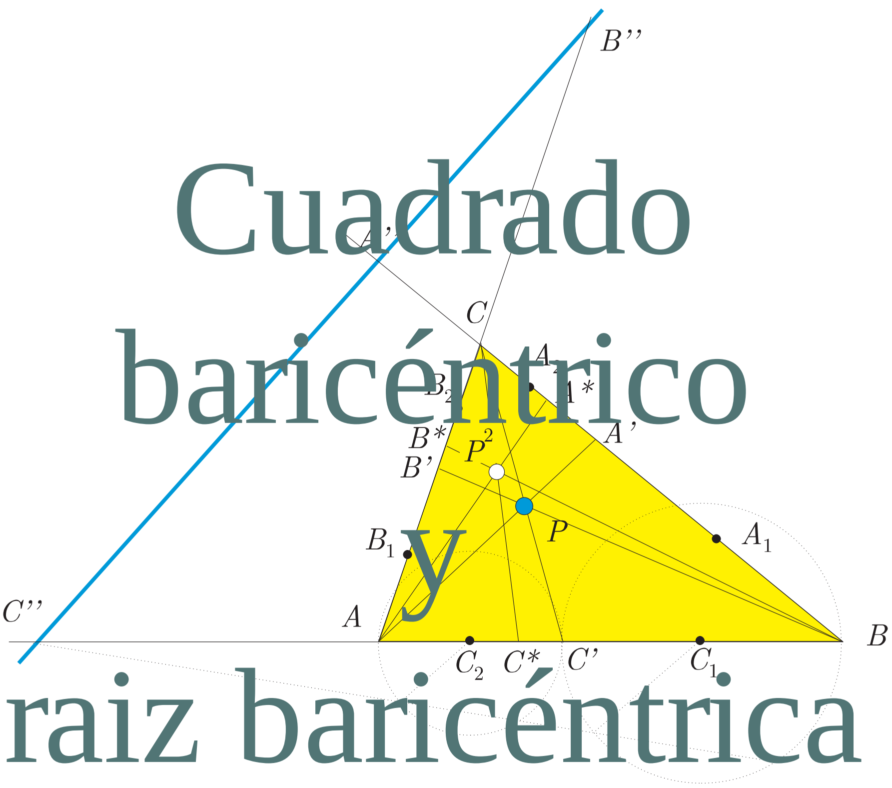
Cuadrado baricéntrico y raiz baricéntrica



Cuadrado baricéntrico y raíz baricéntrica

Angel Montesdeoca

Dado un punto $P(u : v : w)$ en coordenadas baricéntricas, se dan construcciones geométricas de los puntos $P^2(u^2 : v^2 : w^2)$ y $\sqrt{P}(\sqrt{u} : \sqrt{v} : \sqrt{w})$ y sus justificaciones analíticas.

$\triangle$
∇

⊛ *Coordenadas baricéntricas y trilineales*

Las coordenadas baricéntricas fueron introducidas por A.F. Möbius in 1827, como una respuesta a la cuestión sobre qué masas se deben colocar en los vértices de un triángulo para que un punto dado sea el centro de gravedad de estas masas.

Con respecto a un triángulo fijo $\widehat{ABC}$, a todo punto P de su plano se le puede asignar una terna $(u : v : w)$ de tal forma que si u es la masa en A, v en B y w en C, el centro de gravedad está en P. Estas masas pueden ser tomadas proporcionales [1] a las áreas de los triángulos $\widehat{PBC}$, $\widehat{PCA}$ y $\widehat{PAB}$.

Las coordenadas baricéntricas homogéneas de P con respecto al triángulo $\widehat{ABC}$ es la terna $(u : v : w)$ tal que

$$(u : v : w) \equiv (\Delta\widehat{PBC} : \Delta\widehat{PCA} : \Delta\widehat{PAB})$$

Se entiende que el área de un triángulo $\widehat{XYZ}$ es cero si X, Y, Z están alineados, positiva si la orientación de los vértices es en el sentido contrario a las agujas de un reloj y negativa en otro caso. Por ejemplo, todo punto P sobre el lado BC, tiene por coordenadas baricéntricas homogéneas

$$(0 : PC : BP) \equiv (0 : \Delta\widehat{PCA} : \Delta\widehat{PAB}).$$

[1] Si $P(x, y)$ son las coordenadas respecto a la referencia afín $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$, $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, sus coordenadas baricéntricas son

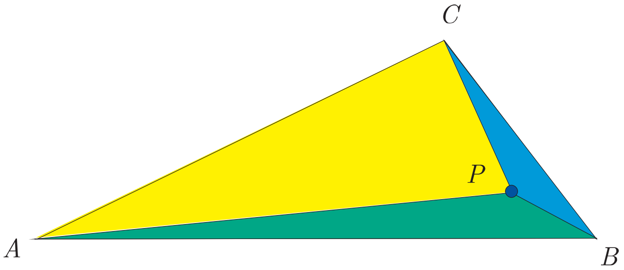
$$P(1-x-y, x, y)$$

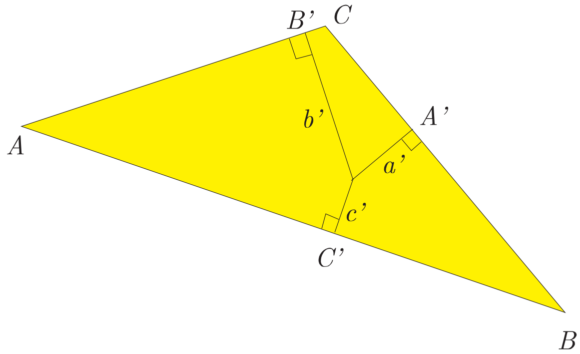
Las coordenadas de P respecto a un sistema de coordenadas ortonormales $\{A; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ con vector unitario $\vec{e}_1$ en la dirección de $\overrightarrow{AB}$, son $P(cx + by\cos A, by \operatorname{sen} A)$. Se tiene también que $A(0, 0)$, $B(c, 0)$ y $C(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$. Resultan las siguientes áreas de triángulos:

$$2\Delta\widehat{PBC} = \begin{vmatrix} cx+by\cos A & by\operatorname{sen} A & 1 \\ c & 0 & 1 \\ b\cos A & b\operatorname{sen} A & 1 \end{vmatrix} = (1-x-y)bc\operatorname{sen} A, \quad 2\Delta\widehat{PCA} = \begin{vmatrix} cx+by\cos A & by\operatorname{sen} A & 1 \\ b\cos A & b\operatorname{sen} A & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = xbc\operatorname{sen} A,$$

$$2\Delta\widehat{PAB} = \begin{vmatrix} cx+by\cos A & by\operatorname{sen} A & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix} = ybc\operatorname{sen} A.$$

Dado un triángulo de referencia $\widehat{ABC}$ las coordenadas trilineales homogéneas en un punto P con respecto A $\widehat{ABC}$ es la terna $(\alpha : \beta : \gamma)$ que son proporcionales a las distancias de P a los lados.





Para establecer la relación que existe entre las coordenadas baricéntricas $(u : v : w)$ y trilineales $(\alpha : \beta : \gamma)$, basta observar que

$$(u : v : w) \equiv (aa' : bb' : cc') \qquad \text{y} \qquad (\alpha : \beta : \gamma) \equiv (a' : b' : c').$$

Así, las coordenadas baricéntricas de un punto de coordenadas trilineales $(\alpha : \beta : \gamma)$ son $(a\alpha : b\beta : c\gamma)$. Y un punto de coordenadas baricéntricas $(u : v : w)$ tiene por coordenadas trilineales $(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}, \frac{w}{c})$.

Ejemplo: El incentro equidista de los lados, luego sus coordenadas trilineales son $(1 : 1 : 1)$ y por consiguiente sus baricéntricas son $(a : b : c)$.

El baricentro (centro de gravedad del triángulo) tiene de coordenadas baricéntricas $(1 : 1 : 1)$ y por tanto sus coordenadas trilineales son $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) \equiv (bc : ca : ab)$.

⊛ ***Cuadrado baricéntrico***

Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo y P un punto en su plano, a las rectas, AP, BP y CP se les denomina cevianas y si denotamos por A', B' y C', los puntos de intersección de ellas con los lados del triángulo, se tienen las siguientes expresiones en coordenadas baricéntricas[2]:

$$A(1:0:0), \quad B(0:1:0), \quad C(0:0:1), \quad P(u:v:w), \quad A'(0:v:w), \quad B'(u:0:w), \quad C'(u:v:0).$$

$$AB: \ z=0, \quad AC: \ y=0, \quad BC: \ x=0, \quad AP: \ wy-vz=0, \quad BP: \ wx-uz=0, \quad CP: \ vx-uy=0.$$

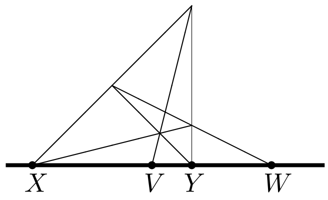
Recordemos que si $P(u : v : w)$ y $Q(u' : v' : w')$ son dados en coordenadas baricéntricas respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, satisfaciendo $u + v + w = u' + v' + w'$, el punto X que divide a PQ en la razón

$$\frac{PX}{XQ} = \frac{p}{q}$$

[2] Recíprocamente, si $A(0 : v : w), B(u : 0 : w), C(u : v : 0)$, entonces AA', BB', CC' son las cevianas del punto $P(u : v : w)$.

tiene por coordenadas baricéntricas

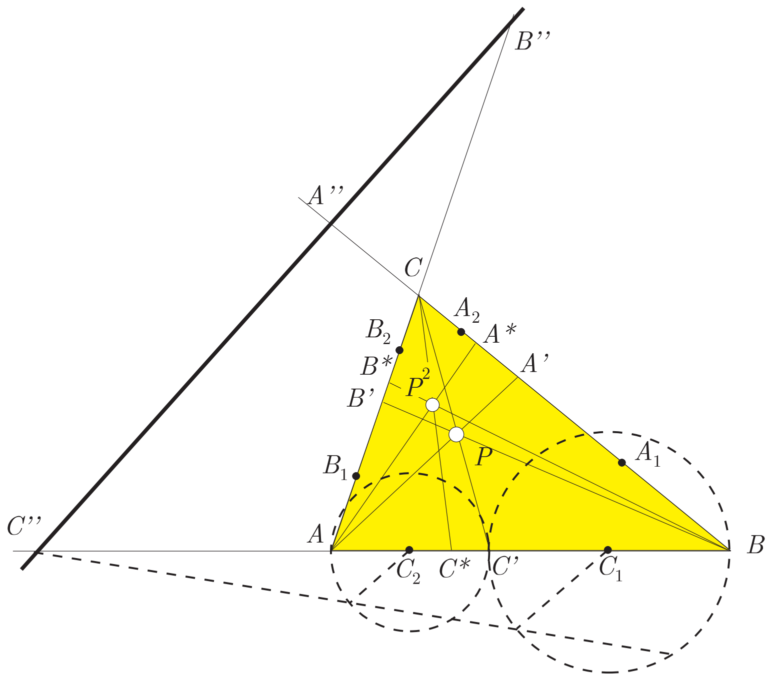
$$X(qu + pu' : qv + pv' : qw + pw').$$



Se dice que X e Y **dividen armónicamente** a V y W si

$$(X\ Y\ V\ W) = -1 \quad \text{ó} \quad \frac{VX}{XW} = -\frac{VY}{YW}.$$

> Sea $P(u : v : w)$ un punto dado en coordenadas baricéntricas respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$ y A', B' y C' los pies de las cevianas, entonces los centros de homotecia (distintos de A', B' y C') de los pares de circunferencias de diámetros $A'B$ y $A'C$, $B'A$ y $B'C$, $C'A$ y $C'B$, están en una recta y el tripolo de ésta es el punto $P^2(u^2 : v^2 : w^2)$, denominado **cuadrado baricéntrico** de P.



Applet CabriJava: http://webpages.ull.es/users/amontes/cabri/baric2b.htm

Demostración.- Como los centros de dos circunferencias están armónicamente separados de los centros de homotecia interno y externo[3], utilizamos este hecho para determinar las coordenadas baricéntricas de los otros centros de homotecia A'', B'' y C'', distintos de A', B' y C'.

Primero determinemos los puntos medios A_1 y A_2 de los segmentos $A'B$ y $A'C$:

$$\frac{A'A_1}{A_1B} = \frac{1}{1}, \quad A'(0 : v; w), \quad B(0 : v + w : 0) \quad \Longrightarrow \quad A_1(0 : 2v + w : w)$$

[3]

$$\frac{A'A_2}{A_2C} = \frac{1}{1}, \quad A'(0:v;w), \quad C(0:0:v+w) \quad \Longrightarrow \quad A_2(0:v:v+2w)$$

A' y A'' dividen armónicamente a A_1 y A_2 si

$$\frac{A_1A'}{A'A_2} = -\frac{A_1A''}{A''A_2} = \frac{p}{q},$$

así,

$$A'(0:v:w) \equiv (0:q(2v+w)+py:qw+p(v+2w)), \quad \frac{q(2v+w)+py}{v} = \frac{qw+p(v+2w)}{w}, \quad \frac{p}{q} = \frac{w}{v}.$$

$$\frac{A_1A''}{A''A_2} = -\frac{w}{v}, \quad A_1(0:2v+w;w), \quad A_2(0:v:v+2w) \quad \Longrightarrow \quad A''(0:-v(2v+w)+wv:-vw+w(v+2w))$$

$$A''(0,-v^2:w^2).$$

Análogamente, se obtienen:

$$B''(-u^2:0:w^2), \qquad C''(-u^2:v^2:0).$$

Se concluye que los tres puntos A'', B'', C'' están alineados, pues el determinante formado por sus coordenadas es igual a cero. La ecuación de la recta que los contiene es

$$v^2w^2x + u^2w^2y + u^2v^2z = 0, \qquad \text{o bien} \qquad \frac{x}{u^2} + \frac{y}{v^2} + \frac{z}{w^2} = 0.$$

El tripolo [4] de esta recta es el punto

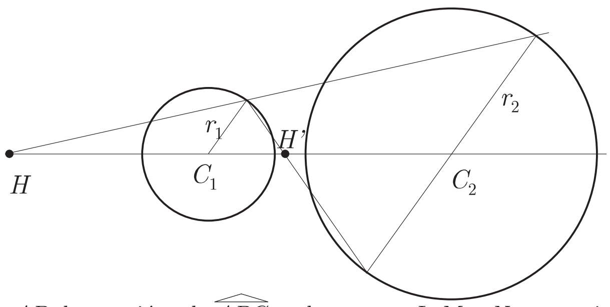
$$P^2(u^2:v^2:w^2).$$

Como se comprueba determinando A^*, B^* y C^* y comprobando que las rectas AA^*, BB^*, CC^* concurren en P^2:

A'' y A^* dividen armónicamente a B y C si

$$\frac{BA''}{A''C} = -\frac{BA^*}{A^*C} = \frac{p}{q}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{HC_1}{HC_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \\[2ex] \dfrac{H'C_1}{H'C_2} = -\dfrac{r_1}{r_2} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{HC_1}{C_1H'} = -\frac{HC_2}{C_2H'}$$



[4] Si r es una recta que corta a los lados BC, AC y AB de un triángulo $\widehat{ABC}$ en los puntos L, M y N, respectivamente, y si L', M' y N' son los conjugados armónicos de L respecto a B y C, de M respecto a A y C y de N respecto a A y B, respectivamente, entonces las rectas AL', BM' y CN' se cortan en un punto R, denominado tripolo de r.

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{p}{q}, \quad B(0:1:0), \quad C(0:0:1), \quad A''(0:-v^2:w^2) \Longrightarrow (0:-v^2:w^2) \equiv (0:q:p), \quad \frac{p}{q} = -\frac{w^2}{v^2}.$$

$$-\frac{BA^*}{A^*C} = -\frac{w^2}{u^2} \qquad \Longrightarrow \qquad A^*(0:v^2:w^2).$$

Análogamente:

$$B^*(u^2:0:w^2), \qquad C^*(u^2:v^2:0).$$

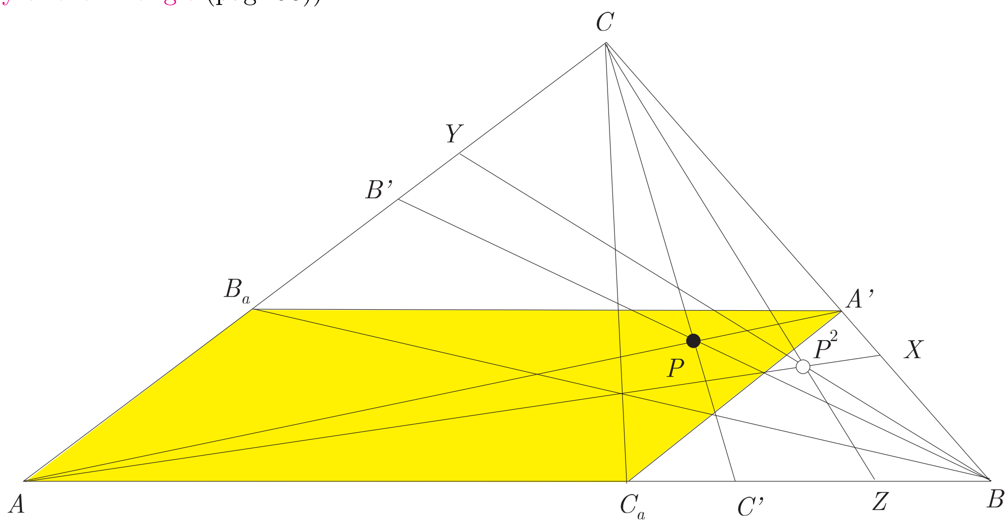
Las rectas

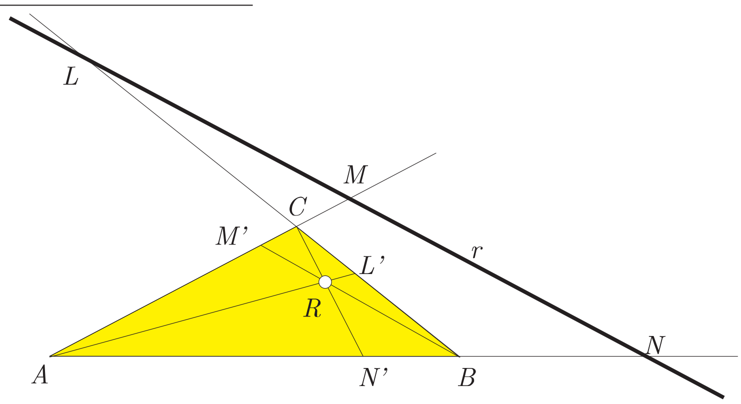
$$AA^*: \, w^2y - v^2z = 0, \quad BB^*: \, w^2x - u^2z = 0, \quad CC^*: \, v^2x - u^2y = 0,$$

concurren en $P^2(u^2:v^2:w^2)$. ◪

Notas:

- Otra manera de construir el cuadrado baricéntrico es la siguiente (ver Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle (pag. 98)):





Construir el paralelogramo $AB_aA'C_a$ con B_a en AC y C_a en AB.

Construir el punto $BB_a \cap CC_a$ y unir éste con A para determinar X en BC.

Repetir la misma construcción, usando los pies B' y C' de las cevianas por P, para obtener Y en AC y Z en AB.

Entonces AX, BY, CZ concurren en el cuadrado baricéntrico P^2 de P.

Applet CabriJava: http://webpages.ull.es/users/amontes/cabri/baric2c.htm

Justificación analítica de esta construcción:

Como el punto del infinito de la recta AB es $(-1:1:0)$, la recta por $A'(0:v:w)$ y paralela a AB tiene por ecuación $wx - vz = 0$: ésta corta a AC $(y=0)$ en $B_a(v:0:w)$.

Como el punto del infinito de la recta AC es $(1:0:-1)$, la recta por $A'(0:v:w)$ y paralela a AB tiene por ecuación $vx - wz = 0$; ésta corta a AB $(z=0)$ en $C_a(w:v:0)$.

Las rectas $BB_a: wx - vz = 0$ y $CC_a: -vx + wy = 0$, se cortan en $(vw : -v^2 : w^2)$.

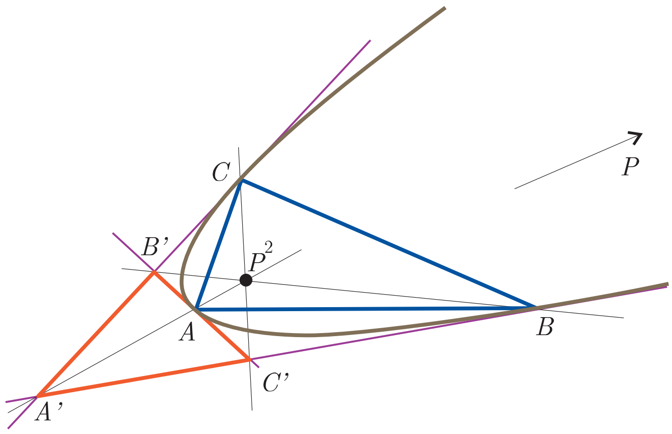
El punto $X(0:-v^2:w^2)$ es la intersección de las rectas $AX: w^2y + v^2z = 0$ y $BC: x = 0$.

Análogamente, se obtienen $Y(-u^2:0:w^2)$ y $Z(-u^2:v^2:0)$.

Las rectas $AX: w^2y + v^2z = 0$, $AY: w^2x + u^2z = 0$ y $CZ: v^2x + u^2y = 0$, concurren en $P^2(u^2:v^2:w^2)$.

- En el caso de que P sea un punto impropio, para obtener su cuadrado baricéntrico, se procede como en cualquiera de los métodos anteriores, no obstante se tiene esta otra interpretación geométrica:

> El punto impropio de una parábola circunscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, tiene cuadrado baricéntrico el perspector de la parábola; es decir, el centro de perspectividad del triángulo $\widehat{ABC}$ y del formado por las tangentes a la parábola en los vértices de $\widehat{ABC}$.



Una cónica circunscrita a un triángulo tiene como ecuación baricéntrica

$$pyz + qzx + rxy = 0.$$

Si es tangente al al recta del infinito en el punto $P(u:v:w)$, será una parábola, cuya ecuación se determina teniendo en cuenta que el punto está en la cónica, que el punto está en la recta del infinito y que la polar de P respecto a la cónica es la recta del infinito. Lo que equivale a plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$pvw + qwu + ruv = 0, \quad u + v + w = 0, \quad \begin{pmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La solución $(p : q : r)$ es el perspector de la parábola circunscrita a $\widehat{ABC}$:

$$\left(\frac{v+w}{vw} : \frac{v}{w(v+w)} : \frac{w}{v(v+w)} \right) \equiv ((v+w)^2 : v^2 : w^2) \equiv (u^2 : v^2 : w^2).$$

Para establecer que $(p : q : r)$ es el perspector de la parábola, basta obtener las tangentes en los vértices de $\widehat{ABC}$ a la cónica

$$pzy + qzx + rxy = 0,$$

que son

$$ry + qz = 0, \qquad rx + pz = 0, \qquad qx + py = 0.$$

Las cuales determinan el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, con vértices en

$$(-p : q : r), \qquad (p : -q : r), \qquad (p : q : -r).$$

Éste es perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en $P(p : q : r)$.

El lugar geométrico de los cuadrados baricéntricos de la recta del infinito $x + y + z = 0$, se obtiene eliminando u, v y w, entre las ecuaciones:

$$u + v + w = 0, \qquad x = u^2, y = v^2, z = w^2.$$

Y resulta:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0,$$

que es la elipse de Steiner inscrita en $\widehat{ABC}$, tangente a los lados en sus puntos medios.

• Otra propiedad del cuadrado baricéntrico se pone de manifiesto en el siguiente resultado:
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2331.pdf

"Un punto P tiene coordenadas baricéntricas $(u : v : w)$, respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$; entonces, los puntos que tienen estas mismas coordenadas homogénea en la referencia $\{A, B, C; X\}$, cuando el punto unidad X recorre una recta d arbitraria que pasa por P, describe una recta d' que pasa por un punto fijo P', cuando d varía. Los puntos $d \cap d'$ determinan una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ que pasa por P y P' y con tangente en P la recta PG (G baricentro de $\widehat{ABC}$). Las coordenadas baricéntricas de P' son $(u^2 : v^2 : w^2)$, es decir, P' es el cuadrado baricéntrico de P."

⊛ *Raíz baricéntrica*

Dado un punto $P(u:v:w)$, en el interior de un triángulo $\widehat{ABC}$, tratamos determinar geométricamente el punto $\sqrt{P}(\sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w})$.

Seguiremos los pasos inversos de la construcción de $P^2(u^2:v^2:w^2)$ ya hecha.

> Sean A'', B'' y C'' los puntos de intersección de la tripolar de P con los lados BC, AC y AB, respectivamente. A^* es el punto armónicamente separado de A'' respecto a los puntos medios A_1 y A_2 de los segmentos A^*B y A^*C; análogamente B^* y C^*. Entonces las rectas AA^*, BB^*, CC^* concurren en el punto $\sqrt{P}$.

Construcción gráfica de A^*:

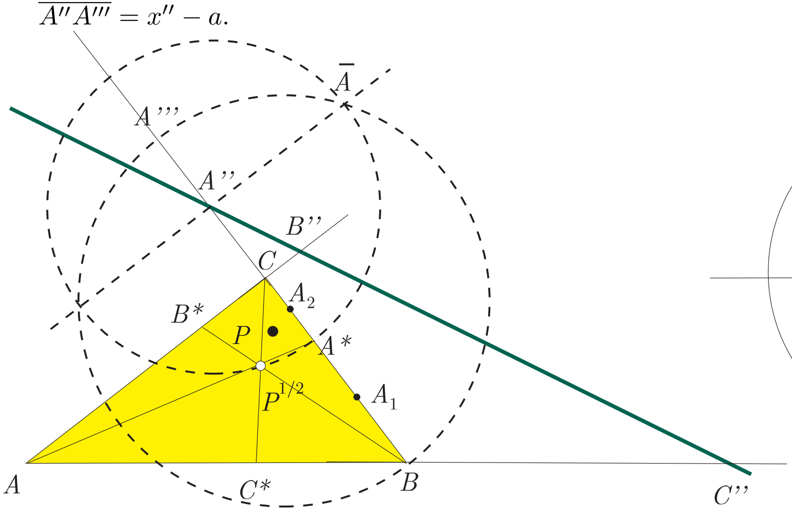
Sea A''' el simétrico de C respecto a A'', $\bar{A}$ uno de los puntos de corte de la circunferencia de diámetro BA''' con la perpendicular por A'' a BC. A^* es la intersección (comprendida entre B y C) de la circunferencia de centro en A'' y radio $\bar{A}A''$ con BC.

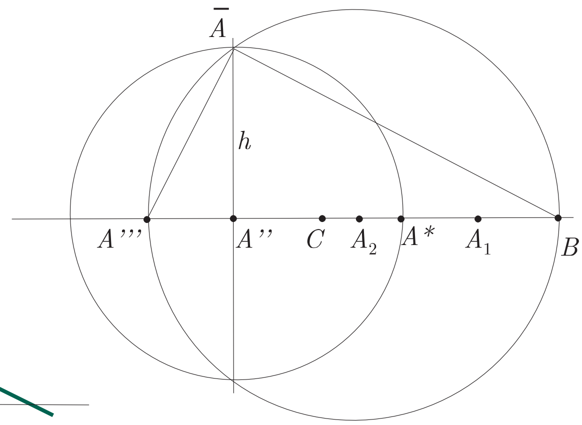
Esta construcción no depende del punto de corte $\bar{A}$ tomado, ni de que se intercambien B y C.

La construcción, en la recta BC, del punto A^* se justifica tomando las coordenadas $B(0)$, $C(a)$, $A''(x'')$, $A^*(x^*)$ y entonces $A_1(x^*/2)$ y $A_2((a-x^*)/2)$.

$$(A^*\ A''\ A_1\ A_2) = -1, \qquad \frac{x^*/2 - x^*}{x^*/2 - x''} = -\frac{(x^*-a)/2 - x^*}{(x^*-a)/2 - x''}, \qquad x^* = x'' \pm \sqrt{x''(x''-a)}.$$

Para construir el punto $A^*(x^*)$, basta tener presente que en el triángulo rectángulo $\widehat{A'''\bar{A}B}$, la altura $h = \bar{A}A''$ es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa, $\overline{BA''} = x''$ y $\overline{A''A'''} = x'' - a$.





Vamos ahora a obtener las coordenadas del punto $\sqrt{P}$, así construido:

Las intersecciones de la tripolar de $P(u:v:w)$,

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0,$$

con los lados del triángulo son $A''(0 : -v : w)$ con BC, $B''(-u : 0 : w)$ con AC y $C''(-u : v : 0)$ con AB.

Como A'' es el punto medio de C y A''',

$$\frac{CA''}{A''A'''} = \frac{1}{1}, \quad A'''(0;\eta : \zeta), \quad C(0 : 0 : \eta + \zeta) \quad \Longrightarrow \quad A''(0 : -v : w) \equiv (0 : \eta : \zeta + \eta + \zeta).$$

Luego, $A'''(0 : -2v : v + w)$.

Como también A_1 es el punto medio de $A^*(0 : s : t)$ y $B(0 : s + t : 0)$ y A_2 es el punto medios de A^* y $C(0 : 0 : s + t)$, se obtiene, de forma similar, que

$$A_1(0 : 2s + t : t), \qquad A_2(0 : s : s + 2t).$$

Al estar A^* armónicamente separado de A'', respecto a A_1 y A_2, resulta

$$(A^*\ A''\ A_1\ A_2) = -1, \qquad \frac{A_1A^*}{A^*A_2} = -\frac{A_1A''}{A''A_2} = \frac{p}{q}.$$

$$-\frac{A_1A''}{A''A_2} = \frac{p}{q}, \quad A''(0 : -v : w) \equiv (0 : q(2s + t) - ps : qt - p(s + 2t)),$$

$$\left.\begin{array}{l} q(2s + t) - ps = -\lambda v \\ qt - p(s + 2t) = \lambda w \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{q} = \frac{2sw + t(v + w)}{2tv + s(v + w)}.$$

$$\frac{A_1A^*}{A^*A_2} = \frac{p}{q}, \quad A^*(0 : s : t) \equiv (0 : q(2s + t) + ps : qt + p(s + 2t)),$$

$$\left.\begin{array}{l} (2tv + s(v + w))(2s + t) + (2sw + t(v + w))s = \lambda s \\ (2tv + s(v + w))t + (2sw + t(v + w))(s + 2t) = \lambda t \end{array}\right\}$$

Sistema que da como soluciones $(0 : s : t)$:

$$(0 : 0 : 0), \quad \left(0 : \frac{\lambda}{-2\,v + 2\,w} : \frac{\lambda}{2\,v - 2\,w}\right),$$

$$\left(0 : \frac{\lambda\sqrt{v}}{2\left(\sqrt{v} - \sqrt{w}\right)^3} : \frac{-\lambda\sqrt{w}}{2\left(\sqrt{v} - \sqrt{w}\right)^3}\right), \quad \left(0 : \frac{\lambda\sqrt{v}}{2\left(\sqrt{v} + \sqrt{w}\right)^3} : \frac{\lambda\sqrt{w}}{2\left(\sqrt{v} + \sqrt{w}\right)^3}\right).$$

O, equivalentemente:

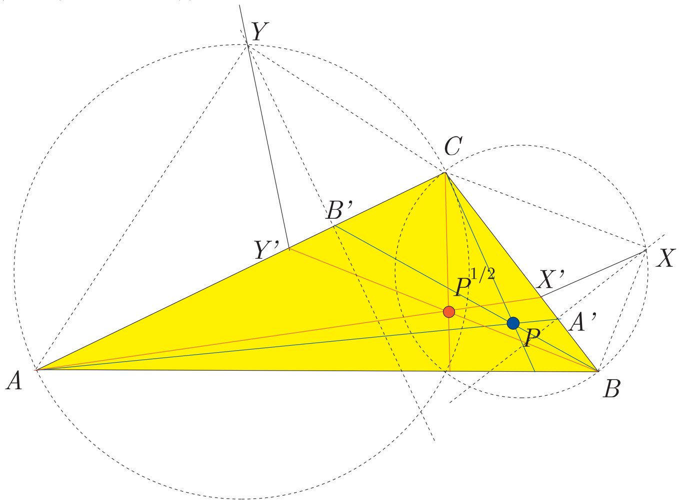
$$(0 : 0 : 0), \quad (0 : -1 : 1), \quad (0 : \sqrt{v} : -\sqrt{w}), \quad (0 : \sqrt{v} : \sqrt{w}).$$

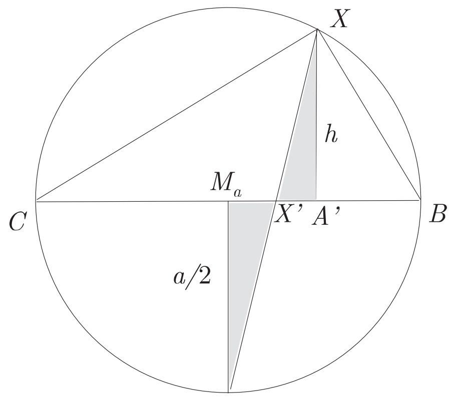
Las primeras no determinan ningún punto, las segundas corresponden al punto del infinito de la recta BC y de las restantes la que está entre B y C es

$$A^*(0 : \sqrt{v} : \sqrt{w}). \qquad \text{Análogamente} \quad B^*(\sqrt{u} : 0 : \sqrt{w}), \quad C^*(\sqrt{u} : \sqrt{v} : 0).$$

Las rectas AA^*, BB^*, CC^* concurren en el $\sqrt{P}(\sqrt{u} : \sqrt{v} : \sqrt{w})$. ◪

Nota: Otra manera de construir la raíz baricéntrica es la siguiente (ver Paul Yiu.- The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry (Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., 31 (2000) pag. 574)):





Construir la circunferencia de diámetro BC.

Construir la perpendicular a BC en el pie A' de la ceviana AP, que interseca a la circunferencia en X (no importa la elección hecha). La bisectriz de $\widehat{BXC}$ interseca a BC en X'.

De manera similar se obtienen los puntos Y' en AC y Z' en AB.

Las rectas AA', BB', CC' concurren en $\sqrt{P}$.

Justificación analítica de esta construcción:

De la semejanza de triángulos de ser $\widehat{BXC}$ un triángulo rectángulo (figura de la derecha), se sigue:

$$\frac{2h}{a} = \frac{A'X'}{X'M_a}, \qquad h^2 = BA' \cdot A'C.$$

$$P(u:v:w), \quad A'(0:u:v), \quad M_a(0:1:1), \qquad h^2 = \frac{aw}{v+w}\frac{av}{v+w}$$

$$\frac{A'X'}{X'M_a} = \frac{2\sqrt{vw}}{v+w}, \qquad A'(0:2v:2w), \qquad M_a(0:u+v:u+v).$$

$$X'\left(0:2v(v+w)+2\sqrt{vw}(v+w):2w(v+w)+2\sqrt{vw}(v+w)\right),$$

$$X'(0:v+\sqrt{vw}:w+\sqrt{vw}) \equiv (0:(\sqrt{v}+\sqrt{w})\sqrt{v}:(\sqrt{v}+\sqrt{w})\sqrt{w}) \equiv (0:\sqrt{v}:\sqrt{w}).$$

De forma análoga se obtiene que $Y'(\sqrt{u}:0:\sqrt{v})$ y $Z'(\sqrt{u}:\sqrt{v}:0)$; así, AX', BY', CZ' son las cevianas del punto $\sqrt{P}(\sqrt{u}:\sqrt{v}:\sqrt{w})$.

⊛ *Algunos cuadrados baricéntricos y raíces baricéntricas*

En el siguiente cuadro, X_n son puntos de la Enciclopedia de Centros de un Triángulo (ETC) [5]
En la primera y última columna figuran las coordenadas baricéntricas que aparecen en la Enciclopedia o en su defecto la distancia al lado BC del triángulo de lados $a = 6, b = 9$ y $c = 13$.

Coordenadas baricéntricas	Raíz	Cuadrado	Coordenadas baricéntricas o distancia al lado BC
$a : b : c$	X_1	X_6	$a^2 : b^2 : c^2$
$1 : 1 : 1$	X_2	X_2	$1 : 1 : 1$
$\cos A : \cos B : \cos C$	X_3	X_{577}	$f(A, B, C) : f(B, C, A) : f(C, A, B)$, donde $f(A, B, C) =$ $\operatorname{sen} A - 8(area)^3 \cos A/(a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C)$
$\operatorname{tag} A : \operatorname{tag} B : \operatorname{tag} C$	X_4	X_{393}	$\operatorname{tag}^2 A : \operatorname{tag}^2 B : \operatorname{tag}^2 C$
$a \cos(B - C) : \cdots : \cdots$	X_5		0.0391628733 cm
$a^2 : b^2 : c^2$	X_6	X_{32}	$a^4 : b^4 : c^4$
$\dfrac{1}{b + c - a} : \cdots : \cdots$	X_7	X_{279}	$\dfrac{1}{(s - a)^2} : \dfrac{1}{(s - b)^2} : \dfrac{1}{(s - c)^2}$
$b + c - a : \cdots : \cdots$	X_8	X_{346}	$(b + c - a)^2 : (c + a - b)^2 : (a + b - c)^2$
$a(b + c - a) : \cdots : \cdots$	X_9	X_{220}	$a^2(b + c - a)^2 : b^2(c + a - b)^2 : c^2(a + b - c)^2$
$b + c : c + a : a + b$	X_{10}	X_{594}	$(b + c)^2 : (c + a)^2 : (a + b)^2$
$(b + c - a)(b - c)^2 : \cdots : \cdots$	X_{11}		1.6896160921 cm
$(b + c)^2/(b + c - a) : \cdots : \cdots$	X_{12}		0.4852666929 cm

[5] Un centro de un triángulo es un punto definido como una función de las variables a, b y c, que son las longitudes de los lados de un triángulo, de la forma

$$f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b),$$

donde f es homogénea en a, b, c, y

$$|f(a, b, c)| = |f(a, c, b)|.$$

Enlaces a Centros de un Triángulo:
ETC: http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html
Quim Castellsaguer.-TOT TRIANGLES WEB: http://www.xtec.es/ qcastell/ttw/ttwesp/portada.html
Cabri macros for triangle centres: http://www.maths.gla.ac.uk/ wws/cabripages/triangle/macros.htm
Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II (Ricardo Barroso Campos):
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

$a^2(b^2+c^2):\cdots:\cdots$	X_{39}		0.8545388615 cm
$\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$	X_{75}	X_{76}	$\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2}$
$\frac{a}{b+c}:\cdots\cdots$	X_{81}	X_{593}	$(\frac{a}{b+c})^2:(\frac{b}{c+a})^2:(\frac{c}{a+b})^2$
$(a+b)(a+c):\cdots:\cdots$	X_{86}	X_{1509}	$(a+b)^2(a+c)^2:\ldots:\ldots$
$\operatorname{sen}\frac{A}{2}:\operatorname{sen}\frac{B}{2}:\operatorname{sen}\frac{C}{2}$	X_{174}	X_{57}	$\frac{a}{b+c-a}:\frac{b}{c+a-b}:\frac{c}{a+b-c}$
$\sqrt{a^3}:\sqrt{b^3}:\sqrt{c^3}$	X_{365}	X_{31}	$a^3:b^3:c^3$
$\sqrt{a}:\sqrt{b}:\sqrt{c}$	X_{366}	X_1	$a:b:c$
2.8231516102 cm		X_{10}	$b+c:c+a:a+b$
2.3521229242 cm		X_{37}	$a(b+c):b(c+a):c(a+b)$
2.5314608965 cm		X_{38}	$a(b^2+c^2):b(c^2+a^2):c(a^2+b^2)$
2.0539077723 cm		X_{39}	$a^2(b^2+c^2):b^2(c^2+a^2):c^2(a^2+b^2)$
1.8857323317 cm		X_{42}	$a^2(b+c):b^2(c+a):c^2(a+b)$
1.5059252580 cm		X_{58}	$a^2(b+c)(a+c):\ldots:\ldots$
1.9236819112 cm		X_{81}	$a(c+b)(a+c):\ldots:\ldots$
1.7512928290 cm		X_{82}	$a(a^2+b^2)(a^2+c^2):\ldots:\ldots$
2.2119833027 cm		X_{83}	$(a^2+b^2)(a^2+c^2):\ldots:\ldots$
2.3997047930 cm		X_{86}	$(a+b)(a+c):(b+c)(b+a):(c+a)(c+b)$
3.0460198705 cm		X_{141}	$b^2+c^2:c^2+a^2:a^2+b^2$
2.6095991023 cm		X_{115}	$(a^2-b^2)^2:(b^2-c^2)^2:(c^2-a^2)^2$
1.9594901144 cm		X_{171}	$a^2+abc:b^3+abc:c^3+abc$