Una generalización sobre un mensaje del Grupo Hyacinthos y una cúbica asociada

Angel Montesdeoca

Se reemplaza el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo por el centro de una cónica circunscrita, en el mensaje http://tech.groups.yahoo.com/group/Hyacinthos/message/17207, del grupo de Hyacinthos (Jean-Louis Ayme; 11 de febrero del 2009), y se da una caracterización para la concurrencia de determinadas tres rectas.

$\triangle$
∇

⊛ *Centro de un triángulo descrito por J.L.Ayme*

En el mensaje #17207 del grupo de Hyacinthos (Jean-Louis Ayme; 11 de febrero del 2009), se propone:

Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo; $\widehat{UVW}$ el triángulo ceviano del incentro I, con respecto a $\widehat{ABC}$; O el centro de la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$; X el punto de intersección de la paralela por O a AI con BC; Y y Z se definen similarmente; U' el simétrico de U con respecto a X; V' y Z' se definen similarmente; $\widehat{A^*B^*C^*}$ el triángulo tangencial de $\widehat{ABC}$. Probar que las rectas A^*U', B^*V' y C^*W' son concurrentes.

Los pies de las bisectrices (cevianas del incentro $I(a:b:c)$) son $U(0:b:c)$, $V(a:0:c)$ y $W(a:b:0)$.
Como el punto del infinito de la recta AI es $(b+c:-b:-c)$, la paralela por $O(a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2))$ a AI es:

$$bc(bS_B-cS_C)x-c(a^2S_A+c(b+c)S_C)y+b(a^2S_A+b(b+c)S_B)z=0.$$

Y el punto de intersección de ésta con BC es

$$X\big(0:b(a^2S_A+b(b+c)S_B):c(a^2S_A+c(b+c)S_C\big).$$

Cíclicamente obtenemos que:

$$Y\big(a(b^2S_B+a(c+a)S_A:0:c(b^2S_B+c(c+a)S_C)\big),$$

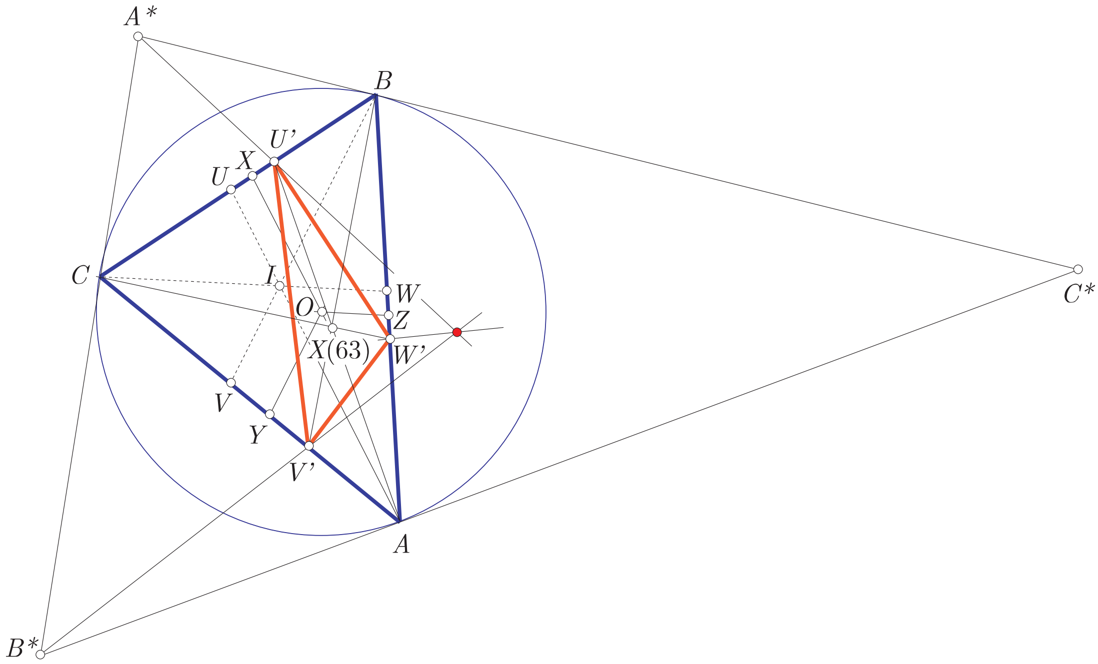
$$Z\big(a(c^2S_C+a(a+b)S_A):b(c^2S_C+b(a+b)S_B:0\big).$$

Los simétricos de U,V y W respecto a X,Y y Z, respectivamente, son:

$$U'(0:bS_B:cS_C),\qquad V'(aS_A:0:cS_C),\qquad W'(aS_A:bS_C:0).$$

Pues U' es el punto que divide al segmento UX en la razón $UU' : U'X = 2 : -1$, por lo que $U' = -Tr(X)U + 2Tr(U)X$, siendo $Tr(U) = b + c$ (la suma de las coordenadas de U) y $Tr(X) = (b+c)(a^2S_A + b^2S_B + c^2S_C)$. Similarmente, se obtienen V' y W'.

Estos puntos son los pies de las cevianas del punto $(aS_A : bS_B : cS_C)$, X_{63} en ETC [(1)], el cual es el conjugado isogonal del punto de Clawson [(2)], X_{19} en ETC, $(a/S_A : b/S_B : c/S_C)$.



Los vértices del triángulo tangencial son: $A^*(-a^2 : b^2 : c^2)$, $B^*(a^2 : -b^2 : c^2)$ y $C^*(a^2 : b^2 : -c^2)$.

La recta A^*U' tiene por ecuación:

$$bc\left(S_Bb^3 + c(S_B - 2S_C)b^2 + c^2(2S_B - S_C)b + a^2(c-b)S_A - c^3S_C\right)x$$

$$-a^2c\left(S_Aa^2 - b^2S_B + c^2S_C + 2bcS_C\right)y + a^2b\left(S_Aa^2 + b^2S_B + 2bcS_B - c^2S_C\right)z = 0,$$

y la de las rectas B^*V' y C^*W', se obtienen permutando cíclicamente ésta.

Las tres se cortan en el punto del tipo de centros de la Enciclopedia de Kimberling, de primera coordenada baricéntrica:

$$a^2\left(a(b^4 + c^4 - a^4) - b(c^4 + a^4 - b^4) - c(a^4 + b^4 - c^4) + 2abc(ab - bc + ca)\right), \qquad (1)$$

pero que no figura actualmente en ella.

(1) Enciclopedia de Kimberling: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html

(2) Punto de Clawson: Centro de la homotecia entre los triángulos órtico y excentral.

⊛ *Una generalización*

Vamos a sustituir la circunferencia circunscrita del mensaje de Ayme por una cónica circunscrita arbitraria, y planteamos lo siguiente:

Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo; $\widehat{UVW}$ el triángulo ceviano del incentro I, con respecto a $\widehat{ABC}$; Q el centro de la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ de perspector $P(p:q:r)$; X el punto de intersección de la paralela por Q a AI con BC; Y y Z se definen similarmente; U' el simétrico de U con respecto a X; V' y Z' se definen similarmente; $\widehat{A^*B^*C^*}$ el triángulo formado por las tangentes a la cónica en los vértices de $\widehat{ABC}$. ¿Cuándo las rectas A^*U', B^*V' y C^*W' son concurrentes?

La respuesta es que P ha de estar en los lados del triángulo medial (las tres rectas son paralelas) o en la isocúbica pivotal respecto al triángulo medial cuyo polo tiene por primera coordenada baricéntrica $a(b+c)(2bc+a(b+c))$ y su pivote es el punto X_{2092}.

Para establecer esto, comencemos considerando la cónica circunscrita $\mathcal{C}(P)$ de perspector $P(p:q:r)$, cuya ecuación es $rxy+qxz+pyz=0$ y su centro (polo de la recta del infinito $x+y+z=0$ ó cociente ceviano G/P ó polo de la recta PG respecto a la cónica circunscrita que pasa por P y G) es

$$Q\big(p(q+r-p):q(r+p-q):r(p+q-r)\big).$$

Como el punto del infinito de la recta AI es $(b+c:-b:-c)$, la paralela por Q a AI es:

$$\big(br(p+q-r)-cq(p-q+r)\big)x+\big(br(p+q-r)-c((p-r)^2-q(p+r))\big)y-\big(cq(p-q+r)-b((p-q)^2-r(p+q))\big)z=0.$$

Y el punto de intersección de ésta con BC es:

$$X\big(0:cq(p-q+r)-b((p-q)^2-r(p+q)):br(p+q-r)-c((p-r)^2-q(p+r))\big).$$

Simétricamente se obtiene que:

$$Y\big(cp(q+r-p)-a((q-p)^2-r(q+p)):0:ar(q-r+p)-c((q-r)^2-p(q+r))\big),$$

$$Z\big(bp(r-p+q)-a((r-p)^2-q(r+p)):aq(r+p-q)-b((r-q)^2-p(r+q)):0\big).$$

Los simétricos de $U(0:b:c), V(a:0:c)$ y $W(a:b:0)$ respecto a X, Y y Z son, respectivamente,

$$\begin{aligned}&U'\big(0:(r+p-q)(b(q+r-p)+2cq):(p+q-r)(c(q+r-p)+2br)\big)\\&V'\big((q+r-p)(a(r+p-q)+2cp):0:(p+q-r)(c(r+p-q)+2ar)\big)\\&W'\big((q+r-p)(a(p+q-r)+2bp):(r+p-q)(b(p+q-r)+2aq):0\big).\end{aligned}$$

Los vértices del triángulo formado por las tangentes en A, B y C a la cónica circunscrita son:

$$A^*(-p:q:r),\qquad B^*(p:-q:r),\qquad C^*(p:q:-r),$$

es decir, los vértices del triángulo precevino de P.

La recta A^*U' es:

$$\big(cq\left(-p^2+q^2-3r^2+2qr\right)+br\left(p^2+3q^2-r^2-2qr\right)\big)x$$
$$-p(p+q-r)\big(c(p-q-r)-2br\big)y+p(p-q+r)\big(b(p-q-r)-2cq\big)z=0.$$

Las ecuaciones de las rectas B^*V' y C^*W', se obtienen permutando cíclicamente la de la recta A^*U'.

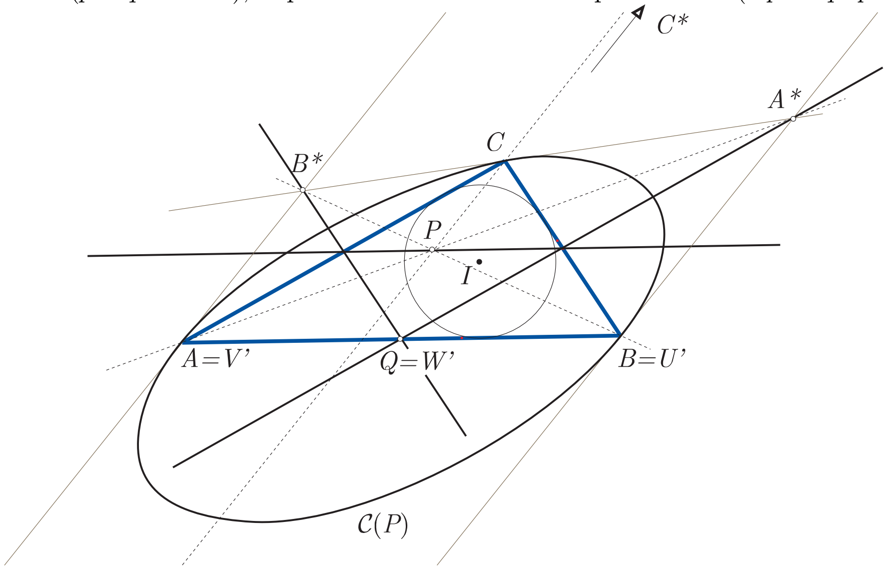
Para que los triángulos $\widehat{U'V'W'}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ sean perspectivos, el determinante formado por los coeficientes de las rectas A^*U', B^*V' y C^*W' ha ser nulo, de donde surge que el perspector P debe satisfacer a la ecuación:

$$\begin{gathered}xyz(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\\ \Big(bc(c-b)x^3+ca(a-c)y^3+ab(b-a)z^3+\\ x^2(c\left(a^2+2b(b+c)+3ca\right)y-b\left(a^2+2c(c+b)+3ba\right)z)+\\ y^2(a\left(b^2+2c(c+a)+3ab\right)z-c\left(b^2+2a(a+c)+3cb\right)x)+\\ z^2(b\left(c^2+2a(a+b)+3bc\right)x-a\left(c^2+2b(b+a)+3ac\right)y)+\\ 2(a-b)(b-c)(c-a)yzx\Big)=0.\end{gathered}$$

Luego para que se tenga la concurrencia anunciada, P ha de estar en los lados de $\widehat{ABC}$ o en los lados de su triángulo medial o bien en la cúbica $\mathcal{M}$, cuya ecuación es el último factor anterior.

Cuando P está en los lados de $\widehat{ABC}$, $\mathcal{C}(P)$ degenera en el propio lado y la paralela a él por el vértice opuesto.

Cuando P está en un lado del triángulo medial, el centro de $\mathcal{C}(P)$ está en el vértice opuesto del triángulo medial y las rectas A^*U', B^*V' y C^*W' son paralelas. Por ejemplo, si $P(p:q:r)$ está en el lado paralelo a AB $(p+q-r=0)$, el punto del infinito de tales paralelas es $(-p:-q:p+q)$.



La cúbica $\mathcal{M}$ pasa por los puntos medios de los lados $P_1 = M_a, P_2 = M_b$ y $P_3 = M_c$, y por el simediano K de $\widehat{ABC}$. Por lo que, al ser K el perspector de la circunferencia circunscrita, estamos en el caso particular en que la cónica $\mathcal{C}(K)$ es la circunferencia circunscrita del párrafo *Centro de un triángulo descrito por J.L.Ayme*.

Los terceros puntos en que la cúbica corta a los lados de triángulo medial son los vértices del triángulo $\widehat{P_4P_5P_6}$ (3):

$$\begin{aligned}
&P_4\left(a\left(b^2+c^2+a(b+c)\right) : -b(a+b-c)(a+c) : -c(a+b)(a-b+c)\right),\\
&P_5\left(-a(a+b-c)(b+c) : b\left(c^2+a^2+b(c+a)\right) : -c(a+b)(-a+b+c)\right),\\
&P_6\left(-a(a-b+c)(b+c) : -b(a+c)(-a+b+c) : c\left(a^2+b^2+c(a+b)\right)\right).
\end{aligned}\tag{2}$$

Las simedianas son tangentes a la cúbica $\mathcal{M}$ en los puntos:

$$P_7\big((b+c)^2 : b^2 : c^2\big), \qquad P_8\big(a^2 : (c+a)^2 : c^2\big), \qquad P_9\big(a^2 : b^2 : (a+b)^2\big).$$

Estos puntos los podemos construir, por ejemplo el P_7, determinado el punto $(b+c : b : c)$, situado en la bisectriz en A y en la recta BE siendo E el punto que divide a CA en la razón $CE : EA = c : b+c$; y, luego, hallando su cuadrado baricéntrico.

Primer método de construcción de la cúbica $\mathcal{M}$:

Hemos obtenido nueve puntos, P_k $(k = 1, \ldots, 9)$, situados en la cúbica $\mathcal{M}$, por lo que puede ser construida, utilizando, por ejemplo, el macro de Cabri-Geométrè descrito por Roger Cuppens en "Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri géomètre II", tomo 2, pag. 207. Aunque algunos de estos nueve puntos pueden ser sustituidos por el simediano X_6 o por el punto intermedio X_9 o por el X_{2092} (ver el segundo método de construcción de esta misma cúbica dada a continuación).

(3) El triángulo $\widehat{P_4P_5P_6}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$ y el centro de perspectividad es el ortocentro del triángulo de contacto interior, X_{65} en ETC:

$$\left(\frac{a(b+c)}{b+c-a} : \frac{b(c+a)}{c+a-b} : \frac{c(a+b)}{a+b-c}\right).$$

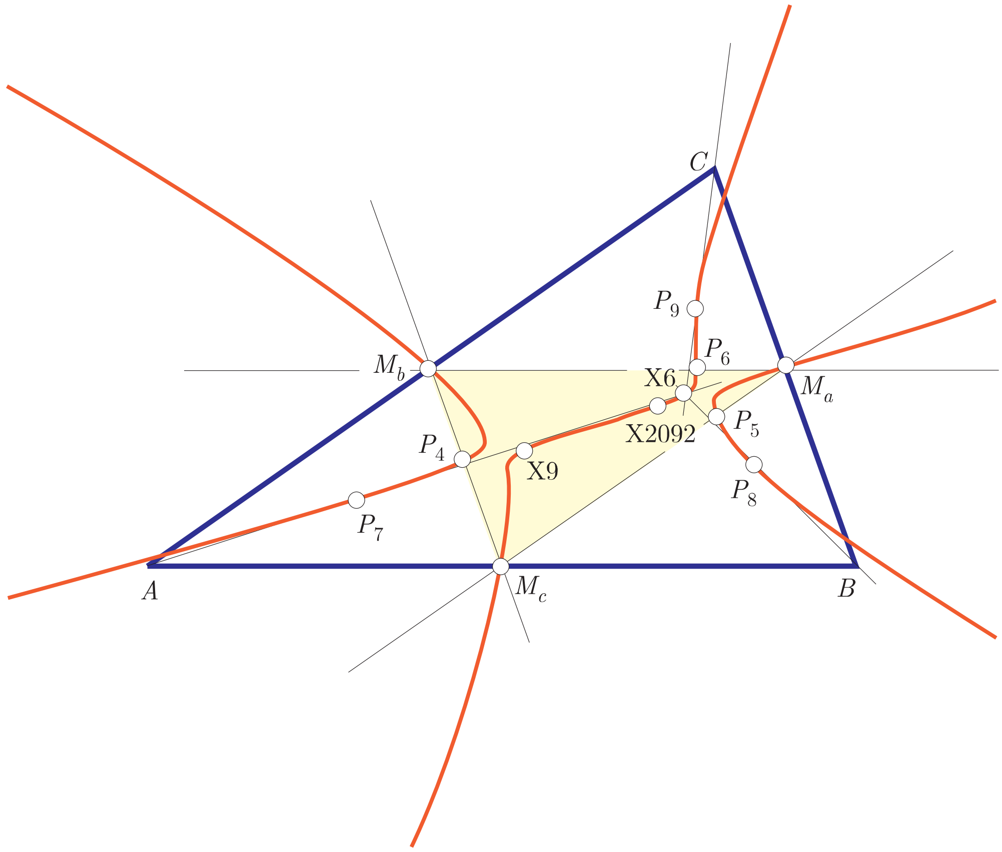
Por lo que los puntos P_4, P_5 y P_6 se construyen sin dificultad. Otra construcción, surge del hecho que estos puntos son los pies de las cevianas (respecto al triángulo medial) del pivote de la cúbica $\mathcal{M}$, mirada como isocúbica pivotal del triángulo medial (3).

Los correspondientes puntos (situados en la recta del infinito) de intersección de las tres rectas del enunciado para los puntos P_4, P_5 y P_6 son:

$$\begin{aligned}
&\Big(a(b(a+b)+c(a+c)) : -b(a+c)(a+b-c) : -c(b+a)(c+a-b)\Big),\\
&\Big(-a(c+b)(a+b-c) : b(c(b+c)+a(b+a)) : -c(b+a)(b+c-a)\Big),\\
&\Big(-a(c+b)(c+a-b) : -b(a+c)(b+c-a) : c(a(c+a)+b(c+b))\Big).
\end{aligned}$$

Los conjugados isogonales de estos puntos (situados en la circunferencia circunscrita) forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto de Schiffer (X_{21} en ETC):

$$\left(\frac{a(b+c-a)}{b+c} : \frac{b(c+a-b)}{c+a} : \frac{c(a+b-c)}{a+b}\right).$$



http://webpages.ull.es/users/amontes/cabri/gtr2348a-plus.fig

Segundo método de construcción de la cúbica $\mathcal{M}$:

Para construir la cúbica, también podemos acudir al método [4] descrito por Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert.- "Special Isocubics in the Triangle Plane", November 16, 2005. pag. 9. Para ello, debemos tener en cuenta que tal cúbica es una isocúbica respecto al triángulo medial $\widehat{M_aM_bM_c}$ de $\widehat{ABC}$.

Para obtener la ecuación de la cúbica en coordenadas baricéntricas referidas al triángulo medial, observemos que las transformaciones entre las coordenadas baricéntricas $(x : y : z)$ respecto a $\widehat{ABC}$ y las $(x' : y' : z')$ respecto a $\widehat{M_aM_bM_c}$ (ambos triángulos con el mismo baricentro) son:

$$x' = y + z - x,\ y' = z + x - y,\ z' = x + y - z. \qquad x = y' + z',\ y = z' + x',\ z = x' + y'.$$

Y queda como ecuación de la cúbica (en notación de Ehrmann-Gibert, donde los coeficientes nada tienen que ver con las coordenadas del perspector P tomado arriba), suprimiendo las primas y a, b y c se pueden considerar como las longitudes de los lados del triángulo medial ($a = 2a', b = 2b', c = 2c'$), dado la homogeneidad de las coordenadas:

(4) http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/files/isocubics.html

$$ux(ry^2 - qz^2) + vy(pz^2 - rx^2) + wz(qx^2 - py^2) = 0,$$

siendo $(u : v : w) = \big(bc(a+b)(a+c)(b+c-a) : ca(b+c)(b+a)(c+a-b) : ab(c+a)(c+b)(a+b-c)\big)$ el pivote y $(p : q : r) = \big(-bc(a+b)(a+c) : -ca(b+c)(b+a) : -ab(c+a)(c+b)\big)$ el polo de la isocúbica.

El polo es el punto $Po = X_{274}$ del triángulo medial:

$$Po\left(\frac{1}{a(b+c)} : \frac{1}{b(c+a)} : \frac{1}{c(a+b)}\right);$$

este punto es el isotómico conjugado (respecto al triángulo medial) del X_{37} (5) del triángulo medial.

El pivote es el punto $Pi = X_{314}$ del triángulo medial:

$$Pi\left(\frac{b+c-a}{a(b+c)} : \frac{c+a-b}{b(c+a)} : \frac{a+b-c}{c(a+b)}\right);$$

este punto es el conjugado isotómico, respecto al triángulo medial, del ortocentro del triángulo de contacto interior del triángulo medial (X_{65} del triángulo medial).

Podemos, entonces, escribir la ecuación de la cúbica en coordenadas baricéntricas referidas al triángulo medial de $\widehat{ABC}$ en la siguiente forma:

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{\substack{abc\\xyz}} \frac{b+c-a}{a(b+c)}\left(\frac{y^2}{c(a+b)} - \frac{z^2}{b(c+a)}\right) = 0. \tag{3}$$

En la notación de Gibert, $\mathcal{M} = pK(X274, X314)$ del triángulo medial de $\widehat{ABC}$ (la única cúbica que figura en el catálogo (6) de Gibert que convine estos puntos es $K254 = pK(X2, X314)$).

Las coordenadas del polo, respecto a $\widehat{ABC}$, son:

$$\big(a(b+c)(2bc + a(b+c)) : b(c+a)(2ca + b(c+a)) : c(a+b)(2ab + c(a+b))\big),$$

que no figura actualmente en la ETC.

Las coordenadas del pivote, respecto a $\widehat{ABC}$, son

$$\left(a^2(b+c)(b^2+c^2+a(b+c)) : b^2(c+a)(c^2+a^2+b(c+a)) : c^2(a+b)(a^2+b^2+c(a+b))\right),$$

que es el punto X_{2092} (7) en ETC.

La cúbica pasa por los pies de las cevianas, relativas al triángulo medial, del su pivote Pi; estos puntos son los P_4, P_5 y P_6 descritos más arriba (2). También contiene al punto raíz baricéntrica (respecto al triángulo medial) del polo,

$$\left(\sqrt{bc(a+b)(a+c)} : \sqrt{ca(b+c)(b+a)} : \sqrt{ab(c+a)(c+b)}\right),$$

(5) Información del punto X_{37} en ETC: Let A'B'C' be the cevian triangle of X(1). Let A" be the centroid of triangle AB'C', and define B" and C" cyclically. Then the lines AA", BB", CC" concur in X(37) (Eric Danneels, Hyacinthos 7892, 9/13/03).

(6) "Catalogue of Triangle Cubics" (Last update : 2009-02-22, http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/ctc.html) de Bernard Gibert, contiene 472 cúbicas asociadas a un triángulo.

(7) Información sobre el punto X_{2092} en ETC: Let A' be the point common to Apollonius circle and the A-excircle, and define B' and C' cyclically. Then triangle A'B'C' is perspective to the cevian triangle of X(6), and the perspector is X(2092). (Eric Danneels, Hyacinthos, #8070, 10/01/03).

y a los vértices de triángulo precevino de este punto respecto al triángulo medial.

La construcción de la cúbica descrita por Ehrmann y Gibert, consta de los siguientes pasos, donde los puntos X_n y los términos geométricos que se consideran, son tomados en relación al TRIÁNGULO MEDIAL $\widehat{M_aM_bM_c}$ de $\widehat{ABC}$:

— Se toma un punto M en la recta que une el pivote Pi con su Po-isoconjugado (cociente de las coordenadas de X_{274} entre las de X_{314}), que es el punto de Gergonne X_7 (X_9, respecto a $\widehat{ABC}$, punto intermedio que es el complemento del punto de Gergonne de $\widehat{ABC}$).

— Se construye el cociente ceviano $N = M/Pi$, centro de perspectividad del triángulo ceviano de M y el anticeviano de Pi.

— La cónica $\mathcal{H}$ circunscrita al triángulo medial que pasa por M y X_7 corta a NPi en dos puntos S y T, Po-isoconjugados (también conjugados armónicos con respecto a Pi y N) y que están en la cúbica $\mathcal{M}$.

La obtención de los puntos X_{314} y X_{274} se basa en los siguientes hechos:
X_{314} es el conjugado isotómico del ortocentro del triángulo de contacto interior y X_{274} es el conjugado isotómico del X_{37}. Para construir éste, se toma $\widehat{UVW}$ triángulo ceviano del incentro; G_a el baricentro de $\widehat{M_aVW}$, y se definen G_b y G_c cíclicamente; entonces, las rectas M_aG_a, M_bG_b y M_cG_c concurren en X_{37}.

⊛ ***Casos particulares***

Sólo hemos encontrado dos puntos en la cúbica $\mathcal{M}$ para los cuales el centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{U'V'W'}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son centros de los del tipo de ETC, a saber:

• Ya hemos mencionado (1) el caso de la circunferencia circunscrita, cuyo perspector K está en la cúbica $\mathcal{M}$, para el que las rectas A^*U', B^*V' y C^*W' concurren en el punto de primera coordenada:

$$a^2\left(a(b^4+c^4-a^4)-b(c^4+a^4-b^4)-c(a^4+b^4-c^4)+2abc(ab-bc+ca)\right).$$

• Cuando el perspector de la cónica circunscrita es X_9, punto intermedio, el punto de concurrencia de dichas tres rectas es

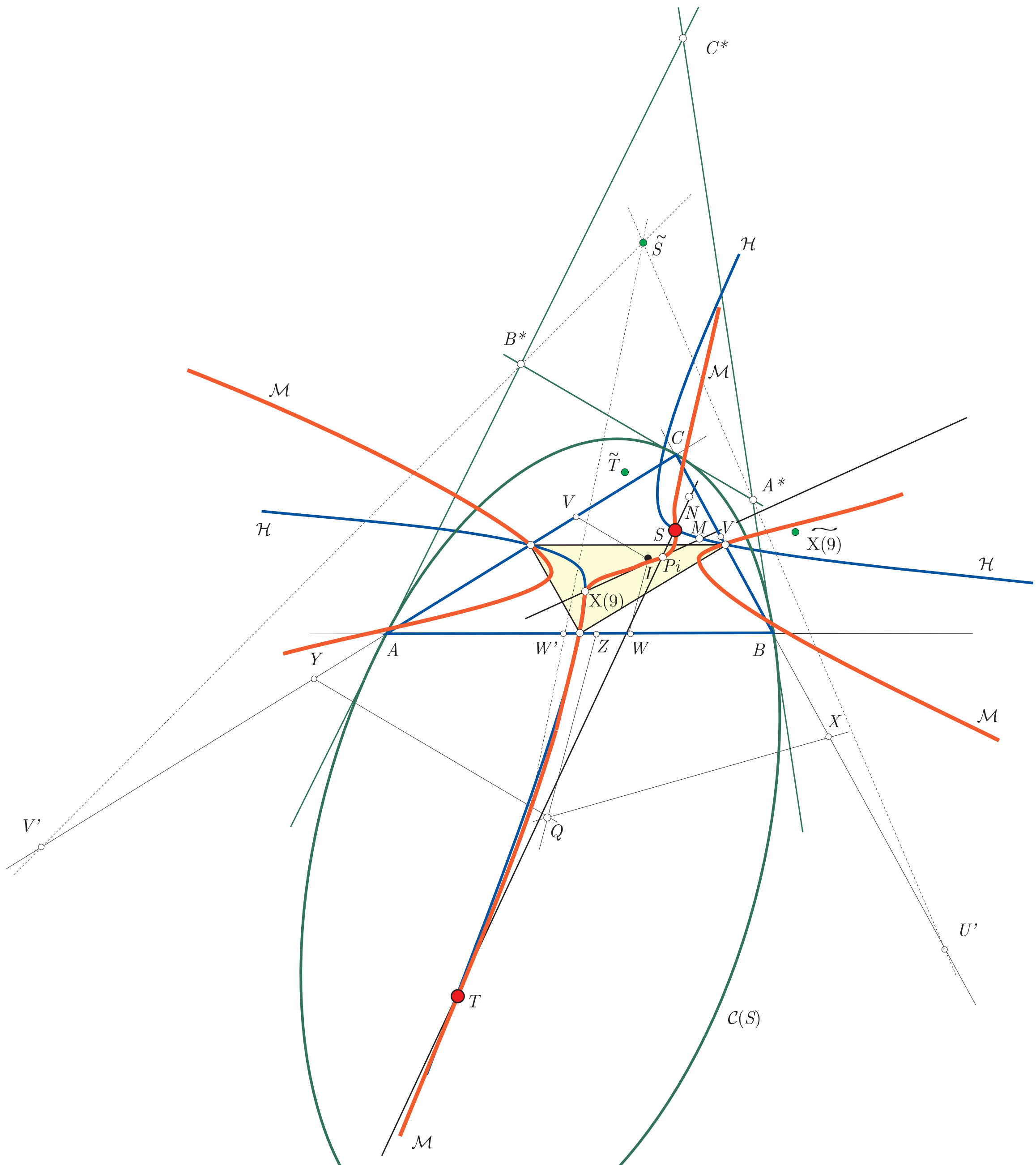
$$\widetilde{X_9}\left(a(b+c-a)(3a-b-c) : b(c+a-b)(3b-c-a) : c(a+b-c)(3c-a-b)\right),$$

que es el producto baricéntrico del punto intermedio, X_9, por el anticomplemento, X_{145}, del punto de Nagel.

• Otro centro del tipo de ETC que está en la cúbica $\mathcal{M}$ es la raíz baricéntrica del polo (como isocúbica pivotal respecto al triángulo medial) que tiene por coordenadas, respecto a $\widehat{ABC}$:

$$\left(\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+\sqrt{ab(a+c)(b+c)} : \cdots : \cdots\right).$$

No obstante, el correspondiente centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{U'V'W'}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ NO es un centro del tipo de ETC.



$C*$
$\tilde{S}$
$\mathcal{H}$
$B*$
$\mathcal{M}$
$\mathcal{M}$
C
$\tilde{T}$
$A*$
$\mathcal{H}$
V
N
S
M
V
$\widetilde{X(9)}$
$\mathcal{H}$
I
Pi
$X(9)$
Y
A
W'
Z
W
B
$\mathcal{M}$
X
V'
Q
U'
T
$\mathcal{C}(S)$
$\mathcal{M}$