El centro del triángulo X_{15262}

Angel Montesdeoca

Miércoles, 7 de febrero de 2018

Sea ABC un triángulo con incentro I y excentros I_a, I_b, I_c.

La circunferencia que pasa por el incentro I y por los puntos donde la mediatriz de BC corta a las bisectrices interiores en B y C, tiene por ecuación baricéntrica:

$$(O_a) : a^2yz + b^2xz + c^2xy + (x + y + z)\left(\frac{c(ab - b^2 - bc)x}{a + b + c} - \frac{a^2cy}{a + b + c} - \frac{a^2bz}{a + b + c}\right) = 0.$$

La circunferencia que pasa por el exincentro I_a y por los puntos donde la mediatriz de BC corta a las bisectrices exteriores en B y C, tiene por ecuación:

$$(O_{aa}) : a^2yz + b^2xz + c^2xy + (x + y + z)\left(\frac{c(ab + b^2 + bc)x}{a - b - c} + \frac{a^2cy}{a - b - c} + \frac{a^2bz}{a - b - c}\right) = 0.$$

La circunferencia que pasa por el exincentro I_b y por los puntos donde la mediatriz de BC corta a las bisectriz interior en B y a la bisectriz exterior en C, tiene por ecuación:

$$(O_{ab}) : a^2yz + b^2xz + c^2xy + (x + y + z)\left(-\frac{c\left(ab + b^2 - bc\right)x}{a - b + c} - \frac{a^2cy}{a - b + c} + \frac{a^2bz}{a - b + c}\right) = 0.$$

La circunferencia que pasa por el exincentro I_c y por los puntos donde la mediatriz de BC corta a las bisectriz interior en C y a la bisectriz exterior en B, tiene por ecuación:

$$(O_{ac}) : a^2yz + b^2xz + c^2xy + (x + y + z)\left(-\frac{c\left(ab - b^2 + bc\right)x}{a + b - c} + \frac{a^2cy}{a + b - c} - \frac{a^2bz}{a + b - c}\right) = 0.$$

El eje radical de (O_a) y (O_{ac}) corta al eje radical de (O_{aa}) y (O_{ab}) en el punto $A_b(-a^2 : 0 : a^2 - b^2 + c^2)$.

El eje radical de (O_a) y (O_{ab}) corta al eje radical de (O_{aa}) y (O_{ac}) en el punto $A_c(a^2 : -a^2 - b^2 + c^2 : 0)$.

Procediendo cíclicamente se obtienen los puntos

$$B_c(a^2 + b^2 - c^2 : -b^2 : 0), \qquad B_a(0 : -b^2 : -a^2 + b^2 + c^2),$$

$$C_a(0 : -a^2 + b^2 + c^2 : -c^2), \qquad C_b(a^2 - b^2 + c^2 : 0 : -c^2).$$

Las rectas A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b forman un triángulo $A_1B_1C_1$ perspectivo con ABC, con centro de perspectividad X_{74} (conjugado isogonal del punto del infinito de la recta de Euler).

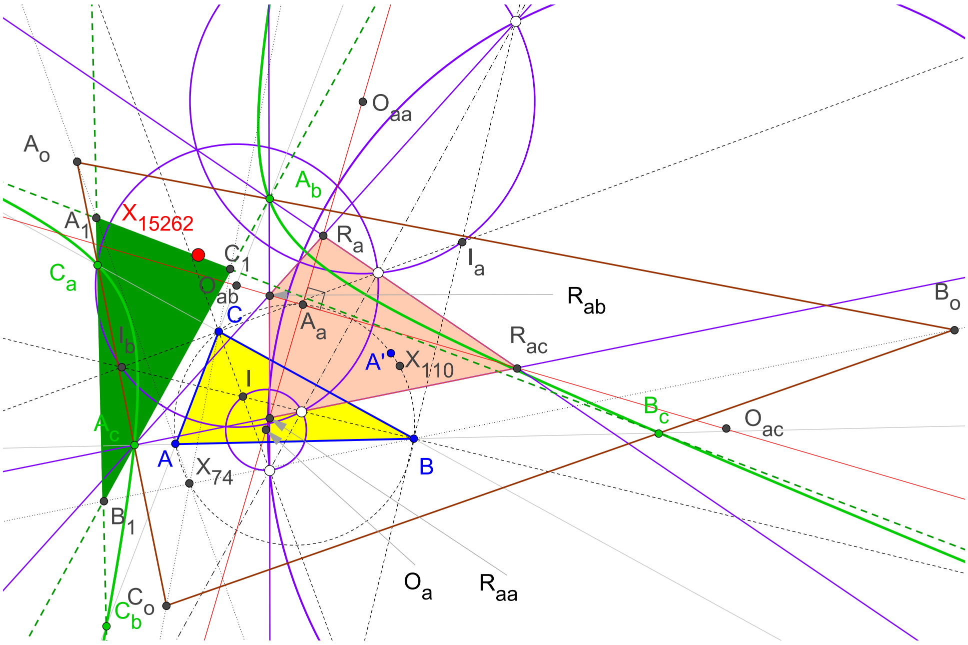
Como consecuencia, los seis puntos $A_b, A_c, B_c, B_a, C_a, C_b$ están en una misma cónica, de ecuación:

$$\sum_{abc\ xyz} b^2c^2(-a^6 + a^4(b^2+c^2) + a^2(b^2-c^2)^2 - (b^2-c^2)^2(b^2+c^2))x^2 +$$

$$a^2(a^8 - 2a^6(b^2+c^2) + 5a^4b^2c^2 + 2a^2(b^2-c^2)^2(b^2+c^2) - (b^2-c^2)^2(b^4+3b^2c^2+c^4))yz = 0,$$

y centro X_{15262}, centro de la "perspeconic" de los triángulos ABC y anti–ortocentroidal $A_oB_oC_o$.

El baricentro y el ortocentro de $A_oB_oC_o$ son, respectivamente, X_{74} y X_{110}, foco de la parábola de Kiepert.



Perspeconic (Preamble X(15254), César Eliud Lozada, November 14, 2017)

Let ABC and $A'B'C'$ be two perspective triangles such that neither is inscribed in the other. Let $A_b = BC \cap A'B', A_c = BC \cap A'C'$, and likewise for B_c, B_a, C_a, and C_b. As ABC and $A'B'C'$ are perspective, the pairs of lines $\{BC, B'C'\}, \{CA, C'A'\}$ and $\{AB, A'B'\}$ concur at three collinear points, and the lines A_bA_c, B_cB_a, C_aC_b join opposite vertices of an hexagon. By Pascal's theorem, the six points lie on a conic, here named the **perspeconic** of ABC and $A'B'C'$.

Orthocentroidal triangle (Index of triangles referenced in ETC, César Lozada).

Let A' be the intersection, other than X_4, of the A-altitude and the orthocentroidal circle, and define B' and C' cyclically. The triangle $A'B'C'$ is the **orthocentroidal triangle**.

The orthocentroidal circle has diameter X_2X_4.

Anti-orthocentroidal triangle

The triangle $A'B'C'$ whose orthocentroidal triangle is ABC.

OTRAS CONSIDERACIONES SOBRE ESTA CONFIGURACIÓN

Los centros radicales de las cuatro ternas de las circunferencias consideradas son:

$R_a(-a^2 : b(a+b-c) : c(a-b+c))$, centro radical de $(O_{aa}), (O_{ab}), (O_{ac})$.
$R_{aa}(-a^2 : b(-a+b-c) : c(-a-b+c))$, centro radical de $(O_a), (O_{ab}), (O_{ac})$.
$R_{ab}(-a^2 : b(-a+b+c) : c(a+b+c))$, centro radical de $(O_a), (O_{aa}), (O_{ab})$.
$R_{ac}(-a^2 : b(a+b+c) : c(-a+b+c))$, centro radical de $(O_a), (O_{aa}), (O_{ac})$.

Los puntos diagonales del cuadrivértice $R_aR_{aa}R_{ab}R_{ac}$ son A_b, A_c y el punto de intersección del eje radical de (O_a) y (O_{aa}) con al eje radical de (O_{ab}) y (O_{ac}), $A_a(-a^2 : 2b^2 : 2c^2)$, que está sobre la circunferencia circunscrita y sobre la simediana por A.

A_a es el punto de Poncelet de $R_aR_{aa}R_{ab}R_{ac}$.

El punto A', de intersección de la mediana por A con la circunferencia circunscrita, es el centro isogonal de $R_aR_{aa}R_{ab}R_{ac}$.

Procediendo cíclicamente, sobre los vértices de ABC, se definen los cuadrivértices $R_bR_{bb}R_{bc}R_{ba}$ y $R_cR_{cc}R_{ca}R_{cb}$.

Los triángulos ABC y $R_aR_bR_c$ son perspectivos, con centro de perspectividad X_{57}.

Let I_a, I_b, I_c be the excenters and I the incenter of ABC. Let K_a be the symmedian point of I_bI_cI, and define K_b, K_c cyclically. Then $K_aK_bK_c$ is perspective to ABC at X_{57}. (Randy Hutson, September 14, 2016).

Los triángulos ABC y $R_{aa}R_{bb}R_{cc}$ son perspectivos, con centro de perspectividad X_9, simediano del triángulo $I_aI_bI_c$.

Las rectas $R_{ab}R_{ac}, R_{bc}R_{ba}, R_{ca}R_{cb}$ forman un triángulo perspectivo con ABC , con centro de perspectividad X_{2163}.