormes, mayores cuanto más lejos se encontrasen y además con velocidades diferentes pero originando velocidades angulares iguales alrededor del eje perpendicular a la eclíptica. Este fenómeno tiene otra explicación más convincente y que Hiparco ya pensó en ella: No es que las estrellas estén girando, sino que el punto Aries, que es origen de las longitudes celestes, se mueva en sentido contrario.

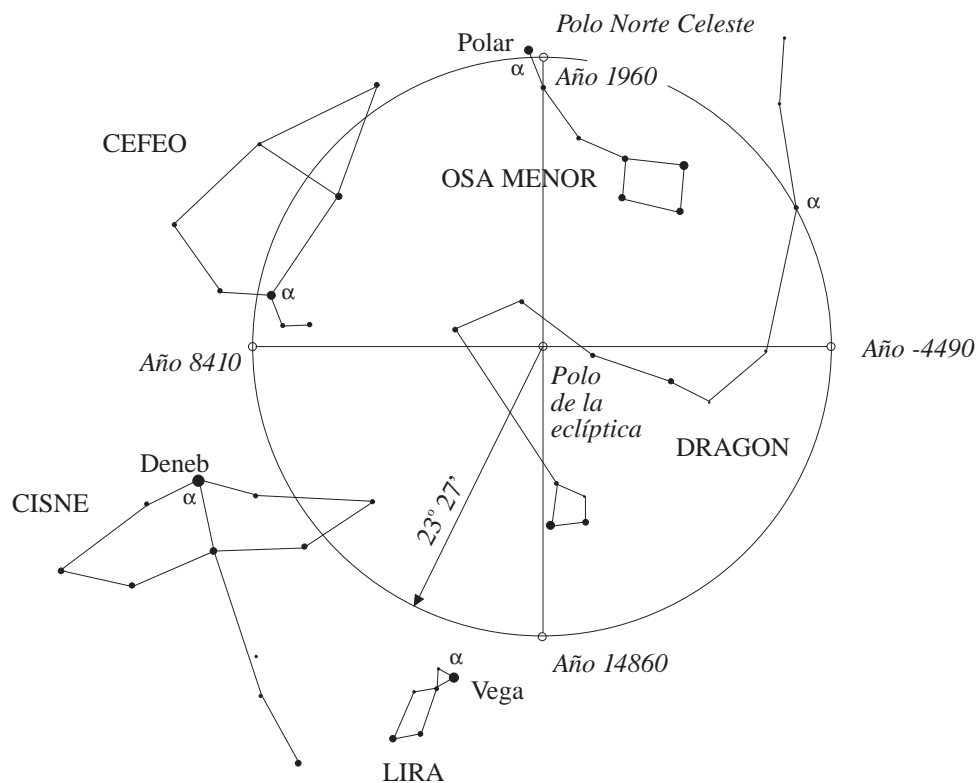
De las precisas medidas efectuadas por Hiparco en el año -141 (dio como longitud para la estrella Espiga de Virgo, $\lambda = 174^\circ 7' 30''$) se valió el astrónomo inglés Maskiline en 1802 para deducir el desplazamiento anual del punto Aries en sentido retrógrado sobre la eclíptica; midió la longitud de Espiga y obtuvo el valor $\lambda = 201^\circ 4' 41''$, con lo que resulta como desplazamiento anual del punto Aries $50''$ aproximadamente.

Este fenómeno es conocido como **precesión de los equinoccios** y es debido a la atracción que el Sol, la Luna y ligeramente los planetas ejercen sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra. Este produce un movimiento del eje de la Tierra parecido al de un trompo cuando está a punto de pararse.

Debido a la precesión se adelanta el momento del equinoccio, por tanto, al comienzo del año trópico (intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el punto Aries) el Sol coincide con γ y antes de transcurrir los 360° vuelve a encontrar a γ (le faltarán $50.4''$ para recorrer los 360°).

Este movimiento del eje terrestre hace que cada polo celeste (puntos de intersección con la esfera celeste de la prolongación del eje terrestre) describa un circunferencia, así el polo norte celeste cada vez se va proyectando en puntos distintos de la esfera celeste. Actualmente el polo norte celeste está próximo a la estrella Polar y la estrella α -Dragón fue la estrella polar hace 4600 años, y así la reconoció la antigua civilización china. El tiempo que tarda en recorrer dicho circunferencia es de 26.000 años. Actualmente la distancia de la Polar al polo norte celeste es de 1° . Todavía, durante 200 años, seguirá acercándose hasta que quede a una distancia de $30'$.

Otra consecuencia del fenómeno de precesión es el cambio de los signos zodiacales. Se conoce como **Zodiaco** la franja de esfera celeste comprendida entre dos paralelos a la eclíptica de latitudes respectivas $\pm 8^\circ$. Zona sobre la que se proyectan los planetas más cercanos. Desde la época de Hiparco esta franja se divide en doce partes de 30° grados cada una, haciéndole corresponder a cada una de ellas una constelación. Pues bien, desde la época de Hiparco (141 años antes de nuestra era) han transcurrido 2133 años por lo que, a razón de $50.4''$ por año, el punto Aries se ha movido $2133 \times 50.4'' = 107503'' \sim 30^\circ$. Esto es, se ha desplazado una constelación prácticamente y cuando el Sol se encuentra en el equinoccio de primavera o sea coincide con el punto γ , la constelación sobre la que el Sol se proyecta no es la de Aries sino la de Piscis. Sin embargo, se sigue diciendo que el Sol está en Aries, el 21 de marzo, y sucesivamente las restantes constelaciones del Zodiaco se corresponden con los otros meses del año.



Este fenómeno es el causante de lo que se conoce como avance de la dirección del perihelio (punto de la órbita terrestre en que la distancia al Sol es menor), por lo que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol no es exactamente una elipse, sino una curva generada por una elipse que a la vez gira alrededor de su foco (el centro del Sol). Trataremos de justificar esto en próximas secciones utilizando una solución de las ecuaciones de gravitación de Einstein.

C2 Ecuaciones de la gravitación de Einstein

La teoría de la relatividad especial o restringida supone que el espacio-tiempo es un espacio de Lorentz, es decir, espacio de Riemann con tensor métrico

$$g \equiv c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (\text{C2.1})$$

el cual tiene la misma expresión en todos los puntos del espacio.

La teoría de la relatividad general, conserva la propiedad fundamental de que el espacio-tiempo es un espacio de Riemann, pero supone que el tensor métrico depende de la distribución de la materia y que, por tanto, debe determinarse en cada caso. Es decir, los 10 coeficientes g_{ij} ($0 \leq i, j \leq 3$) no pueden darse de una vez para siempre, sino que deben calcularse por medio de ciertas ecuaciones, las cuales dependen de la distribución de la materia y de la energía en el espacio.

Para determinar estas ecuaciones Einstein parte de las siguientes condiciones:

1. Deben ser tensoriales. Además, tratándose de 10 funciones incógnitas, se deben tener 10 ecuaciones, con lo cual resulta que los primeros miembros de las ecuaciones deben ser componentes de un tensor de 10 componentes, en el espacio de 4 dimensiones; la única manera de que esto sea posible es que se trate de un tensor simétrico de segundo orden; lo denotaremos por G_{ij} .

2. Por analogía con las clásicas ecuaciones de Poisson de la teoría newtoniana de la gravitación, G_{ij} debe contener las derivadas parciales segundas de las funciones incógnitas g_{ij} , de ser posible linealmente por razones de simplicidad. También por analogía de la ecuación de Poisson, $\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\sigma$ (siendo $\Phi = -\mathcal{G}M/d$ el potencial gravitacional creado por una masa M a una distancia d , \mathcal{G} es la constante de gravitación universal, σ es la densidad de masa y Δ es el operador laplaciano), las ecuaciones deben ser de la forma $G_{ij} = \alpha T_{ij}$, siendo α una constante y T_{ij} un tensor simétrico llamado tensor materia-energía, que depende de la distribución de la materia y de la energía en el espacio.
3. El principio de conservación de la energía obliga a que la divergencia de T_{ij} sea nula, lo que lleva consigo que también se anule la divergencia de G_{ij} .

Con estas condiciones se demuestra que el único tensor (conocido como tensor de Einstein) que las cumple tiene por componentes

$$G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2}r g_{ij} + \lambda g_{ij},$$

donde $S_{ij} = \sum_{\ell=0}^3 R_{ij\ell}^{\ell}$ es el tensor de Ricci (contracción del tensor de curvatura) y $r = g^{ij}S_{ij}$ la curvatura escalar.

Prescindiendo del último término, que sólo interesa para problemas de tipo cosmológico (λ es una constante llamada constante cosmológica cuyo valor es despreciable para distancias no astronómicas), las ecuaciones de la gravitación de Einstein son

$$S_{ij} - \frac{1}{2}r g_{ij} = \alpha T_{ij} \quad (\text{C2.2})$$

De estas 10 ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, deben determinarse las g_{ij} , con lo cual se tendrá el tensor métrico del espacio.

Observaciones:

1. Fuera de la materia y de las regiones con energía, siendo $T_{ij} = 0$, las ecuaciones (C2.2) quedan

$$S_{ij} - \frac{1}{2}r g_{ij} = 0. \quad (\text{C2.3})$$

Multiplicando por g^{ij} y sumando respecto de i, j , teniendo en cuenta que $r = S_{ij}g^{ij}$, resulta que debe ser $r = 0$. Por tanto, fuera de la materia y energía, las ecuaciones de gravitación toman la forma simple

$$S_{ij} = 0. \quad (\text{C2.4})$$

2. Conocido el tensor métrico se puede estudiar toda la geometría del espacio-tiempo. Falta entonces — y este es el mérito de Einstein — interpretar físicamente esta geometría, estableciendo una correspondencia entre los elementos geométricos del espacio-tiempo y los fenómenos físicos del espacio tridimensional. Por ejemplo, unos primeros postulados para establecer esta correspondencia son:

- (a) Si un punto se mueve libremente, describe una geodésica en el espacio-tiempo.
- (b) Si un punto se mueve con la velocidad de la luz, la geodésica que describe es de longitud nula.

Todos estos postulados son consecuencias de las ecuaciones (C2.2).

C3 Órbitas planetarias en la teoría clásica de Newton

Antes de abordar el estudio de las órbitas planetarias desde el punto de vista de la relatividad general, comencemos repasando someramente el problema clásico de Kepler del movimiento de una partícula en el

campo gravitatorio de una masa puntual. En el marco de la ley de gravitación universal ⁽¹⁾ suponemos que una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza cuyo centro de atracción está en el origen O , es decir por

$$\vec{\mathbf{F}} = -m \frac{k}{r^2} \vec{\mathbf{u}} \quad (\text{C3.5})$$

donde k es una constante. Por la segunda ley de Newton $\vec{\mathbf{F}} = m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$, obtenemos la ecuación del movimiento

$$m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -m \frac{k}{r^2} \vec{\mathbf{u}}. \quad (\text{C3.6})$$

De la definición del momento angular $\vec{\mathbf{L}}$ de m y de su derivada

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}, \quad \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} \times m \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} + \vec{\mathbf{r}} \times m \frac{d^2 \vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = \vec{\mathbf{r}} \times (-m \frac{k}{r^2} \vec{\mathbf{u}}) = \vec{\mathbf{0}},$$

(donde se ha usado que el producto vectorial de $\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$ por si mismo y de $\vec{\mathbf{r}}$ por $\vec{\mathbf{u}}$ se anulan por ser paralelos), surge que el momento angular se conserva y

$$\vec{\mathbf{L}} = m \vec{\mathbf{h}}, \quad (\text{C3.7})$$

donde $\vec{\mathbf{h}}$ es un vector constante. Si suponemos que $\vec{\mathbf{h}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, se deduce que $\vec{\mathbf{r}}$ es siempre perpendicular a $\vec{\mathbf{h}}$, y por tanto la partícula se mueve en un plano.

En coordenadas polares, la ecuación del movimiento (C3.6) se escribe (teniendo presente el cambio de coordenadas cartesianas a polares) de la siguiente forma

$$\left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) \vec{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\phi}{dt} \right) \vec{\mathbf{u}}_2 = -\frac{k}{\rho^2} \vec{\mathbf{u}}_1 \quad (\text{C3.8})$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_1$ y $\vec{\mathbf{u}}_2$ son los vectores tangentes unitarios a las curvas de parámetros ρ y ϕ , respectivamente.

Multiplicando escalarmente por $\vec{\mathbf{u}}_2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi}$ en ambos miembros de (C3.8) e integrando resulta

$$\rho^2 \frac{d\phi}{dt} = h, \quad (\text{C3.9})$$

de donde se obtiene de nuevo la conservación del momento angular, siendo h el momento angular por unidad de masa; ya que, si consideramos el movimiento en el plano XY ,

$$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times m \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = (x, y, 0) \times m \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0 \right) = m \left(0, 0, x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = m \vec{\mathbf{h}}$$

$$h = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \rho \cos \phi \left(\frac{d\rho}{dt} \sin \phi + \rho \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \right) - \rho \sin \phi \left(\frac{d\rho}{dt} \cos \phi - \rho \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \right) = \rho^2 \frac{d\phi}{dt}.$$

La ecuación (C3.9) expresa que la velocidad aerolar es constante, que es la segunda ley de Kepler.⁽²⁾

Si multiplicamos ahora escalarmente por $\vec{\mathbf{u}}_1 = \frac{\partial}{\partial \rho}$ en ambos miembros de la ecuación (C3.8), resulta

⁽¹⁾ Ley de la gravitación universal: Dos partículas se atraen mutuamente con una fuerza directamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional a la distancia entre ellas.

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{\mathbf{u}} \quad \begin{array}{ccc} & \vec{\mathbf{u}} & \\ m_1 \xrightarrow{\quad} & \text{-----} & \xleftarrow{\quad} m_2 \\ & \vec{\mathbf{F}} & \end{array}$$

donde $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-8}$ es la constante universal de Newton y $\vec{\mathbf{u}}$ es un vector unitario.

⁽²⁾ Leyes de Kepler.

Johannes Kepler (1571-1630), haciendo un estudio cuidadoso de las tablas de posiciones de Marte en el cielo, postuló las siguientes tres leyes que llevan su nombre:

1^a. Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas.

2^a. La línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

3^a. Los cuadrados de los periodos de los planetas orbitando alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas elípticas $T_1^2/T_2^2 = R_1^3/R_2^3$.

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = -\frac{k}{\rho^2}. \quad (\text{C3.10})$$

Para obtener las trayectorias $\rho = \rho(\phi)$ de las partículas en el plano polar, introducimos la variable $u = 1/\rho$, con lo que utilizando (C3.9),

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{h}{\rho^2} \frac{du}{d\phi} = -h \frac{du}{d\phi}, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -h \frac{d^2u}{d\phi^2} \frac{d\phi}{dt} = -hu^2 \frac{d^2u}{d\phi^2},$$

sustituyendo estas expresiones en (C3.10) obtenemos la ecuación

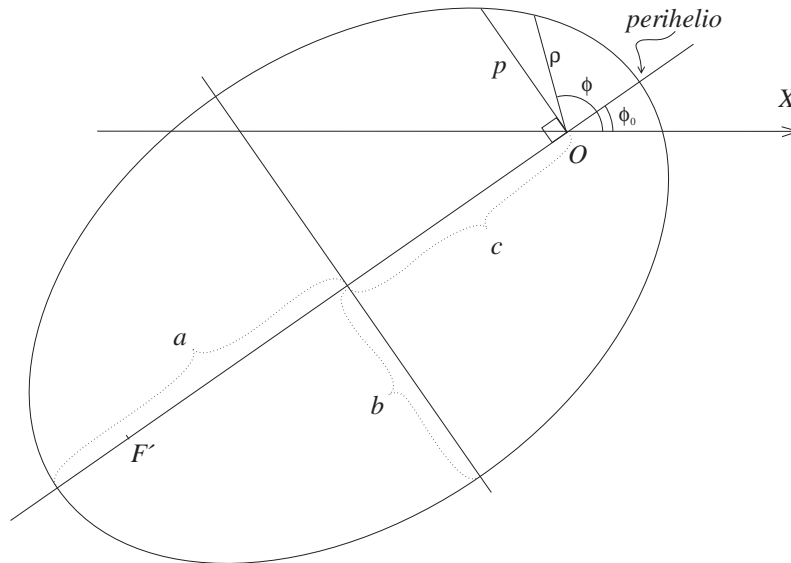
$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{k}{h^2}, \quad (\text{C3.11})$$

conocida como la ecuación diferencial de Binet, para las órbitas de una partícula. Esta ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes tiene como solución particular $u = k/h^2$ y la correspondiente ecuación homogénea (que resulta de suprimir el segundo miembro) tiene las dos soluciones independientes $\cos\phi$ y $\sin\phi$, por lo que su solución más general se escribe de la forma

$$u = C_1 \cos\phi + C_2 \sin\phi + \frac{k}{h^2},$$

e introduciendo las dos nuevas constantes C y ϕ_0 , poniendo $C_1 = C \cos\phi_0$ y $C_2 = C \sin\phi_0$, podemos poner la solución como sigue

$$u = \frac{k}{h^2} + C \cos(\phi - \phi_0) \quad \text{ó} \quad \frac{p}{\rho} = 1 + e \cos(\phi - \phi_0) \quad (\text{C3.12})$$



donde $p = h^2/k$ y $e = Ch^2/k$. Esa es la ecuación de una cónica en la que $p = b^2/a$ (siendo a y b las longitudes, en el caso de la elipse, de los semiejes mayores y menores, respectivamente) y $e = c/a$ es la excentricidad (c es la distancia focal), que para el caso de la elipse, $c < a$, es $0 < e < 1$; para la hipérbola es $e > 1$; y para la parábola $e = 1$.

Si tomamos, como caso particular, un planeta de masa m_1 y el Sol de masa m_2 , la fuerza que sobre el planeta ejerce el Sol es

$$\vec{\mathbf{F}} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{\mathbf{u}} = -m \frac{k}{r^2} \vec{\mathbf{u}}$$

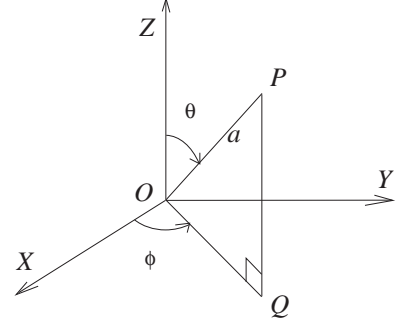
donde $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ y $k = \mathcal{G} (m_1 + m_2)$. Por lo que el movimiento de un planeta describe una elipse en la que en uno de sus focos está el Sol: esta es la primera ley de Kepler.

C4 La solución de Schwarzschild

Volviendo al espacio-tiempo de la teoría de la relatividad general, hay que decir que el sistema (C2.2) es en general imposible de integrar exactamente, debiendo hacerse de manera aproximada. Sin embargo, hay un caso simple en que la integración se logra de manera exacta, debido a ciertas simplificaciones que pueden hacerse a priori por razones de simetría. Vamos a considerar el caso de encontrar una solución de la ecuación de Einstein $S_{ij} = 0$, cuando consideramos un masa central que produce un campo gravitacional con simetría esférica, que podemos considerar como el correspondiente al Sol, fijo en el origen del sistema de referencia.

En este caso, las condiciones de simetría del problema permiten simplificarlo mucho, y la integración del sistema (C2.2), que en este caso se reduce a $S_{ij} = 0$, sistema de 10 ecuaciones no lineales en derivadas parciales en las diez funciones incógnitas g_{ij} , es posible realizarla.

Comenzamos exponiendo un método intuitivo para introducir un sistema de coordenadas en el espacio tiempo adaptado a la simetría esférica que se presupone. Por simetría esférica se entiende que existe un punto privilegiado, que llamamos origen O , tal que el sistema es invariante respecto a rotaciones espaciales alrededor de O . Entonces, si fijamos el tiempo y consideramos un punto P a una distancia a de O , las rotaciones espaciales harán que P se quede sobre una 2-esfera de centro en O y radio a . Podemos introducir unas coordenadas ϕ y θ sobre la 2-esfera de la forma usual: Trazando una perpendicular desde P a Q en el plano ecuatorial ($z = 0$), ϕ es el ángulo que OQ forma con el eje OX , y θ es el ángulo que OP forma con el eje OZ .



La métrica (o elemento de arco) sobre la 2-esfera viene dada por

$$a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{C4.13})$$

Es entonces natural suponer que en cuatro dimensiones podemos añadir a θ y ϕ una coordenada temporal t y otra radial r tal que la métrica referida a estas cuatro coordenadas se reduzca a (C4.13) sobre la 2-esfera para $t = cte$ y $r = cte$.

La simetría esférica requiere que la métrica no se altere cuando θ y ϕ varían y que θ y ϕ sólo estén presentes en la métrica en la forma $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$. Más aún, no pueden existir términos cruzados con $d\theta$ o $d\phi$ puesto que la métrica debe ser invariante respecto a las reflexiones $\theta \rightarrow \theta' = \pi - \theta$ y $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ (es decir independiente de los signos de $d\theta$ y de $d\phi$).

Esto nos conduce a admitir que en presencia de un campo gravitacional estático con simetría esférica existe un sistema de coordenadas especial $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (\tau, r, \theta, \phi)$, respecto del cual la métrica se expresa por

$$g \equiv A(\tau, r)d\tau^2 - 2B(\tau, r)d\tau dr - C(\tau, r)dr^2 - D(\tau, r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Si introducimos una nueva coordenada radial por la transformación $r \rightarrow \rho = \sqrt{D(\tau, r)}$, resulta

$$g \equiv \bar{A}(\tau, \rho)d\tau^2 - 2\bar{B}(\tau, \rho)d\tau d\rho - \bar{C}(\tau, \rho)d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Consideremos la 1-forma $\bar{A}(\tau, \rho)d\tau - \bar{B}(\tau, \rho)d\rho$. La teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias nos dice que existe un factor integrante $M(\tau, \rho)$ que hace que esta forma se convierta en diferencial exacta; usamos este resultado para introducir una coordenada temporal t , requiriendo que

$$dt = M(\tau, \rho) (\bar{A}(\tau, \rho)d\tau - \bar{B}(\tau, \rho)d\rho),$$

de donde obtenemos

$$dt^2 = M^2 (\bar{A}^2 d\tau^2 - 2\bar{A}\bar{B}d\tau d\rho + \bar{B}^2 d\rho^2) \quad \text{o bien} \quad \bar{A}d\tau^2 - 2\bar{B}d\tau d\rho = \bar{A}^{-1}M^{-2}dt^2 - \bar{A}^{-1}\bar{B}^2 d\rho^2.$$

Con lo que obtenemos la siguiente expresión para la métrica

$$g \equiv \bar{A}^{-1}M^{-2}dt^2 - (\bar{C} + \bar{A}^{-1}\bar{B}^2)d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

Definiendo las nuevas funciones μ y λ por $e^\mu = \bar{A}^{-1}M^{-2}$ y $e^\lambda = \bar{C} + \bar{A}^{-1}\bar{B}^{-2}$, se obtiene finalmente la siguiente expresión para la métrica

$$g \equiv e^\mu dt^2 - e^\lambda d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2).$$

El siguiente paso consiste en calcular las funciones μ y λ que aparecen en esta expresión de la métrica, utilizando la ecuación de Einstein en el vacío (C2.4), $S_{ij} = 0$.

Las componentes contravariantes no nulas del tensor métrico son

$$g^{00} = e^{-\mu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -\rho^{-1}, \quad g^{33} = -\rho^{-2} \sin^{-2} \theta.$$

Para escribir las ecuaciones $S_{ij} = 0$ necesitamos calcular los símbolos de Christoffel que, como $g_{ij} = 0$ para $i \neq j$, son

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right) = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad (\text{C4.14})$$

obteniéndose los siguientes valores no nulos e independientes (los subíndices indican derivadas parciales):

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \frac{1}{2} \mu_t, & \Gamma_{01}^0 &= \frac{1}{2} \mu_\rho, & \Gamma_{11}^0 &= -\frac{1}{2} e^{-\mu} e^\lambda \lambda_t, \\ \Gamma_{00}^1 &= \frac{1}{2} e^\mu e^{-\lambda} \mu_\rho, & \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} \lambda_t, & \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \lambda_\rho, & \Gamma_{22}^1 &= -\rho e^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -\rho e^{-\lambda} \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \rho^{-1}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{13}^3 &= \rho^{-1}, & \Gamma_{23}^3 &= \sin^{-1} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Conocidos estos coeficientes de la conexión, podemos ahora determinar los coeficientes del tensor curvatura

$$R_{ijk}^h = \frac{\partial \Gamma_{ik}^h}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^h}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^\ell \Gamma_{j\ell}^h - \Gamma_{ij}^\ell \Gamma_{k\ell}^h,$$

siendo los independientes y distintos de cero:

$$\begin{aligned} R_{101}^0 &= -\frac{1}{2} \mu_{\rho\rho} + \frac{1}{4} e^{\lambda-\mu} \lambda_t^2 - \frac{1}{4} e^{\lambda-\mu} \lambda_t \mu_t + \frac{1}{2} e^{\lambda-\mu} \lambda_{tt} - \frac{1}{4} \mu_\rho^2 + \frac{1}{4} \lambda_\rho \mu_\rho, \\ R_{202}^0 &= -\frac{1}{2} \rho e^{-\lambda} \mu_\rho, & R_{212}^0 &= -\frac{1}{2} \rho e^{-\mu} \lambda_t, & R_{303}^0 &= -\frac{1}{2} \rho e^{-\lambda} \sin^2 \theta \mu_\rho, & R_{313}^0 &= -\frac{1}{2} \rho e^{-\mu} \sin^2 \theta \lambda_t, \\ R_{212}^1 &= \frac{1}{2} \rho e^{-\lambda} \lambda_\rho, & R_{313}^1 &= \frac{1}{2} \rho e^{-\lambda} \sin^2 \theta \lambda_\rho, & R_{323}^2 &= -e^{-\lambda} \sin^2 \theta + \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Las componentes distintas de cero del tensor $G_j^i = g^{ik} G_{jk}$, métricamente equivalente al tensor de Einstein $G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij}$, son

$$\begin{aligned} G_0^0 &= \rho^{-1} e^{-\lambda} \lambda_\rho - \rho^{-2} e^{-\lambda} + \rho^{-2}, & G_1^0 &= \rho^{-1} e^{-\mu} \lambda_t, & G_0^1 &= \rho^{-1} e^{-\lambda} \lambda_t, & G_1^1 &= -\rho^{-1} e^{-\lambda} \mu_\rho - \rho^{-2} e^{-\lambda} + \rho^{-2}, \\ G_2^2 &= \frac{1}{2} \rho^{-1} e^{-\lambda} \lambda_\rho - \frac{1}{2} \rho^{-1} e^{-\lambda} \mu_\rho - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \mu_{\rho\rho} + \frac{1}{4} e^{-\mu} \lambda_t^2 - \frac{1}{4} e^{-\mu} \mu_t \lambda_t + \frac{1}{2} e^{-\mu} \lambda_{tt} - \frac{1}{4} e^{-\lambda} \mu_\rho^2 + \frac{1}{4} e^{-\lambda} \mu_\rho \lambda_\rho, & G_3^3 &= G_2^2. \end{aligned}$$

Ya que la anulación de los coeficientes S_{ij} equivale a la anulación de G_{ij} - ver ecuaciones (C2.3) y (C2.4) - y que la anulación de éstos equivale a la anulación de los $G_j^i = 0$, teniéndose además que $G_0^1 = e^{\lambda-\mu} G_1^0$ y que $G_2^2 = 0$ si $G_0^0 = G_1^0 = G_1^1 = 0$, sólo debemos resolver las tres ecuaciones diferenciales siguientes:

$$\frac{1}{e^\lambda} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho^2} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{e^\lambda} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) - \frac{1}{\rho^2} = 0.$$

Sumando la primera y la tercera, se tiene $\lambda_\rho + \mu_\rho = 0$ e integrando da $\lambda + \mu = p(t)$, donde p es una función arbitraria. De la segunda, obtenemos $\lambda = b(\rho)$, es decir, es sólo función de ρ ; por lo que la primera resulta ser entonces una ecuación diferencial ordinaria

$$e^{-\lambda} - \rho e^{-\lambda} \frac{d\lambda}{d\rho} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{d}{d\rho} (\rho e^{-\lambda}) = 1.$$

Integrando se llega a $\rho e^{-\lambda} = \rho + cte$. y tomando como constante de integración $-2m$, obtenemos

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)^{-1}.$$

Con lo que la métrica toma la siguiente expresión

$$g \equiv e^{p(t)}(1 - 2m/\rho)dt^2 - (1 - 2m/\rho)^{-1}d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2).$$

Haciendo el último cambio en la coordenada temporal $d\bar{t} = \sqrt{e^{p(t)}}dt$ o lo que es lo mismo $\bar{t} = \int_a^t e^{p(u)/2}du$ y prescindiendo de la barra sobre la coordenada temporal, obtenemos la métrica, solución de la ecuación de Einstein en el vacío para un sistema de simetría esférica,

$$g \equiv \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (\text{C4.15})$$

que es el elemento de arco del espacio-tiempo creado para una masa puntual inmóvil y que fue obtenida por primera vez por Schwarzschild (1916), donde m es una constante de integración. Cuando $m = 0$ estamos en la teoría de la relatividad restringida, cuando se toma la velocidad de la luz como $c = 1$.

Por aproximación de esta métrica a la de Lorentz (C2.1), se puede obtener que $g_{00} = 1 - 2m/\rho \simeq 1 + 2\Phi/c^2$, siendo $\Phi = -GM/\rho$ el potencial gravitatorio generado por la masa M a una distancia ρ , G la constante de gravitación universal y c la velocidad de la luz, con lo que $m = GM/c^2$. Cuando M es la masa del Sol, a m se le suele denominar masa geométrica del Sol.

C5 Geodésicas del espacio de Schwarzschild

La trayectoria de un punto material que se mueve libremente en el campo creado por una masa puntual fija en O serán las geodésicas correspondientes a la métrica (C4.15). Para hallarlas hay que resolver las ecuaciones

$$\frac{d^2 x^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} = 0 \quad (0 \leq k \leq 3). \quad (\text{C5.16})$$

o en coordenadas ortogonales

$$\frac{d}{ds} \left(g_{kk} \frac{dx^k}{ds} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \quad (0 \leq k \leq 3). \quad (\text{C5.17})$$

Utilizando las expresiones de los símbolos de Christoffel para coordenadas ortogonales (C4.14) y poniendo $\nu = 1 - 2m/\rho$, resulta que los Γ_{jk}^i no nulos e independientes vienen dados por

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2\nu} \frac{d\nu}{d\rho}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{\nu}{2} \frac{d\nu}{d\rho}, \quad \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{2\nu} \frac{d\nu}{d\rho}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\rho\nu, \quad \Gamma_{33}^1 = -\rho\nu \text{sen}^2\theta,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\text{sen}\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{\rho}, \quad \Gamma_{33}^3 = -\text{cotag}\theta.$$

Con lo que obtenemos cuatro ecuaciones diferenciales, usando las ecuaciones (C5.17) para $k = 0, 2, 3$ y las (C5.16) para $k = 1$:

$$k = 0 \quad \frac{d}{ds} \left(\nu \frac{dt}{ds} \right) = 0 \quad (\text{C5.18})$$

$$k = 1 \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} + \frac{\nu}{2} \frac{d\nu}{d\rho} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{2\nu} \frac{d\nu}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \rho\nu \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \rho\nu \text{sen}^2\theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0 \quad (\text{C5.19})$$

$$k = 2 \quad \frac{d}{ds} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{ds} \right) = \rho^2 \text{sen}\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 \quad (\text{C5.20})$$

$$k = 3 \quad \frac{d}{ds} \left(-\rho^2 \text{sen}^2\theta \frac{d\phi}{ds} \right) = 0 \quad (\text{C5.21})$$

de las que se trata de encontrar las funciones incógnitas $t = t(s)$, $\rho = \rho(s)$, $\theta = \theta(s)$, $\phi = \phi(s)$.

Sabemos que para la teoría de Newton las curvas solución, por (C3.7), quedan en un plano; ahora comprobemos que una solución de (C5.20), satisfaciendo la condición inicial $\frac{d\theta}{ds} = 0$ en $\theta = \pi/2$ es $\theta(s) = \pi/2$, es decir, que el movimiento queda en el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Con lo que en la relatividad general las trayectorias planas son también posibles.

Para comprobar que $\theta(s) = \pi/2$ es solución de (C5.20), basta desarrollar en serie $\theta(s)$ en $s = 0$,

$$\theta(s) = \theta_0 + \left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2\theta}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2!} + \left(\frac{d^3\theta}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{3!} + \dots$$

y comprobar que, si $\left(\frac{d\theta}{ds}\right)_0 = 0$, de la ecuación (C5.20) y de su diferenciación surge que todas las derivadas $\left(\frac{d^i\theta}{ds^i}\right)_0 = 0$, con lo que $\theta(s) = \theta_0 = \pi/2$ es solución de (C5.20).

De la ecuación (C5.18) y si sustituimos $\theta(s) = \pi/2$ en la ecuación (C5.21), resultan respectivamente las relaciones:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{C}{\nu}, \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{\rho^2} \quad (\text{C5.22})$$

donde C y h son constantes arbitrarias.

Usando (C4.15) para despejar $d\rho/ds$ de

$$\nu \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 - \rho \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = 1 \quad (\text{C5.23})$$

y sustituyendo los valores recién obtenidos para dt/ds , $d\theta/ds$ y $d\phi/ds$, resulta

$$\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = \nu^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \rho\nu \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 - \nu\rho^2 \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - \nu = \nu^2 \frac{C^2}{\nu^2} - \nu\rho^2 \frac{h^2}{\rho^4} - \nu = C^2 - \frac{\nu h^2}{\rho^2} - \nu.$$

Sustituyendo ahora, en la ecuación diferencial que nos falta por usar (C5.19), las expresiones:

$$\begin{aligned} \nu = 1 - \frac{2m}{\rho}, \quad \frac{d\nu}{d\rho} = \frac{2m}{\rho^2}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{C}{\nu}, \quad \theta(s) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \frac{d\phi}{ds} = \frac{h}{\rho^2}, \quad \frac{d^2\phi}{ds^2} = -\frac{2h}{\rho^3} \frac{d\rho}{ds}, \\ \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d\phi}{ds}, \quad \frac{d^2\rho}{ds^2} = \frac{d^2\rho}{d\phi^2} \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 + \frac{d\rho}{d\phi} \frac{d^2\phi}{ds^2}, \quad \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = C^2 - \frac{\nu h^2}{\rho^2} - \nu, \end{aligned}$$

se convierte en

$$\frac{d^2\rho}{d\phi^2} \left(\frac{h}{\rho^2}\right)^2 + \frac{d\rho}{d\phi} \left(-\frac{2h}{\rho^3} \frac{d\rho}{d\phi} \frac{h}{\rho^2}\right) + \frac{\nu}{2} \frac{2m}{\rho^2} \left(\frac{C}{\nu}\right)^2 - \frac{1}{2\nu} \frac{2m}{\rho^2} \left(C^2 - \frac{\nu h^2}{\rho^2} - \nu\right) - \rho\nu \left(\frac{h}{\rho^2}\right)^2 = 0$$

o bien

$$\frac{h^2}{\rho^4} \frac{d^2\rho}{d\phi^2} - \frac{2h^2}{\rho^5} \left(\frac{d\rho}{d\phi}\right)^2 + \frac{m}{\rho^2} - \frac{h^2}{\rho^3} + \frac{3mh^2}{\rho^4} = 0.$$

Y en esta ecuación, haciendo las sustituciones

$$\rho = \frac{1}{u}, \quad \frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}, \quad \frac{d^2\rho}{d\phi^2} = \frac{2}{u^3} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 - \frac{1}{u^2} \frac{d^2u}{d\phi^2}$$

nos queda

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \quad (\text{C5.24})$$

y esta ecuación, junto con la segunda de las ecuaciones (C5.22), nos permiten determinar las trayectorias.

Vamos a utilizar un método que nos permita dar una solución aproximada de la ecuación (C5.24) que sea suficiente para justificar el avance del perihelio observado en la órbita de Mercurio, que es de $42''$ por siglo.

Si prescindimos del término $3mu^2$, la ecuación que no queda

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} \quad (\text{C5.25})$$

es la ecuación de Binet (C3.11), y cuya integración da la solución

$$u_1 = \frac{m}{h^2}(1 + e \cos(\phi - \phi_0)) \quad (\text{C5.26})$$

donde e es la excentricidad de la cónica que ella representa y ϕ_0 es la longitud del perihelio.

Para aproximar más la solución, sustituimos esta solución en (C5.24), y nos queda

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^2}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4}e \cos(\phi - \phi_0) + \frac{3m^2}{h^4}e^2 \cos^2(\phi - \phi_0).$$

Si convenimos en simplificar esta ecuación despreciando el término que contiene e^2 , pues la órbita de los planetas es casi circular (para Mercurio $e^2 = 0.04$), y también la constante $3m^3/h^4$ que no influye en la forma de la órbita, nos queda

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{6m^3}{h^4}e \cos(\phi - \phi_0), \quad (\text{C5.27})$$

cuya solución se obtiene combinando la solución u_1 de (C5.25) con la solución de

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = \frac{6m^3}{h^4}e \cos(\phi - \phi_0). \quad (\text{C5.28})$$

Esta ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes constantes tiene como solución la suma de las soluciones correspondientes a la ecuación homogénea (sin el término independiente) $\cos \phi$ y $\sin \phi$, más la solución particular

$$\frac{1}{D^2 + 1} \frac{6m^3}{h^4} e \cos(\phi - \phi_0),$$

donde aquí D denota el operador $d/d\phi$. Apliquemos el operador $\frac{1}{D^2 + 1} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{D + i} - \frac{1}{D - i} \right)$ a la función $\cos(\phi - \phi_0) = \cos \phi_0 \cos \phi + \sin \phi_0 \sin \phi$, utilizando la expresión de la solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden ⁽³⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + 1} \cos(\phi - \phi_0) &= \frac{i}{2} \left(\frac{1}{D + i} - \frac{1}{D - i} \right) (\cos \phi_0 \cos \phi + \sin \phi_0 \sin \phi) = \\ &= \frac{i}{2} e^{-i\phi} \int e^{i\phi} (\cos \phi_0 \cos \phi + \sin \phi_0 \sin \phi) d\phi - \frac{i}{2} e^{i\phi} \int e^{-i\phi} (\cos \phi_0 \cos \phi + \sin \phi_0 \sin \phi) d\phi = \\ &= \frac{i}{2} \cos \phi_0 e^{-i\phi} \int e^{i\phi} \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} d\phi + \frac{i}{2} \sin \phi_0 e^{-i\phi} \int e^{i\phi} \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} d\phi \\ &\quad - \frac{i}{2} \cos \phi_0 e^{i\phi} \int e^{-i\phi} \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} d\phi - \frac{i}{2} \sin \phi_0 e^{i\phi} \int e^{-i\phi} \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} d\phi = \\ &= \frac{i}{4} \cos \phi_0 e^{-i\phi} \int (e^{2i\phi} + 1) d\phi - \frac{i}{4} \sin \phi_0 e^{-i\phi} \int (e^{2i\phi} - 1) d\phi \\ &\quad - \frac{i}{4} \cos \phi_0 e^{i\phi} \int (1 + e^{-2i\phi}) d\phi + \frac{i}{4} \sin \phi_0 e^{i\phi} \int (1 - e^{-2i\phi}) d\phi. \end{aligned}$$

⁽³⁾ La solución de $y' + ay = q(x)$ es $y = e^{-ax} \int q(x) e^{ax} dx$.

Calculando estas integrales inmediatas y usando de nuevo las relaciones

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}, \quad \operatorname{cos} \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$$

se llega a

$$\frac{1}{4} \operatorname{sen}(\phi + \phi_0) + \frac{1}{2} \phi \operatorname{sen}(\phi - \phi_0),$$

donde observamos que el primer sumando proporciona soluciones de los tipos $\operatorname{cos} \phi$ y $\operatorname{sen} \phi$ que ya figuran en la solución de la parte homogénea de (C5.28), por lo que la solución de esta ecuación se puede escribir bajo la forma

$$u_2 = C_1 \operatorname{cos} \phi + C_2 \operatorname{sen} \phi + \frac{3m^3}{h^4} e \phi \operatorname{sen}(\phi - \phi_0).$$

Combinando esta solución con la u_1 obtenida para (C5.25), tenemos la siguiente aproximación para la solución de (C5.24)

$$u = \frac{m}{h^2} \left(1 + e \operatorname{cos}(\phi - \phi_0) + \frac{3m^2}{h^2} e \phi \operatorname{sen}(\phi - \phi_0) \right).$$

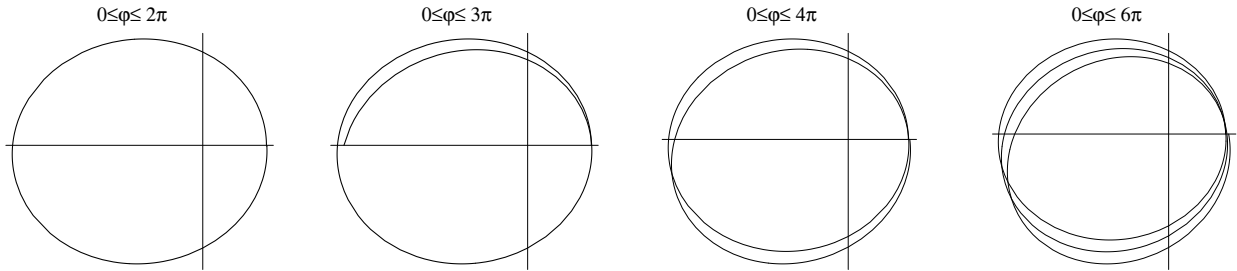
Usando la fórmula trigonométrica

$$\operatorname{cos}(\phi - \phi_0) + \frac{3m^2 \phi}{h^2} \operatorname{sen}(\phi - \phi_0) = \sqrt{1 + \left(\frac{3m^2 \phi}{h^2} \right)^2} \operatorname{cos} \left(\phi - \phi_0 - \operatorname{arctag} \left(\frac{3m^2 \phi}{h^2} \right) \right),$$

y despreciando, ya para terminar, ciertos términos, tenemos la siguiente aproximación para la solución de (C5.24)

$$u = \frac{m}{h^2} \left(1 + e \operatorname{cos} \left(\phi - \phi_0 - \frac{3m^2}{h^2} \phi \right) \right) \quad \text{ó} \quad \frac{p}{\rho} = 1 + e \operatorname{cos} \left(\phi - \phi_0 - \frac{3m^2}{h^2} \phi \right), \quad (\text{C5.29})$$

donde $p = h^2/m$. Se trata de una curva parecida a una elipse que al mismo tiempo girase alrededor del foco O .



El punto de mínima distancia a O va girando alrededor de este punto, fenómeno llamado **precesión del perihelio** o **avance del perihelio**, el cual será tanto más apreciable cuanto mayor sea la influencia del término $3mu^2$ en (C5.24), o sea cuanto menor sea la distancia al punto central. En el caso del sistema solar es sólo apreciable para el planeta Mercurio. Es éste, un fenómeno en el que la teoría de Einstein aventaja a la de Newton.

Observemos que después de un incremento de ϕ en 2π aún faltan $\frac{3m^2}{h^2} 2\pi$ radianes para llegar al perihelio; para determinar este valor en un planeta particular basta recordar (ver página 102) que si a y b son los semiejes mayor y menor de la cónica que él describe, $p = b^2/a = a(1 - e^2)$ y, por tanto, $h^2 = mp = ma(1 - e^2)$; así el avance del perihelio es

$$\frac{6\pi m^2}{h^2} = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)},$$

donde m es la masa del Sol. Para Mercurio es valor es 4.9×10^{-7} , ángulo muy pequeño para ser observado después de una revolución, pero disponiendo de los datos de observaciones de dicho planeta durante un siglo,

periodo en el que Mercurio da 415 revoluciones (88 días en cada revolución), resulta que el perihelio habrá avanzado $415 \times 4.9 \times 10^{-7}$ radianes $\simeq 45''$ por siglo.

Para determinar la trayectoria de un rayo de luz (geodésica de longitud cero) los cálculos son esencialmente los mismos que los hechos para determinar las órbitas planetarias, salvo que ahora hay que considerar, en vez de la ecuación (C5.23) para despejar $d\rho/ds$, la ecuación

$$\nu \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{\nu} \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 - \rho \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 - \rho^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{ds} \right)^2 = 0; \quad \text{de donde} \quad \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2 = C^2 - \frac{\nu h^2}{\rho^2}.$$

Con lo que efectuando en la ecuación (C5.19) las mismas sustituciones que las hechas en la página 106, con la variante del valor obtenido aquí para $(d\rho/ds)^2$, y haciendo el cambio $u = 1/\rho$, obtenemos, sin dificultad, la ecuación diferencial de las trayectorias de los rayos de luz siguiente

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3mu^2. \quad (\text{C5.30})$$

Para la relatividad especial ($m = 0$), esta ecuación se reduce a

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0,$$

cuya solución la podemos escribir bajo la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{d} \text{sen}(\phi - \phi_0),$$

que es la ecuación de una recta en coordenadas polares de distancia al origen d y que forma un ángulo ϕ_0 con el eje polar.

Si consideramos la ecuación (C5.30) completa y siguiendo el mismo método que para resolver la ecuación (C5.24), podemos obtener una solución aproximada, que ya no representa una línea recta. Físicamente, significa que los rayos luminosos deben curvarse al pasar cerca de una masa puntual, curvatura que se calcula a partir de las ecuaciones de su trayectoria. Este fenómeno ha sido comprobado experimentalmente durante los eclipses totales de Sol en 1919 y 1922.

EJERCICIOS

1. Sea B una forma bilineal simétrica sobre un espacio vectorial real E . Se consideran los siguientes subconjuntos de E

$$N = \{u \in E / B(u, v) = 0, \forall v \in E\} \quad C = \{u \in E - \{0\} / B(u, u) = 0\} \quad F = C \cup \{0\}.$$

Probar que: N es un subespacio vectorial y F no siempre es un subespacio vectorial.

$$B \text{ es no degenerada} \iff N = \{0\}.$$

$$B \text{ es definida} \iff F = \{0\}.$$

$$B \text{ es semidefinida} \iff N = F.$$

2. Sean g_i ($i = 1, 2$) productos escalares de índice 1 en un espacio vectorial E y $F_i = \{v \in E - \{0\} / g_i(v, v) = 0\}$. Entonces, si $F_1 = F_2$ se tiene $g_2 = cg_1$.
3. Si T es una traslación y H es una transformación ortogonal ambas en \mathbb{R}^3 , en general, no es lo mismo $T \circ H$ que $H \circ T$. No obstante se tiene el siguiente resultado:

Demostrar que si T_a es una traslación de vector a y H una transformación ortogonal, se tiene

$$H \circ T_a = T_{H(a)} \circ H$$

4. Demostrar que el conjunto de las isometrías euclídeas en \mathbb{R}^3 forman grupo.
Dadas las isometrías euclídeas $F = T_a \circ A$ y $G = T_b \circ B$, descomponer las isometrías $F \circ G, G \circ F, F^{-1}$ en el producto de transformaciones ortogonales por traslaciones.
5. ¿Cuál de las siguientes aplicaciones $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son isometrías euclídeas? Determinar su descomposición en el producto de transformaciones ortogonales y traslaciones, de aquellas que lo sean

$$\begin{array}{ll} a) & F(p) = -p \\ c) & F(p) = (p^3 - 1, p^2 - 2, p^1 - 3) \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) & F(p) = \langle p, a \rangle a, \|a\| = 1 \\ d) & F(p) = (p^1, p^2, 1) \end{array}$$

6. Dados los sistemas de referencias ortogonales en $p = (0, 1, 0)$:

$$B_1 \left\{ u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), u_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right), u_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

y en el punto $q = (3, -1, 1)$:

$$B_2 \left\{ v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Encontrar la isometría euclídea que transforma B_1 en B_2 .

7. En una variedad semi-riemanniana (M, g) , sea la aplicación $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, definida por la fórmula de Koszul:

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

Comprobar que para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathfrak{F}(M)$, ∇ verifica:

$$\begin{array}{ll} A_1 & \nabla \text{ es } \mathbb{R}\text{-lineal.} \\ A_2 & \nabla_f X Y = f \nabla_X Y. \\ A_3 & \nabla_X f Y = (Xf)Y + f \nabla_X Y. \\ A_4 & [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \\ A_5 & Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \end{array}$$

8. Si X e Y son dos campos de vectores con expresión local $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

y si Γ_{ij}^k son los coeficientes de una conexión lineal ∇ sobre una variedad M ,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

establecer

$$\begin{array}{l} \text{a) } \nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial Y^k}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k X^i X^j \right) \frac{\partial}{\partial x^k}. \\ \text{b) } \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{i,j,k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} + \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^\ell} \end{array}$$

en la intersección $U \cup \bar{U}$ de los abiertos de dos cartas locales $(U, (x^1, \dots, x^n))$, $(\bar{U}, (\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n))$.

9. Para un sistema de coordenadas ortogonal las ecuaciones diferenciales de las geodésicas vienen dadas por

$$\frac{d}{ds} \left(g_{kk} \frac{dx^k}{ds} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \left(\frac{dx^i}{ds} \right)^2 \quad (1 \leq k \leq n).$$

10. Las curvas paramétricas de una superficie $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ de clase $n > 2$ son geodésicas si y sólo si $\Gamma_{22}^1 = 0$ y $\Gamma_{11}^2 = 0$, respectivamente.
11. Probar que toda curva es una geodésica de la superficie generada por sus binormales.
12. Probar que la proyección desde el centro de una esfera sobre otra esfera concéntrica de diferente radio aplica geodésicas en líneas geodésicas, aunque no es una isometría.
13. Sea una superficie de ecuación $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ cuya primera forma fundamental es $I = du^2 + f(u, v)dv^2$. Probar que las curvas $v = cte.$ son geodésicas.
14. Sea $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$ una geodésica en una superficie $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g_{22}(u^1)$.
Probar que $\sqrt{g_{22}} \cos \theta = cte.$, siendo θ el ángulo que forma la geodésica con las curvas $u^1 = cte.$
15. Sea $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ una superficie de clase ≥ 2 tal que $g_{11} = g_{11}(u^1)$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = g_{22}(u^1)$. Probar que:
- a) Las curvas coordenadas $u^2 = cte.$ son geodésicas.

- b) Las curvas coordenadas $u^1 = cte.$ son geodésicas si y sólo si $\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} |_{u_0^1} = 0$.
- c) La curva $\vec{\alpha}(u^1) = \vec{x}(u^1, u^2(u^1))$ es geodésica si y sólo si

$$u^2 = \pm \int \frac{c\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}\sqrt{g_{22} - c^2}} du^1.$$

16. Probar que en una superficie de revolución todos los meridianos son geodésicos, pero para que el paralelo que pasa por un punto P de un meridiano sea geodésico es necesario y suficiente que la tangente al meridiano en P sea paralela al eje de revolución.
17. Hallar las geodésicas del plano dado en coordenadas polares.
18. Si una geodésica en una superficie de revolución forma un ángulo θ con los meridianos a lo largo de la geodésica, entonces se verifica que

$$u \operatorname{sen} \theta = cte. \quad (\text{siendo } u \text{ el radio del paralelo})$$

19. Probar que las curvas de la familia $v^3/u^2 = cte.$ son geodésicas sobre la superficie de primera forma fundamental

$$I = v^2 du^2 - 2uv du dv + 2u^2 dv^2$$

20. Sea la parametrización de la esfera de radio a

$$\vec{x}(\theta, \phi) = (a \cos \theta \cos \phi, \quad a \cos \theta \operatorname{sen} \phi, \quad a \operatorname{sen} \theta)$$

Calcular la derivada covariante respecto a ϕ del campo de vectores unitario formado por las tangentes unitarias a los meridianos a lo largo del paralelo $\theta = \theta_0$.

21. Sea $\vec{\alpha}$ una curva alabeada. Consideremos la superficie generada por las binormales: $\vec{x}(u, s) = \vec{\alpha}(s) + u\vec{b}(s)$. Calcular las derivadas covariantes a lo largo de las curvas coordenadas del campo de vectores tangente unitario a las líneas paramétricas $s = cte.$
22. Sea \mathcal{C} el paralelo $\theta = \theta_0$ sobre la esfera de ecuación:

$$\vec{x}(\theta, \phi) = (a \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad a \cos \theta)$$

- A) Probar que el transporte paralelo del vector $\vec{x}_1(\theta_0, \phi)$ a lo largo de \mathcal{C} es

$$Y(\phi) = \cos((\cos \theta_0)(\phi - \phi_0)) \vec{x}_1 - \frac{\operatorname{sen}((\cos \theta_0)(\phi - \phi_0))}{\operatorname{sen} \theta_0} \vec{x}_2.$$

- B) $Y(0) = Y(2\pi) \Rightarrow \mathcal{C}$ es el ecuador.

23. Consideremos la esfera

$$\vec{x}(u^1, u^2) = (\cos u^2 \cos u^1, \quad \cos u^2 \operatorname{sen} u^1, \quad \operatorname{sen} u^2)$$

Se desplaza paralelamente el vector de componentes $(1,0)$ desde el punto de coordenadas $(0,0)$ hasta el punto $(\pi/\sqrt{2}, 0)$ a lo largo del ecuador, luego hasta el punto $(\pi/\sqrt{2}, \pi/4)$ a lo largo del meridiano $u^1 = \pi/\sqrt{2}$, después hasta el punto $(0, \pi/4)$ a través del paralelo $u^2 = \pi/4$, y por último hasta el punto inicial por el meridiano $u^1 = 0$. Determinar el ángulo entre el vector dado y el vector obtenido al final del desplazamiento.

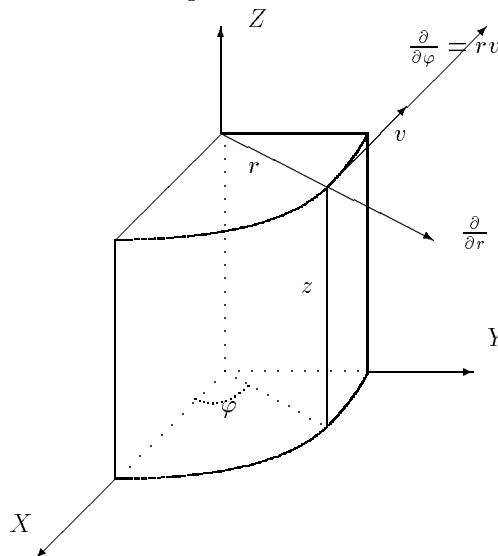
24. Coordenadas cilíndricas en \mathbb{R}^3 . Sean r, φ, z las coordenadas cilíndricas usuales en \mathbb{R}^3 . (r, φ, z) es un sistema coordinado sobre $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq 0, y = 0\}$. Estas funciones coordenadas están bien definidas y sus aplicaciones inversas y campos de vectores básicos tienen la siguiente expresión:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \varphi, \quad z = z$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = r v, \quad v = -\operatorname{sen} \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}$$



Demostrar que que el campo de vectores $\frac{\partial}{\partial z}$ es paralelo y que los campos $\frac{\partial}{\partial r}$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ son paralelos a lo largo de las rectas paralelas al eje Z .

25. Se define la diferencial covariante de un campo tensorial A de tipo (r, s) sobre una variedad diferenciable M , como el campo de tensores de tipo $(r, s + 1)$, ∇A , tal que

$$(\nabla A)(X_1, \dots, X_s, X, \theta^1, \dots, \theta^r) = (\nabla_X A)(X_1, \dots, X_s, \theta^1, \dots, \theta^r)$$

para todo $X, X_i \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta^j \in \Omega^1(M)$.

Comprobar que, si respecto a un sistema coordinado las componentes de A son $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$, las de ∇A vienen dadas por

$$A_{j_1 \dots j_s, k}^{i_1 \dots i_r} = \frac{\partial A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} + \sum_{\alpha=1}^r \left(\sum_{\ell=1}^n \Gamma_{k\ell}^{i_\alpha} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} \ell i_{\alpha+1} \dots i_r} \right) - \sum_{\beta=1}^s \left(\sum_{h=1}^n \Gamma_{kj\beta}^h A_{j_1 \dots j_{\beta-1} h j_{\beta+1} \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \right).$$

26. Si Y es un campo de vectores sobre una curva α , entonces

$$\frac{\nabla Y}{dt}(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_t^{-1}(Y(s+t)) - Y(s))$$

donde τ_t es el desplazamiento paralelo a lo largo de la curva α de $\alpha(s)$ a $\alpha(s+t)$.

27. En una variedad M con una conexión ∇ , respecto a un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , definimos las componentes del tensor curvatura por

$$R \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n R_{jkl}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Entonces

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{\ell j}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^\ell} + \sum_{h=1}^n (\Gamma_{\ell j}^h \Gamma_{kh}^i - \Gamma_{kj}^h \Gamma_{\ell h}^i).$$

28. Sea $F: M \rightarrow \bar{M}$ una aplicación diferenciable entre variedades semi-riemannianas (M, g) y (\bar{M}, \bar{g}) . Para sistemas coordenados (x^1, \dots, x^n) alrededor de x y $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ alrededor de $F(x)$, probar que $F_*(x)$ conserva los productos escalares si y sólo si, para todo $i, j = 1, \dots, n$

$$g_{ij}(x) = \sum_{k, \ell=1}^n \bar{g}_{k\ell}(F(x)) \frac{\partial(\bar{x}^k \circ F)}{\partial x^i}(x) \frac{\partial(\bar{x}^\ell \circ F)}{\partial x^j}(x).$$

29. Sea M una superficie semi-riemanniana. Respecto a su sistema coordenado (u, v) , las componentes de su tensor métrico las denotamos por

$$E = g_{11} = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right), \quad F = g_{12} = g_{21} = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad G = g_{22} = g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right), \quad Q = EG - F^2.$$

Entonces los símbolos de Christoffel vienen dados por

$$\begin{aligned} Q\Gamma_{11}^1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{vmatrix} & Q\Gamma_{12}^1 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_v & F \\ \frac{1}{2}G_u & G \end{vmatrix} & Q\Gamma_{22}^1 &= \begin{vmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & F \\ \frac{1}{2}G_v & G \end{vmatrix} \\ Q\Gamma_{11}^2 &= \begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{vmatrix} & Q\Gamma_{12}^2 &= \begin{vmatrix} E & \frac{1}{2}E_v \\ F & \frac{1}{2}G_u \end{vmatrix} & Q\Gamma_{22}^2 &= \begin{vmatrix} E & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & \frac{1}{2}G_v \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Ya que el espacio tangente $T_x(M)$ es bidimensional, la curvatura seccional K es una función definida sobre M , llamada **curvatura de Gauss**.

Demostrar que si (u, v) es un sistema de coordenadas ortogonal ($F = 0$):

$$\text{a) } \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{E_u}{2E} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{E_v}{2G} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{G_u}{2E} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{G_v}{2G} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{E_v}{2E} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{G_u}{2G} \frac{\partial}{\partial v},$$

- b) Si $\epsilon = |E|^{1/2}$, $g = |G|^{1/2}$ y $\epsilon_1 = \pm 1$ signo de E y ϵ_2 signo de G , entonces

$$K = -\frac{1}{\epsilon g} \left(\epsilon_1 \left(\frac{g_u}{\epsilon}\right)_u + \epsilon_2 \left(\frac{e_v}{g}\right)_v \right).$$

30. En virtud de las propiedades de simetría de tensor curvatura de Riemann-Christoffel, $R \in \mathfrak{T}_4^0(M)$, sus n^4 componentes R_{ijkl} no son todas independientes. Probar que el número de componentes independientes es

$$\frac{1}{12}n^2(n^2 - 1).$$

31. Probar la segunda identidad de Bianchi

$$\mathfrak{S}_{X,Y,Z} (\nabla_Z R)(X, Y) = 0 \quad \text{o bien} \quad R_{j k \ell; h}^i + R_{j \ell h; k}^i + R_{j h k; \ell}^i = 0,$$

donde \mathfrak{S}_{XYZ} significa suma cíclica y el ";" indica derivada covariante.

32. El tensor gravitatorio de Einstein sobre una variedad semi-riemanniana (M, g) es el campo tensorial $G \in \mathfrak{T}_2^0(M)$, cuyas componentes vienen dadas por

$$G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2}r g_{ij},$$

donde S es el tensor de Ricci y r la curvatura escalar.

Probar que G es simétrico, $\text{div } G = 0$ (G es conservativo) y $S = G + \frac{1}{2}\mathcal{C}_{12}Sg$.

33. Considerar la superficie cuyo elemento de arco es $ds^2 = du^2 + G dv^2$, probar que en ella, se tiene (ver notación en Ejercicio 29)

$$K = -\frac{R_{1212}}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} \quad (\text{curvatura de Gauss})$$

$$S_{ij} = -K g_{ij} \quad (\text{tensor de Ricci}); \quad r = -2K \quad (\text{curvatura escalar}).$$

34. Sea g un tensor métrico definido en una variedad M . Respecto a un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) , las componentes $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ de g , determinan una matriz no singular en cada punto. La matriz inversa la denotamos por (g^{ij}) . Verificar que las funciones g^{ij} son las componentes de un tensor de tipo $(2, 0)$, y que la diferencial covariante de dicho tensor, respecto a la conexión de Levi-Civita en (M, g) , es nula.

35. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana y $\{E_1, \dots, E_n\}$ una referencia ortonormal, pongamos $X = E_1$ y Π_i es la sección plana generada por X y E_i ($i = 2, \dots, n$). Demostrar que $S(X, X) = \varepsilon_1 \sum_{i=2}^n K(\Pi_i)$, donde S es el campo de tensores curvatura de Ricci y $K(\Pi_i)$ es la curvatura seccional.

36. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita sobre una variedad de Riemann (M, g) . Consideremos en un entorno abierto U de M un campo de referencias $\{E_1, \dots, E_n\}$ y sus correspondientes 1-formas duales $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$, definimos las formas de conexión θ_j^k por

$$\theta_j^k(E_i) = \Gamma_{ij}^k,$$

siendo Γ_{ij}^k los símbolos de Christoffel en U respecto a $\{E_1, \dots, E_n\}$; o sea $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$. Establecer

$$\begin{aligned} \nabla_X E_i &= \sum_{k=1}^n \theta_i^k(X) E_k \\ d\theta^i &= \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \theta_j^i && (1^{\text{a}} \text{ ecuación de estructura}) \\ dg_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ki}) \end{aligned}$$

donde $g_{ij} = g(E_i, E_j)$.

En particular, si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una referencia ortonormal

$$d\theta^i = \sum_{j=1}^n \theta^j \wedge \theta_j^i, \quad \theta_j^k + \theta_k^j = 0.$$

37. Sea U un entorno abierto en una variedad semi-riemanniana (M, g) tal que sobre U está definido un campo de referencias $\{E_1, \dots, E_n\}$ y sus 1-formas duales $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$. Si R_{ikl}^j son las componentes del tensor curvatura respecto a esta referencia; es decir,

$$R(E_k, E_l)E_i = \sum_{j=1}^n R_{ikl}^j E_j,$$

definimos las n^2 2-formas Ω_i^j , llamadas formas de curvatura, por

$$\Omega_i^j = \sum_{1 \leq k < l \leq n} R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l.$$

Verificar que

$$\Omega_i^j = d\theta_i^j - \sum_{k=1}^n \theta_i^k \wedge \theta_k^j \quad (2^{\text{a}} \text{ ecuación de estructura})$$

donde θ_j^k son las formas de conexión, dadas por $\theta_j^k(E_i) = \Gamma_{ij}^k$, y Γ_{ij}^k los símbolos de Christoffel en U , respecto a $\{E_1, \dots, E_n\}$.

38. Si M es una variedad de dimensión 2, entonces $d\theta_1^2 = \Omega_1^2 = K \theta^1 \wedge \theta^2$, donde K es la curvatura de Gauss de M . Siendo $\{\theta^1, \theta^2\}$ duales de un sistema de referencia ortonormal.
39. Demostrar que la variedad bidimensional $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$, con métrica riemanniana, respecto a las coordenadas x, y , dada por $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$ y $g_{12} = g_{21} = 0$, tiene curvatura de Gauss $K = -1$.
40. Sean $x^1 = x$ y $x^2 = y$ las coordenadas usuales sobre \mathbb{R}^2 . Definimos la conexión ∇ sobre \mathbb{R}^2 poniendo $\Gamma_{jk}^i = 0$, excepto para $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 1$. Obtener y resolver las ecuaciones diferenciales de las geodésicas a través de todo punto de \mathbb{R}^2 . Encontrar, en particular, la geodésica con punto inicial $(2, 1)$ y vector tangente inicial $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$. ¿ ∇ es completa?

Idem para la conexión $\bar{\nabla}$ para la que $\bar{\Gamma}_{jk}^i \equiv 0$, salvo $\bar{\Gamma}_{12}^1 \equiv 1$.

41. Sea (M, g) una variedad semi-riemanniana. Si $f, h \in \mathfrak{F}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $A \in \mathfrak{X}_s^r(M)$, entonces
- | | |
|--|--|
| a) $\nabla(fA) = df \otimes A + f\nabla A$; | b) $\text{grad}(fh) = f \text{ grad } h + h \text{ grad } f$; |
| c) $\text{div}(fX) = Xf + f \text{ div } X$; | d) $\Delta(fh) = f\Delta h + h\Delta f + 2g(\text{grad } f, \text{grad } h)$; |
| e) $H^f h = fH^h + hH^f + df \otimes dh + dh \otimes df$. | |
42. Sea M una variedad n -dimensional con tensor métrico g . Establecer que la contracción de g es n . Y que $\text{div}(fg) = df$ ($f \in \mathfrak{F}(M)$).
43. El rotacional de $X \in \mathfrak{X}(M)$ está definido por

$$(\text{rot } X)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) - g(\nabla_Z X, Y).$$

Establecer los siguientes hechos:

- a) $\text{rot } X$ es antisimétrico y determinar sus componentes.
- b) $\text{rot}(\text{grad } f) = 0$, $\forall f \in \mathfrak{F}(M)$.
- c) $\text{rot } X = 2d\theta$, donde θ es la 1-forma métrica equivalente a X .
- d) Sobre \mathbb{R}^3 , $(\text{rot } X)(Y, Z) = (Y \times Z) \cdot (\nabla \times X)$. (Aquí, ∇ es el operador $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$).
44. Probar que dada una conexión lineal arbitraria de coeficientes Γ_{jk}^i , los coeficientes

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{kj}^i)$$

definen una nueva conexión. Sea

$$K_{\ell k} = \sum_{i=1}^n (\bar{\Gamma}_{i\ell, k}^i - \bar{\Gamma}_{ik, \ell}^i) =: \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \bar{\Gamma}_{i\ell}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{ik}^i}{\partial x^\ell} \right).$$

¿Son las $K_{\ell k}$ componentes de un tensor de tipo $(0, 2)$?

45. Probar que respecto a una conexión simétrica (sin torsión), para cualquier una 1-forma θ , se tiene $\theta_{i;j} - \theta_{j;i} = \theta_{i,j} - \theta_{j,i}$. Y para $A \in \mathfrak{X}_2^0(M)$, antisimétrico: $A_{ij;k} + A_{jk;i} + A_{ki;j} = A_{ij,k} + A_{jk,i} + A_{ki,j}$.
46. Si $F: M \rightarrow \bar{M}$ es una isometría local, F conserva:

La derivada covariante inducida sobre una curva.	El tensor curvatura de Riemann.
El transporte paralelo.	La curvatura seccional.
Las geodésicas.	La curvatura de Ricci.
Las aplicaciones exponenciales.	La curvatura escalar.

47. En una variedad semi-riemanniana \mathbf{M} , con tensor métrico g y tensor curvatura R , denotamos por $|g|$ el determinante de (g_{ij}) respecto a un sistema coordenado (x^1, \dots, x^n) .

Establecer que

$$\sum_{i=1}^n \Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln |g|}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k}.$$

Deducir de esto que la contracción $\mathcal{C}_1^1 R = 0$.

48. Respecto al sistema de coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) en \mathbb{R}^3 , los coeficientes de la métrica euclídea son

$$g_{11} = 1 \quad g_{12} = \rho^2 \quad g_{22} = \rho^2 \sin^2 \theta.$$

Utilizando la expresión en coordenadas de la laplaciana y las expresiones de los símbolos de Christoffel del Ejercicio 47, comprobar que:

$$\Delta f = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \left(\rho^2 \frac{\partial f}{\partial \rho} \right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

49. Sea \mathbf{M} una variedad semi-riemanniana conexa de dimensión ≥ 3 , con tensor métrico g y tensor de Ricci S . Si $S = hg$, donde $h \in \mathfrak{F}(\mathbf{M})$, entonces h es necesariamente constante.
50. Una variedad \mathbf{M} con tensor métrico g se dice que es de Einstein si su tensor de Ricci es proporcional al tensor métrico: $S = cg$ ($c = cte.$). Probar que si \mathbf{M} es de curvatura constante, \mathbf{M} es una variedad de Einstein.
51. Si \mathbf{M} es una variedad tridimensional de Einstein, entonces es de curvatura constante.
52. El espacio con métrica $ds^2 = A dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - A^{-1} dt^2$, $A = (1 + \frac{ar^2}{3} + \frac{c}{r})^{-1}$, $a \neq 0$, es un espacio de Einstein con curvatura no constante salvo que $c = 0$.
53. Sea \mathbf{M} una variedad diferenciable con conexión lineal ∇ de tensor curvatura R y $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$, definimos el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ \mathcal{A}_X (denotando por \mathfrak{L} la derivada de Lie) por

$$\mathcal{A}_X = \mathfrak{L}_X - \nabla_X.$$

Demostrar que: a) Si X es una transformación afín infinitesimal; es decir, si se verifica

$$\mathfrak{L}_X \circ \nabla_Z - \nabla_Z \circ \mathfrak{L}_X = \nabla_{[X, Z]}, \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}), \text{ entonces}$$

$$\nabla_Z(\mathcal{A}_X) = R(X, Z), \quad \forall Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

b) Si X e Y son transformaciones afines infinitesimales

$$\mathcal{A}_{[X, Y]} = \mathcal{A}_X \circ \mathcal{A}_Y - \mathcal{A}_Y \circ \mathcal{A}_X + R(X, Y).$$

c) Si g es un tensor métrico sobre \mathbf{M} y si $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{M})$ es una isometría infinitesimal (ó campo de vectores de Killing); es decir, si $\mathfrak{L}_X g = 0$, entonces, \mathcal{A}_X es antisimétrico con respecto a g , esto es

$$g(\mathcal{A}_X Y, Z) = -g(\mathcal{A}_X Z, Y), \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbf{M}).$$

54. Si X un campo de vectores de Killing (ver Ejercicio 53) en una variedad de Riemann (M, g) , consideremos la función $f = \frac{1}{2}g(X, X)$ sobre M . Probar:

a) $Yf = g(Y, \mathcal{A}_X X), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M).$

b) $Y^2 f = g(Y, \nabla_Y (\mathcal{A}_X X)), \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$ autoparalelo, o sea, tal que $\nabla_Y Y = 0$.

\mathcal{A}_X es el campo de tensores de tipo $(1, 1)$ definido por $\mathcal{A}_X = \mathfrak{L}_X - \nabla_X$.

55. Sea φ_t el grupo uniparamétrico local de isometrías generado por una isometría infinitesimal X (Ejercicio 53.c) en una variedad de Riemann (M, g) . Si x es un punto crítico de la función longitud de X , $g(X, X)^{1/2}$, entonces la curva $\varphi_t(x)$ es una geodésica (usar el Ejercicio 54.a).

56. Sea M una variedad de Riemann orientada. Definimos el elemento de volumen natural ω sobre M como sigue: En un punto arbitrario $x \in M$ sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormal de $T_x(M)$ compatible con la orientación de M , entonces la n -forma ω está dada por

$$\omega(E_1, \dots, E_n) = 1.$$

a) ω está definida independientemente de la referencia $\{E_1, \dots, E_n\}$ elegida.

b) En términos de un sistema de coordenadas (x^1, \dots, x^n) y de las componentes g_{ij} del tensor métrico, tenemos

$$\omega = \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \text{donde } |g| = \det(g_{ij}).$$

c) ω es paralela con respecto a la conexión de Levi-Civita.

57. Sea (M, g) una variedad de Riemann orientada con elemento de volumen ω y conexión de Levi-Civita ∇ , entonces para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

a) $(\text{div } X)\omega = \mathfrak{L}_X \omega.$

b) $\text{div } X = -\text{traza } \mathcal{A}_X \quad (\mathcal{A}_X = \mathfrak{L}_X - \nabla_X).$

c) Deducir de los anteriores que $(\text{div } X)_x$ es la traza del endomorfismo $v \mapsto \nabla_v X, \quad v \in T_x(M).$

58. Demostrar que si X es una transformación infinitesimal afín (Ejercicio 53) sobre una variedad diferenciable M , entonces

$$\text{div}(\mathcal{A}_X Y) = -S(X, Y) - \text{traza}(\mathcal{A}_X \circ \mathcal{A}_Y) \quad \text{donde } \mathcal{A}_X = \mathfrak{L}_X - \nabla_X.$$

59. Probar que en un sistema de coordenadas normales, se tiene

$$\theta_{i,jk} = \theta_{i,jk} - \Gamma_{ij,k}^h \theta_h,$$

siendo $\theta \in \Omega^1(M)$, Γ_{jk}^i los coeficientes de una conexión lineal ∇ en M y donde el “;” significa derivada covariante y la “,” derivada parcial.

60. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 , dada vectorialmente por la ecuación $\vec{x} = \vec{x}(u, v)$ e Y un campo de vectores en \mathbb{R}^3 definido sobre M : $Y = Y(u, v)$. Consideremos la superficie M^* definida por

$$\vec{x}^* = \vec{x}^*(u, v) = \vec{x}(u, v) + Y(u, v)$$

Demostrar que la aplicación $F: M \rightarrow M^*, \quad \vec{x}(u, v) \mapsto \vec{x}^*(u, v)$ conserva el área si y sólo si $\text{div } Y = 0$.

61. Si (M, g) tiene curvatura constante y se define una métrica sobre $M \times M$ por

$$\hat{g}((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = g(X_1, X_2) + g(Y_1, Y_2).$$

$\hat{g}(M \times M, \hat{g})$ tiene curvatura constante?

62. Sea N una subvariedad de M . Verificar que toda geodésica de M contenida en N es una geodésica de N .
63. Sea M_1 y M_2 subvariedades, ambas de dimensión n , de una variedad riemanniana M de dimensión $n+p$. Sea $\tau \equiv \tau(t)$, $0 \leq t \leq 1$, una curva diferenciable en $M_1 \cap M_2$. Se dice que M_1 y M_2 son tangentes una a otra a lo largo de τ si $T_{\tau(t)}(M_1) = T_{\tau(t)}(M_2)$, para todo $t \in [0, 1]$.

En este caso probar que el desplazamiento paralelo a lo largo de τ en M_1 coincide con el desplazamiento paralelo a lo largo de τ en M_2 . En particular, si τ es una geodésica en M_1 , también es una geodésica en M_2 .

64. Sea $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+p})$ un sistema de coordenadas adaptado a $M \subset \overline{M}$.
- a) El campo de vectores curvatura media es

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

- b) Si $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n+p}}$ son normales a M , entonces la segunda forma fundamental es

$$\mathcal{B} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{k>n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

65. Sea Π un plano tangente no degenerado a M en x . Si X está en un entorno del 0 en Π , probar que $\exp_x(X)$ es una subvariedad semi-riemanniana de M cuya curvatura de Gauss en x es $K(\Pi)$, donde K es la curvatura seccional de M .

66. Demostrar que el tensor curvatura de Ricci de una hipersuperficie $M \subset \mathbb{R}_\nu^{n+1}$ está dado por

$$S(X, Y) = \varepsilon \langle \mathcal{S}(X), \mathcal{S}(Y) \rangle - \langle \mathcal{S}(X), Y \rangle \text{traza } \mathcal{S} \quad (\mathcal{S} \text{ es el operador forma}).$$

67. Sea \mathcal{S} el operador forma deducido de la normal unitaria $\mathbf{U} = \frac{1}{\|\text{grad } f\|} \text{grad } f$ sobre una superficie semi-riemanniana $M = f^{-1}(c) \subset \overline{M}$.

a) Demostrar que $g(\mathcal{S}(u), v) = -\frac{1}{\|\text{grad } f\|} H^f(u, v)$.

- b) Determinar \mathcal{S} en $(1,0,0)$ para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en \mathbb{R}^3 , primero usando a), y luego usando $\mathcal{S}(u) = -\overline{\nabla}_u \mathbf{U}$.

68. Sea M una hipersuperficie tal que $\overline{g}(u, u) > 0$ ó $u = 0$ para todo vector u tangente a M y de signatura ε , de una variedad de Riemann o de Lorentz ($\nu = 1$) \overline{M} . Sea \mathcal{S} el operador forma deducido de la normal unitaria \mathbf{U} , y k_1, \dots, k_n los valores propios de \mathcal{S} ($n = \dim M$). Probar

a) $\overline{g}(H, \mathbf{U}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i$ (H campo de vectores curvatura media).

b) $K(\Pi) = \varepsilon k_i k_j + \overline{K}(\Pi)$, donde Π está generado por los vectores propios asociados a k_i y k_j .

c) $x \in M$ es un punto umbilical $\iff k_1 = \dots = k_n$ en x .

69. Si M es una subvariedad semi-riemanniana conexa, de dimensión ≥ 2 , totalmente umbilical en una variedad \overline{M} de curvatura constante \overline{c} , entonces

a) El campo de vectores curvatura normal Z es paralelo respecto a la conexión normal.

b) M tiene curvatura constante $c = \overline{c} + \overline{g}(Z, Z)$.

70. Sea M una hipersuperficie riemanniana de una variedad semi-riemanniana \overline{M} . Si M y \overline{M} tienen curvatura constante $c \neq \overline{c}$ y $\dim M \geq 3$, entonces M es totalmente umbilical.

71. Sea M una subvariedad k -dimensional ($k > 1$) de una variedad riemanniana \overline{M} , n -dimensional. Sean γ una geodésica de \overline{M} que queda en M , T el campo de vectores unitario tangente a γ , X un campo de vectores unitario tangente a M que es paralelo en M a lo largo de γ y ortogonal a T y Π el subespacio generado por X y T . Entonces probar que:

- a) $\overline{K}(\Pi) \geq K(\Pi)$ a lo largo de γ .
 b) $\overline{K}(\Pi) = K(\Pi)$ si y sólo si X es paralelo a lo largo de γ en \overline{M} .

72. Sea M una hipersuperficie en \mathbb{R}^n , U un campo de vectores unitario normal a M , $h \in \mathfrak{F}(M)$ y $f_t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación definida por

$$f_t(x) = x + th(x)U_x$$

Demostrar que

$$(f_t)_*(X) = X + t(Xh)U - th\mathfrak{S}(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

donde \mathfrak{S} es el operador forma derivado de U . Además, si f_t son isometrías para $t > 0$, demostrar que M es llana.

73. Si (U, x^1, \dots, x^n) es un sistema coordenado en una hipersuperficie M de \mathbb{R}^{n+1} , sean

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \quad b_{ij} = \left\langle \mathfrak{S} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \quad \mathfrak{S} \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Demostrar que :

$$\begin{aligned} a_j^i &= \sum_{k=1}^n g^{ik} b_{kj} && \text{Ecuación de Weingarten} \\ R_{jkl}^i &= \sum_{r=1}^n g^{ir} (b_{lj} b_{rk} - b_{kj} b_{rl}) && \text{Ecuación de Gauss} \\ \frac{\partial b_{ir}}{\partial x^s} - \frac{\partial b_{is}}{\partial x^r} &= \sum_{k=1}^n (b_{kr} \Gamma_{is}^k - b_{ks} \Gamma_{ir}^k) && \text{Ecuación de Codazzi-Mainardi} \end{aligned}$$

74. Sea M una superficie de \mathbb{R}^3 definida por $z = f(x, y)$ con $f(0, 0) = f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$. Demostrar que

- (a) Los vectores básicos e_1 y e_2 de \mathbb{R}^3 son tangentes a M en el origen, y que

$$U = \frac{-f'_x e_1 - f'_y e_2 + e_3}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}$$

es un campo de vectores normal y unitario sobre M .

- (b) Si \mathfrak{S} es el operador forma que se deriva de U sobre M , se tiene

$$\mathfrak{S}(e_1) = f''_{xx}(0, 0)e_1 + f''_{xy}(0, 0)e_2 \quad \mathfrak{S}(e_2) = f''_{yx}(0, 0)e_1 + f''_{yy}(0, 0)e_2.$$

- (c) En los casos particulares siguientes, calcular $\mathfrak{S}(\lambda e_1 + \nu e_2)$ en términos de e_1 y e_2 , y determinar su rango en 0:

$$\text{a) } z = xy. \quad \text{b) } z = 2x^2 + y^2. \quad \text{c) } z = (x + y)^2. \quad \text{d) } z = xy^2.$$

75. Sea $G: M \rightarrow S^2$ la aplicación esfera (o aplicación de Gauss) de la superficie silla de montar $z = xy$, relativa a su normal unitaria U . ¿Cuál es la imagen mediante G de las líneas rectas $y = cte$. en M ? ¿Qué parte de la esfera es recubierta por la imagen de $G(M)$?

76. Sea M una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} con campo de vectores unitario \mathbf{U} y consideremos la aplicación de Gauss (o aplicación esfera)

$$G: M \rightarrow S^n \quad x \mapsto G(x) = \mathbf{U}_x$$

Si denotamos por ϕ_x el isomorfismo natural de $T_x(\mathbb{R}^{n+1})$ sobre $T_{G(x)}(S^n)$. Demostrar que la transformación lineal $\phi_x^{-1} \circ (G_*)_x$ de $T_x(M)$ coincide con el operador forma, \mathfrak{S}_x de M derivado de \mathbf{U} .

77. Sea M una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} con campo de vectores normal unitario \mathbf{U} . $G: M \rightarrow S^n$ la aplicación de Gauss de M . $\phi_x: T_x(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow T_{G(x)}(S^n)$ el isomorfismo natural. τ una curva sobre M . Supongamos que Y_t es un campo de vectores paralelo a lo largo de τ sobre M . Probar entonces que $\phi_{\tau(t)}(Y_t)$ es paralelo a lo largo de $G(\tau(t))$ en S^n .

78. Sea M una hipersuperficie del espacio euclídeo \mathbb{R}^{n+1} , expresada localmente por $\bar{y} = \bar{y}(x^1, \dots, x^n)$, donde (x^1, \dots, x^n) es un sistema de coordenadas locales arbitrarias en M e $\bar{y} = (y^1, \dots, y^{n+1})$ es el vector posición de un punto de coordenadas cartesianas rectangulares (y^1, \dots, y^{n+1}) en \mathbb{R}^{n+1} . Sea además \mathbf{U} un campo de vectores unitario normal a M , expresado localmente por $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x^1, \dots, x^n)$.

Entonces la fórmula de Gauss puede escribirse como

$$D_{\bar{y}_i} \bar{y}_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \bar{y}_k + b_{ij} \mathbf{U}$$

donde $\bar{y}_i = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$, Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel de la conexión de Riemann relativa a la métrica inducida g en M por el producto interior estandar en \mathbb{R}^{n+1} , y b_{ij} son los coeficientes de la segunda forma fundamental de M en \mathbb{R}^{n+1} .

Así mismo, la fórmula de Weingarten toma la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n a_i^k \bar{y}_k,$$

donde (a_i^k) es la matriz de $A_{\mathbf{U}}$ con respecto a $\{\bar{y}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}_{1 \leq i \leq n}$. Teniéndose además que:

$$a_i^k = - \sum_{j=1}^n g^{kj} b_{ji}.$$

79. Sea M una subvariedad de dimensión n en una variedad de Riemann \bar{M} de dimensión $n+r$. Sea $x_0 \in M$ y $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{n+r})$ un sistema de coordenadas normales con origen x_0 tal que $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}\right)_{x_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^n}\right)_{x_0}$ generan a $T_{x_0}(M)$ y $\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+1}}\right)_{x_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{n+r}}\right)_{x_0}$ forman una base de $T_{x_0}(M)^\perp$.

Sea ahora (x^1, \dots, x^n) un sistema de coordenadas arbitrarias en un entorno de U de x_0 en M y

$$\bar{x}^j = \bar{x}^j(x^1, \dots, x^n), \quad 1 \leq j \leq n+r$$

el sistema de ecuaciones que define el embebimiento de U sobre \bar{M} . Demostrar que el tensor forma \mathcal{B} de $M \subset \bar{M}$ tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{B} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}, \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_{x_0} \right) = \sum_{k=n+1}^{n+r} \left(\frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial x^i \partial x^j} \right)_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^k} \right)_{x_0}.$$

80. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 y $\{X, Y\}$ una base ortonormal en $T_x(M)$. Entonces la curvatura de Gauss y vector curvatura media, tienen respectivamente las siguientes expresiones

$$K(x) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle = \det \mathcal{S}_x \quad H = \frac{1}{2}(\text{traza } \mathcal{S}_x)\mathbf{U},$$

donde, \mathcal{S} es el operador forma derivado de la normal unitaria \mathbf{U} .

81. Sea M una hipersuperficie de \mathbb{R}^{n+1} con normal unitaria \mathbf{U} . Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos la hipersuperficie $M_\lambda = \{x + \lambda\mathbf{U}/x \in M\}$ y la aplicación $f: M \rightarrow M_\lambda$, dada por $x \mapsto f(x) = x + \lambda\mathbf{U}_x$. Establecer:

- (a) $f_*(v) = v - \lambda\mathcal{S}(v)$, $v \in T_x(M)$ (\mathcal{S} operador forma derivado de \mathbf{U})
 (b) $\mathcal{S}_\lambda(f_*(v)) = \mathcal{S}(v)$ (\mathcal{S}_λ operador forma derivado de \mathbf{U} en M_λ)
 (c) Si $v \in T_x(M)$ tal que $\mathcal{S}(v) = kv$, entonces

$$\mathcal{S}_\lambda(f_*(v)) = \frac{k}{1 - \lambda k} f_*(v)$$

- (d) Si x es un punto umbilical en M , $f(x)$ es un punto umbilical en M_λ .

(e) $\langle f_*(u), f_*(v) \rangle = \langle u, v \rangle - 2\lambda \langle \mathcal{S}(u), v \rangle + \lambda^2 \langle \mathcal{S}^2(u), v \rangle$, $u, v \in T_x(M)$.

82. (Continuación Ejercicio 81) Sea, en particular, $n = 2$, y las funciones curvatura de Gauss y curvatura media de M (y M_λ) las denotamos por K (y K_λ) y h (y h_λ), donde $H(u, v) = h(u, v)\mathbf{U}_x$, $u, v \in T_x(M)$ y análogamente para h_λ . Demostrar que

$$K_\lambda = \frac{K}{1 - 2\lambda h + \lambda^2 K} \quad h_\lambda = \frac{h - \lambda K}{1 - 2\lambda h + \lambda^2 K}$$

83. Sea $f \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^2)$. M el grafo de $f: M = \{(x, y, f(x, y)) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $a = ((f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ y $\mathbf{U} = a^{-1}(-f'_x, -f'_y, 1)$. Demostrar que $X = (1, 0, f'_x)$ e $Y = (0, 1, f'_y)$ generan el espacio tangente $T_p(M)$ para todo $p = (x, y, z)$ y que \mathbf{U} es un campo de vectores unitario normal sobre M .

Sea $E = \langle X, X \rangle$, $F = \langle X, Y \rangle$ y $G = \langle Y, Y \rangle$. Demostrar que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(X) &= a^{-3}((f''_{xx}G - f''_{xy}F)X + (f''_{xy}E - f''_{xx}F)Y) \\ \mathcal{S}(Y) &= a^{-3}((f''_{xy}G - f''_{yy}F)X + (f''_{yy}E - f''_{xy}F)Y) \\ K &= \frac{f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2}{a^4} \quad h = \frac{f''_{xx}G + f''_{yy}E - 2f''_{xy}F}{2a^3}, \end{aligned}$$

siendo K la curvatura de Gauss y h la curvatura media ($H = h\mathbf{U}$).

84. Sea M una superficie de \mathbb{R}^3 y X, Y campos de vectores tangentes a M , que son linealmente independientes en cada punto de una región orientada, entonces la curvatura de Gauss y curvatura media tienen las siguientes expresiones:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathcal{S}(X), X \rangle & \langle \mathcal{S}(X), Y \rangle \\ \langle \mathcal{S}(Y), X \rangle & \langle \mathcal{S}(Y), Y \rangle \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{vmatrix}}$$

$$h = \frac{\begin{vmatrix} \langle \mathcal{S}(X), X \rangle & \langle \mathcal{S}(X), Y \rangle \\ \langle X, Y \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle \mathcal{S}(Y), X \rangle & \langle \mathcal{S}(Y), Y \rangle \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} \langle X, X \rangle & \langle X, Y \rangle \\ \langle Y, X \rangle & \langle Y, Y \rangle \end{vmatrix}}$$

Además si $Z = X \times Y$ y D es la derivada covariante en \mathbb{R}^3 .

$$K = \frac{\langle Z, D_X Z \times D_Y Z \rangle}{\|Z\|^4} \quad h = -\frac{\langle Z, D_X Z \times Y + X \times D_Y Z \rangle}{2\|Z\|^3}.$$

85. El transporte paralelo normal es una isometría lineal.
86. La conexión normal se conserva por un par isométrico.
87. Sea M una variedad semi-riemanniana con conexión ∇ y $\phi:]a, b[\times]c, d[\subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Denotamos por $\phi'_u = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)$ y $\phi'_v = \phi_*\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)$. Si Z es un campo de vectores diferenciable sobre ϕ , por $\frac{\nabla Z}{\partial u}, \frac{\nabla Z}{\partial v}$ denotamos las derivadas covariantes de Z a lo largo de las curvas u -paramétricas y v -paramétricas, respectivamente. Demostrar

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\nabla \phi'_u}{\partial v} = \frac{\nabla \phi'_v}{\partial u} \\ 2) \quad & \frac{\nabla\left(\frac{\nabla Z}{\partial u}\right)}{\partial v} - \frac{\nabla\left(\frac{\nabla Z}{\partial v}\right)}{\partial u} = -R(\phi'_u, \phi'_v)Z, \end{aligned}$$

donde R es el tensor curvatura de Riemann de M .

88. Sea M una subvariedad semi-riemanniana de una variedad semi-riemanniana \overline{M} , definimos

$$T: \mathfrak{X}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M) \quad T_X Y = \pi_T \left(\overline{\nabla}_X (\pi_N Y) \right) + \pi_N \left(\overline{\nabla}_X (\pi_T Y) \right).$$

- Probar:
- T es $\mathfrak{F}(M)$ -lineal.
 - T es anti-autoadjunto: $g(T_X Y, Z) = -g(Y, T_X Z)$.
 - $T_X(\mathfrak{X}(M)) \subset \mathfrak{X}(M)^\perp$, $T_X(\mathfrak{X}(M)^\perp) \subset \mathfrak{X}(M)$.
 - $T_X Y = \mathcal{B}(X, Y)$, $T_X Z = A_Z(X)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$.
 - T está completamente determinado por \mathcal{B} .

89. Si $\psi: M \rightarrow N$ es una homotecia entre variedades semi-riemannianas que no es una anti-isometría, entonces el grafo de $\psi: \{(x, \psi(x))/x \in M\}$ es una subvariedad totalmente geodésica de $M \times N$.

90. Si M es una subvariedad semi-riemanniana de una variedad semi-riemanniana \overline{M} , la aplicación

$$R^\perp: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

dada por

$$R^\perp(X, Y)Z = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp Z - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp Z - \nabla_{[X, Y]}^\perp Z$$

se denomina tensor curvatura normal de $M \subset \overline{M}$.

Probar que R^\perp es $\mathfrak{F}(M)$ -multilineal, y establecer la ecuación de Ricci:

$$\overline{g}(R^\perp(X, Y)Z, W) = \overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, W) - g(A_Z(X), A_W(Y)) + g(A_W(X), A_Z(Y)),$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $Z, W \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ y $A: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, $A_Z(X) = \pi_T(\overline{\nabla}_X Z)$.

91. Sea M una subvariedad semi-riemanniana de \overline{M} , y X un campo de vectores de Killing (Ejercicio 53) sobre \overline{M} . Probar:

- Si X es tangente a M , entonces $X|_M$ es un campo de vectores de Killing sobre M .
- Si M es totalmente geodésica, entonces $\pi_T(X)$ es de Killing sobre M .

92. Si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo de vectores arbitrario y $X \in \mathfrak{X}(M)$ de Killing, entonces

$$\nabla_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X \nabla_Y - \nabla_Y \mathcal{L}_X \quad \text{y} \quad \nabla_Y(\nabla X) = -R(X, Y).$$

93. Si es X es un campo de vectores de Killing sobre una variedad semi-riemanniana M , sea $f = \frac{1}{2}g(X, X)$. Probar

- a) $\text{grad } f = -\nabla_X X$.
 b) $H^f(Y, Z) = g(\nabla_Y X, \nabla_Z X) + g(R(X, Y)X, Z) = -g(\nabla_Y (\nabla_X X), Z)$.
 c) $\Delta f = -\text{traza}(\nabla X \circ \nabla X) + S(X, X)$.

94. Sea M una superficie en \mathbb{R}^3 y Z un campo de vectores normal a M no nulo. Demostrar que $v \in T_x(M)$ es principal ($\mathcal{S}(v) = \lambda v$) si y sólo si

$$\langle v, Z_x \times \nabla_v Z \rangle = 0.$$

95. En una superficie semi-riemanniana, si (t, r) es un sistema de coordenadas con $ds^2 = E(r)dt^2 + G(r)dr^2$. Establecer

$$a) \quad H^r \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{E'_r}{2G}, \quad H^r \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 0 \quad H^r \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{G'_r}{2G}.$$

$$b) \quad \text{grad } r = \frac{1}{G} \frac{\partial}{\partial r} \quad c) \quad \Delta r = \frac{1}{2G} \left(\frac{E'_r}{E} - \frac{G'_r}{G} \right).$$

96. En una superficie de Lorentz M ($n = 2, \nu = 1$), para un sistema coordenado (u, v) tal que $g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = 0$, $g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = F$, establecer

$$a) \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{F'_u}{F} \frac{\partial}{\partial u}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{F'_v}{F} \frac{\partial}{\partial v}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial}{\partial v} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} = 0.$$

b) La curvatura de Gauss es

$$K = -\frac{1}{F} \left(\frac{F'_u}{F} \right)_v = -\frac{1}{F} \left(\frac{F'_v}{F} \right)_u.$$

c) Para una función f ,

$$\text{grad } f = \frac{f'_v \frac{\partial}{\partial u} + f'_u \frac{\partial}{\partial v}}{F}, \quad \Delta f = \frac{2}{F} f''_{uv}.$$

d) Las ecuaciones diferenciales de las geodésicas son

$$u'' + \frac{F'_u}{F} u'^2 = 0 \quad v'' + \frac{F'_v}{F} v'^2 = 0.$$

97. a) Sea M y N variedades semi-riemannianas con tensores métricos g_1 y g_2 . Si π_1 y π_2 son las proyecciones canónicas de $M \times N$ sobre M y N , respectivamente, sea $g = \pi_1^*(g_1) + \pi_2^*(g_2)$. Entonces, demostrar que g es un tensor métrico sobre la variedad producto $M \times N$.

b) Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, $f > 0$. El producto cruzado $\overline{M} = M \times_f N$ es la variedad producto $M \times N$ con el tensor métrico

$$g_f = \pi_1^*(g_1) + (f \circ \pi_1)^2 \pi_2^*(g_2).$$

Demostrar que si $f \circ \phi = f$, la aplicación producto $\phi \times \psi: M \times_f N \rightarrow M \times_f N$ es una isometría si y sólo si $\psi: N \rightarrow N$ y $\phi: M \rightarrow M$ son isometrías.

98. En la esfera $S^2(r)$ consideramos la variación

$$\phi: \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\times] -\delta, \delta[\rightarrow S^2(r) \quad (u, v) \mapsto (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u).$$

(a) Demostrar que ϕ es una variación geodésica.

- (b) Determinar el campo de vectores variación de ϕ y comprobar que es un campo de Jacobi sobre la geodésica base de la variación.
99. Sea Y un campo de vectores sobre una geodésica γ en una variedad semi-riemanniana (M, g) .
- (a) Si Y es tangente a $\gamma \Rightarrow (Y$ es un campo de Jacobi $\Leftrightarrow \frac{\nabla}{dt}(\frac{\nabla Y}{ds}) = 0 \Leftrightarrow Y(s) = (as + b)\gamma'(s)$, $a, b \in \mathbb{R}$).
- (b) Si Y es un campo de Jacobi sobre la geodésica $\gamma \Rightarrow (Y$ es perpendicular a $\gamma \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ tales que $Y(a)$ y $Y(b)$ son perpendiculares a $\gamma \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ tal que $Y(a)$ y $\frac{\nabla Y}{ds}(a)$ son perpendiculares a γ).
100. Sea M una variedad semi-riemanniana llana, conexa y completa en x_0 (esto es, \exp_{x_0} está definida en todo $T_{x_0}(M)$). Probar que $\exp_{x_0}: T_{x_0}(M) \rightarrow M$ es una aplicación recubridora semi-riemanniana.
101. Sea $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal, y para $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, sea $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto f(t) = A(t)\xi$, donde $A(t) \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ tal que $t \mapsto A(t)$ es diferenciable sobre $]-1, 1[$ y $A(0) = I$.
- (a) Demostrar que si $h:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $h(t) = B(f(t), f(t))$.

$$h_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) = B(A'(0)\xi, \xi) + B(\xi, A'(0)\xi).$$

- (b) Si los endomorfismos $A(t)$ son B -isometrías, es decir,

$$B(A(t)\xi, A(t)\xi) = B(\xi, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$A'(0) \text{ verifica } B(A'(0)\xi, \xi) + B(\xi, A'(0)\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

102. Sea $B: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la forma bilineal dada por $B((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = x^1 y^2 - x^2 y^1$. Respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 , sean los endomorfismos:

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad D(t) = A(at)B(bt)C(ct)$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$ y t en un conveniente entorno de \mathbb{R} .

- (a) Demostrar que $A(t), B(t), C(t)$ y $D(t)$ son B -isometrías.
- (b) Calcular $D'(0)$.
103. Demostrar que mediante la aplicación $k: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, $(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$, \mathbb{R}^2 es un espacio de rebestimiento simplemente conexo de $\mathbb{R}_1^2 \setminus \{0\}$.
104. Un modelo de \widetilde{S}_1^2 . Considerar la aplicación diferenciable

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^3, \quad (t, \theta) \mapsto (\sinh t, \cosh t \cos \theta, \cosh t \sin \theta)$$

- (a) Probar que ϕ es una aplicación recubridora de \mathbb{R}^2 sobre la pseudoesfera unidad en \mathbb{R}_1^3 .
- (b) Probar que \mathbb{R}^2 dotado de la métrica imagen recíproca mediante ϕ es \widetilde{S}_1^2 y el elemento de arco es $-dt^2 + \cosh^2 t d\theta^2$.
105. Sea G una variedad diferenciable que es un grupo. Demostrar que G es un grupo de Lie si y sólo si es diferenciable la aplicación

$$\psi: G \times G \rightarrow G \quad (x, y) \in G \times G \mapsto \psi(x, y) = xy^{-1}.$$

106. Sea \mathbb{R} la variedad diferenciable de los números reales con la coordenada usual $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t) = t$, y definimos

$$\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto (x^3 + y^3)^{1/3}$$

- (a) Entonces (\mathbb{R}, ϕ) es un grupo topológico pero no es un grupo de Lie.
 (b) Demostrar que \mathbb{R} con la multiplicación anterior es un grupo de Lie relativo a la estructura diferenciable en \mathbb{R} dada por

$$v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad v(t) = t^3.$$

107. El toro unidimensional puede ser definido como el grupo cociente $T = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Establecer que T es un grupo de Lie con la operación natural.
 108. El grupo lineal general $GL(n, \mathbb{R})$, de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales y determinante no nulo, es un grupo de Lie, con la operación producto de matrices.
 109. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$ es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.
 110. $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / {}^t AA = I\}$ es un subgrupo de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$.
 111. El conjunto $H = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ de \mathbb{R}^3 admite una carta global $\varphi: H \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (z, 0) \mapsto z$. Demostrar que ésta determina una estructura de subvariedad en H tal que convierte a H en un subgrupo de Lie del grupo aditivo \mathbb{R}^3 .

112. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}$. Demostrar que G es un grupo de Lie.

113. Sea el grupo de Lie de las matrices reales de orden n no singulares $GL(n, \mathbb{R})$, demostrar que su álgebra de Lie es $gl(n, \mathbb{R})$, conjunto de todas las matrices reales de orden n .

114. Demostrar que la aplicación exponencial $exp: gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ coincide con la aplicación exponencial usual $exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$.

115. Sea G un grupo de Lie y denotamos por ϕ la operación del grupo; para $v \in T_e(G)$, consideramos los campos de vectores

$$X_a = \phi_*(0, v) \quad Y_a = \phi_*(v, 0), \quad v \in T_e(G), a \in G.$$

¿Son X e Y campos de vectores invariantes a la izquierda o la derecha? Es decir, ¿quedan invariantes por las traslaciones a la izquierda o la derecha?

116. Encontrar los subgrupos uniparamétricos de $GL(3, \mathbb{R})$, definidos por las matrices, con $x, y \in \mathbb{R}$ e $y > 0$, siguientes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

117. Sean G y G' grupos de Lie y \underline{G} y \underline{G}' sus álgebras de Lie, Consideremos el álgebra de Lie producto $\underline{G} \times \underline{G}'$. Demostrar que el álgebra de Lie del grupo de Lie producto $G \times G'$ es $\underline{G} \times \underline{G}'$.

118. Sean G y G' grupos de Lie y $f: G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie y si $f_*: \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$ es el homomorfismo de álgebras que f induce, verificar que

$$f(\exp_G X) = \exp_{G'}(f_*(X)), \quad \forall X \in \underline{G}.$$

119. Sean G y G' grupos de Lie y $f: G \rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de Lie. Establecer que:

- (a) El núcleo de f , $Ker f$, es un subgrupo normal de G y el álgebra de Lie de $Ker f$ es $Ker f_*$ (donde $f_*: \underline{G} \rightarrow \underline{G}'$ es el homomorfismo inducido entre las álgebras de Lie \underline{G} y \underline{G}').
 (b) Si G es conexo, $Im(f)$ (imagen de f) es un subgrupo de Lie de G' y su álgebra de Lie es $Im(f_*)$.

120. Demostrar que $\det: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$, aplicación determinante, es un homomorfismo de grupos de Lie cuya aplicación inducida entre las álgebras de Lie es $tr: gl(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (traza de matrices).

Como consecuencia el álgebra de Lie del subgrupo lineal especial:

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\} \quad \text{es} \quad sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) / tr A = 0\}.$$

121. Sea $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \langle AX, AY \rangle = \langle X, Y \rangle\}$. Establecer que $O(n)$ es un subgrupo cerrado de $GL(n, \mathbb{R})$ y por tanto $O(n)$ es un subgrupo de Lie (grupo ortogonal) de $GL(n, \mathbb{R})$.

Sea $SO(n) = Ker f$, donde $f = \det: O(n) \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. Establecer que el álgebra de Lie de $SO(n)$ (grupo ortogonal especial) es $so(n) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) / {}^t A = -A\}$.

122. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0 \right\}$. Encontrar su álgebra de Lie y una base de la misma.

123. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} / x, y \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$. Demostrar que H es un subgrupo de Lie de $GL(2, \mathbb{R})$, encontrar su álgebra de Lie y una base de campos de vectores invariantes.

124. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset GL(n, \mathbb{R})$. Encontrar su álgebra de Lie y una base de dicha álgebra.

125. Establecer que el centro de un grupo de Lie es el núcleo de la representación adjunta.

126. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie real de dimensión 2. Probar que \mathfrak{g} es abelina o existe una base $\{X, Y\}$ de \mathfrak{g} , tal que $[X, Y] = X$.

127. Sea Ad la diferencial de la representación adjunta $ad: \mathfrak{G} \rightarrow Aut(\mathfrak{G})$. Establecer que

$$Ad X([Y, Z]) = [Ad X \cdot Y, Z] + [Y, Ad X \cdot Z].$$

128. Sea E un espacio vectorial real y $B: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal (simétrica o antisimétrica) no degenerada sobre E . Sea

$$H = \{A \in GL(E) / B(AX, AY) = B(X, Y), \quad \forall X, Y \in E\}$$

Demostrar que H es un subgrupo de Lie de $GL(E)$ con álgebra de Lie

$$\underline{H} = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) / B(AX, Y) + B(X, AY) = 0, \quad \forall X, Y \in E\}.$$

129. Demostrar que toda semi-riemanniana homogénea y compacta es completa.

130. La forma de Killing \mathcal{B} de un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una forma bilineal simétrica, invariante respecto a todos los automorfismos de \mathfrak{g} y satisface

$$\mathcal{B}([X, Y], Z) = \mathcal{B}(X, [Y, Z]) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

131. Sean M una variedad diferenciable, G un grupo de Lie y $\phi: G \times M \rightarrow M$, $(a, x) \mapsto ax$ una acción transitiva de G sobre M . Sea $H = \{a \in G / ax_0 = x_0\}$ el grupo de isotropía de $x_0 \in M$. Establecer que la aplicación canónica $\psi: G/H \rightarrow M$, $aH \mapsto ax_0$ es un difeomorfismo.

132. Encontrar los subgrupos de isotropía y subálgebras del grupo de las rotaciones $SO(3)$.

133. La esfera S^n es difeomorfa, de forma natural, al espacio homogéneo $O(n+1)/O(n)$, siendo $O(n)$ el grupo ortogonal. Análogamente, $S^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$, siendo $SO(n)$ el grupo ortogonal especial.

134. La esfera S^{2n-1} es difeomorfa a los espacios homogéneos $U(n)/U(n-1)$ y $SU(n)/SU(n-1)$, donde $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C})/A^{-1} = {}^t\bar{A}\}$ (grupo unitario) y $SU(n) = \{A \in U(n)/\det A = 1\}$ (grupo unitario especial).
135. La esfera S^{4n+3} es difeomorfa al espacio homogéneo $Sp(n+1)/Sp(n)$, donde

$$Sp(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{Q})/A \text{ conserva el producto interior en } \mathbb{Q}^n\},$$

(grupo simpléctico). \mathbb{Q} es el cuerpo de los cuaterniones y el producto escalar en \mathbb{Q}^n está dado por

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^n \bar{X}^i Y^i \quad (\bar{X}^i \text{ es el conjugado de } X^i)$$

136. El espacio proyectivo real $P_{n-1}(\mathbb{R})$ es difeomorfo al espacio homogéneo $SO(n)/O(n-1)$.
137. Sea G_{pq} el conjunto de todos los espacios p -dimensionales de \mathbb{R}^n ($p+q=n$). G_{pq} es una variedad diferenciable, denominada variedad de Grassman difeomorfa al espacio homogéneo $O(n)/O(p)+O(q)$.
138. a) El conjunto de todos los campos de vectores de Killing (Ejercicio 53) $i(\mathbf{M})$, sobre una variedad semi-riemanniana (\mathbf{M}, g) es un álgebra de Lie.
- b) El conjunto $ci(\mathbf{M})$ de todos los campos de vectores de Killing completos es un subálgebra de Lie de $i(\mathbf{M})$. Además si $X \in \underline{I(\mathbf{M})}$ (álgebra de Lie del grupo de Lie $I(\mathbf{M})$ de las isometrías de \mathbf{M}), definimos el campo de vectores fundamental X^* sobre \mathbf{M} , como sigue: Sea $t \mapsto \psi_t$ el subgrupo unipamétrico de X , para cada $x \in \mathbf{M}$ consideramos la curva $\alpha(t) = \psi_t(X)$, entonces $X_x^* = \alpha'(0)$. Demostrar que la aplicación $X \in \underline{I(\mathbf{M})} \mapsto X^* \in i(\mathbf{M})$ es un anti-isomorfismo de Lie, es decir: $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$, $\forall X, Y \in \underline{I(\mathbf{M})}$.

BIBLIOGRAFIA

References

- [1] **F. Martín Asín.**- *Astronomía*. Paraninfo. Madrid.
- [2] **M. Berger; B. Gostiaux.**- *Géométrie différentielle*. Armand Colin, Paris, 1972
- [3] **M. Berger; B. Gostiaux.**- *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1988
- [4] **W.M. Boothby.**- *An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York, 1983
- [5] **F. Brickell; R. S. Clark.**- *Differentiable Manifolds*. Van Nostrand Reinhold, 1970
- [6] **M.P. do Carmo.**- *Geometria riemanniana*. IMPA, Rio de Janeiro, 1983
- [7] **N. Hicks.**- *Notas sobre Geometría Diferencial*. Editorial Hispano Europea, Barcelona, 1974
- [8] **S. Kobayashi; K. Nomizu.**- *Foundations of Differential Geometry* Vol. I. Interscience Publishers, New York, 1963
- [9] **S. Kobayashi; K. Nomizu.**- *Foundations of Differential Geometry* Vol. II. Interscience Publishers, New York, 1969
- [10] **A. Montesdeoca.**- *Apuntes de Introducción a las Variedades Diferenciables*. La Laguna, 1992
- [11] **B. O'Neill.**- *Semi-riemannian geometry, with applications to relativity*. Academic Press, New York, 1983
- [12] **Pham Mau Quan.**- *Introduction a la géométrie des variétés différentiables*. Dunod, Paris, 1969
- [13] **Luis A. Santaló.**- *Vectores y tensores con sus aplicaciones*. Eudeba. Buenos Aires. 1961
- [14] **I.M. Singer; J.A. Thorpe.**- *Lecture notes on elementary topology and geometry*. Scott, Foresmann and Company Springer-Verlag, 1967
- [15] **M. Spivak.**- *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Vol. II. Publish or Perish, Inc. Boston 1970.
- [16] **I.S. Sokolnikoff.**- *Análisis tensorial. Teoría y aplicación a la geometría y mecánica de los medios continuos*. Index. Madrid.
- [17] **F.W. Warner.**- *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Scott, Foresmann and Company, Illinois, 1971
- [18] **T.J. Willmore.**- *An introduction do differential geometry*. Oxford University Press 1959

SIMBOLOS

$\text{ad } a$	representación adjunta	65
$\text{Ad } X$	representación adjunta de $\underline{\mathbf{G}}$	65
$A_Z(X)$	Parte tangente de la derivada covariante de un campo normal	50
\mathcal{B}	segunda forma fundamental	35
\mathbb{B}	forma de Killing	69
$B_{x_0}(\varepsilon)$	ε -entorno	115
\mathcal{B}_q^p	operador bajada de índice	24
\mathcal{C}	operador contracción en el álgebra tensorial sobre \mathbf{M}	13
\mathcal{C}_q^p	operador contracción	26
$\mathcal{C}_{pq}, \mathcal{C}^{pq}$	contracciones métricas	26
$\text{div } K$	divergencia de una campo de tensores	26
E	espacio vectorial real	1
g	producto escalar	2
(g_{ij})	tensor métrico	5
(g^{ij})	matriz métrica	5
(g^{ij})	inversa de la matriz métrica	5
$\text{grad } f$	gradiente de una función diferenciable	26
\mathbf{G}	grupo de Lie	65
$gl(n, \mathbb{R})$	matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales	99
$GL(n, \mathbb{R})$	grupo lineal general	94
H^f	hessiano de una función	27
H_x	curvatura media	37
H_ν	subespacio horizontal en $T(\mathbf{M})$	91
$H_\nu^n(r)$	espacio pseudohiperbólico	43
$\widetilde{H}_1^n(r)$	recubrimiento universal de H_1^n	64
$\mathbf{I}(\mathbf{M})$	grupo de isometrías de \mathbf{M}	65
j_a	automorfismo interior	65
k	función curvatura normal	41
$L(\mathbf{M})$	fibrado de referencias lineales sobre \mathbf{M}	94
$L(\alpha)$	Longitud de una curva	112
$\mathcal{L}_X Y$	derivada de Lie	100
\mathbf{M}	variedad diferenciable	5
(\mathbf{M}, g)	variedad semi-riemanniana	5
Q	forma cuadrática	1
r	curvatura escalar	29
\mathbb{R}	conjunto de los números reales	1
\mathbb{R}_ν^n	espacio semi-eucídeo de índice ν	13
$\text{rot } X$	rotacional de X	131
s_x	simetría geodésica	60
S	tensor curvatura de Ricci	28
\mathcal{S}	operador forma	40
$S^n(r)$	esfera de radio r	38

$S_\nu^n(r)$	pseudoesfera	43
$S_\nu^n \equiv S_\nu^n(1)$	pseudoesfera unidad	43
$\widetilde{S}_{\nu-1}^n(r)$	recubrimiento universal de $S_{\nu-1}^n$	64
\mathcal{S}_q^p	operador subida de índice	25
$T(\mathbf{M})$	fibrado tangente	18
\mathcal{V}_v	subespacio vertical en $T(\mathbf{M})$	91
$A \perp B$	conjuntos perpendiculares	2
$D_X Y$	derivada covariante en \mathbb{R}^n	9
$\nabla_X Y$	derivada covariante de Y con respecto a X	10
$\nabla_X^\perp Y$	derivada covariante normal	46
$\widetilde{\nabla}_X \mathcal{B}$	derivada covariante de la segunda forma fundamental	46
$\frac{\nabla Z}{dt}$	derivada covariante respecto a una curva	15
$\frac{\nabla^\perp Y}{dt}$	derivada covariante normal inducida	51
F^\perp	subespacio ortogonal	2
$u \perp v$	vectores perpendiculares	2
$v(f)$	derivada direccional	9
X_α	restricción de un campo de vectores a una curva	15
α'	vector tangente a una curva	15
Δf	laplaciana de una función	27
ε_j	términos de la matriz métrica asociada a una base ortonormal	3
$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$	signatura de un producto escalar	3
γ_v	geodésica con vector inicial v	17
Γ_{ij}^k	coeficientes de una conexión o símbolos de Christoffel	12
Λ	cono de nulidad	43
ν	índice de una forma bilineal	1
	índice de una variedad semi-riemanniana	5
$\Omega^1(\mathbf{M})$	1-formas diferenciables sobre \mathbf{M}	11
π_T, π_N	proyecciones ortogonales	33
$\mathfrak{F}(\mathbf{M})$	funciones diferenciables sobre \mathbf{M}	10
$\mathfrak{T}(\mathbf{M})$	álgebra tensorial sobre \mathbf{M}	13
$\mathfrak{T}_s^r(\mathbf{M})$	tensores de tipo (r, s) sobre \mathbf{M}	13
$\mathfrak{X}(\mathbf{M})$	campos de vectores diferenciables sobre \mathbf{M}	10
$\mathfrak{X}(F)$	conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre una aplicación F	33
$\mathfrak{X}(\alpha)$	conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre la curva α	15
$\overline{\mathfrak{X}}(\mathbf{M})$	campos de vectores diferenciables sobre una subvariedad \mathbf{M} de $\overline{\mathbf{M}}$	33
$\mathfrak{X}(\mathbf{M})^\perp$	conjunto de los campos de normales a la subvariedad \mathbf{M}	33
$\ u\ $	norma del vector u	3
\mathfrak{S}	suma cíclica	129
\oplus	notación de final de demostración	2

Index

- ε -entorno 115
- 1-formas de conexión 101
- abiertos simples del recubrimiento 61
- acción 65
 - natural 69
 - transitiva 65
- ad(H)-invariante 66
- aplicación conforme 31
 - exponencial 18
 - polar 58
 - que conserva el producto escalar 4
 - recubridora 61
 - semi-riemanniana 61
 - regular 15
- bajada de índice 25
- banda de Moebius 40
- base ortonormal 3
- campo de referencias básico 94
 - ortonormales 27
 - ortonormales sobre una curva 28
- campo de tensores paralelo 14
- campo de vectores curvatura normal 39
 - de Jacobi 55
 - de Killing 132
 - fundamental 100
 - horizontal 92, 96
 - normal 33
 - normal paralelo 47
 - paralelo 13, 16
 - sobre una aplicación 33
 - sobre una curva 15
 - unitario radial 114
 - variación 55
 - vertical 94
- campo paralelo respecto a la conexión normal 52
- campos de tensores métricamente equivalentes 25
- coeficientes de la conexión 12, 79, 89
- componente horizontal de una conexión 93
 - de una conexión 93
- componentes del campo de tensores curvatura 80
 - de tensores torsión 79
- conexión 96, 101
 - de Levi-Civita 12
 - enfoque clásico 81
 - tensorial 81
 - inducida 34
 - lineal 10, 79, 89
 - métrica 12
 - natural en \mathbb{R}^n 9
 - normal 46
 - simétrica 12, 79
 - sin torsión 79
 - sobre $T(M)$ 92
- congruencia 37
- conjunto estrellado 19
 - ortonormal 3
- cono de nulidad 42
- contracción 26
 - métrica 26
- convenio de Einstein 81
- curva en una variedad diferenciable 15
 - horizontal 96
 - minimizante 117
- curvatura 80, 104
 - constante 23
 - de Gauss 129, 131
 - de hipercuádricas 45
 - escalar 29
 - media 36
 - seccional 22
 - de la esfera 36
- derivación 13
 - covariante 81
- derivada covariante 9, 10, 14, 82
 - de la 2ª forma fundamental 46
 - sobre una curva 15
 - normal 46
 - normal inducida 51
- diferencial covariante 14
- distancia euclídea 6
 - riemanniana 115
- distribución horizontal 92, 96
- divergencia 26
- ecuación de Codazzi 47
 - de estructura 130, 131
 - de Gauss 36
 - para hipersuperficies 41
 - de Ricci 138
 - de Jacobi 55
- ecuaciones de estructura 102
 - de Cartan 80
- entorno normal 19
- espacio de Minkowski 44
 - de recubrimiento 61
 - forma 63
 - homogéneo 69
 - reductivo 70
 - naturalmente reductivo 72
 - proyectivo real 143
 - pseudohiperbólico 43
 - recubridor 61
 - semi-riemanniano homogéneo 65
 - simétrico 63
- fibra 94
- fibrado de referencias lineales 94
- forma bilineal definida 1
 - definida negativa 1
 - definida positiva 1
 - indefinida 2
 - no degenerada 1
 - semidefinida 1
 - semidefinida negativa 1
 - semidefinida positiva 1
 - simétrica 1
- forma cuadrática 1
- forma curvatura 80
- forma de Killing 69, 142
- forma torsión 80
- formas canónicas 102
 - de conexión 80, 130, 131
 - de curvatura 130
- fórmula de Gauss 35
 - de Koszul 12
 - de Weingarten 50, 52
- función curvatura normal 41
 - radio 113
- geodésica 17
 - en subvariedades 37

- quebrada 20
- geodésicas de la esfera 37
 - en hipercuádricas 44
- geometría extrínseca 37
 - intrínseca 37
 - semi-riemanniana 5
- gradiente 26
- grupo ortogonal 142
 - ortogonal especial 142
 - semi-riemanniano 68
 - simpléctico 143
 - unitario 143
 - unitario especial 143
- hessiano 27
- hipercuádrica totalmente umbilical 44
- hipercuádricas 42
- hipercuádricas de Riemann 44
- hipersuperficie 39
 - totalmente umbilical 41
 - semi-riemannianas en \mathbb{R}_ν^{n+1} 41
- homotecia 31
- identidad de Bianchi 21, 29
 - de Jacobi 69
- índice de una forma bilineal simétrica 1
 - de una variedad semi-riemanniana 5
- isometría 5
 - euclídea 6
 - infinitesimal 132
 - lineal 4
 - local 30
- k-plano 39
- laplaciana 27
- lema de Gauss 111
- levantamiento horizontal 96
 - levantamiento horizontal de una curva 96
- longitud de arco 112, 113
- matriz asociada a una forma bilineal 1
- métrica bi-invariante 67
 - invariante a la izquierda 67
 - G-invariante 70
- norma de un vector 3
- objetos congruentes 52
- operador curvatura 21
 - operador forma 40
- par isométrico 37
- primera ecuación de estructura 81
 - forma fundamental 41
- producto escalar 2
 - interior 2
- proyecciones ortogonales 33
- pseudoesfera 43
- recta binormal 126, 127
- recubrimiento universal 62
- referencia ortonormal 27
- reparametrización 113
- representación adjunta 65, 142
- rotacional 131
- sección local canónica 94
 - plana 22
- segunda ecuación de estructura 81
 - forma fundamental 41, 35
 - forma fundamental de la esfera 36
 - identidad de Bianchi 129
- signatura de una hipersuperficie 40
 - de un producto escalar 3
- símbolos de Christoffel 12
 - de Christoffel de segunda especie 86
- simetría geodésica local 60
 - global 63
- sistema de coordenadas normales 20
- subconjuntos ortogonales 2
- subespacio de Lie 70
 - horizontal 91, 92, 96
 - no degenerado 3
 - ortogonal 2
- subgrupo de isotropía 65, 70
- subida de índice 25
- subvariedad semi-riemanniana 5
 - totalmente geodésica 38
 - totalmente umbilical 39
- subvariedades congruentes 52
- superficie de revolución 127
- tensor curvatura 21, 85
 - curvatura de Ricci 28
 - curvatura de Riemann 21
 - curvatura de Riemann-Christoffel 25
 - curvatura normal 138
 - gravitatorio 129
 - métrico 5
 - torsión 84
- torsión 79, 104
- transformación afin infinitesimal 132
 - ortogonal 6
- transporte paralelo 16, 97
 - paralelo normal 52
- traslación a la derecha 94
- trasladado paralelo normal 52
- triángulos congruentes 6
- variación 55
 - geodésica 55
- variedad de Einstein 132
 - de Grassman 143
 - de Lorentz 5
 - de Riemann 5
 - homogénea 69
 - llana 23
 - localmente simétrica 57
 - paralelizable 10
 - semi-riemanniana 5
 - semi-riemanniana completa 17
- variedades isométricas 5
- vector curvatura normal 39
 - horizontal 92, 96
 - unitario 3
 - vertical 90
- vectores ortogonales 2

