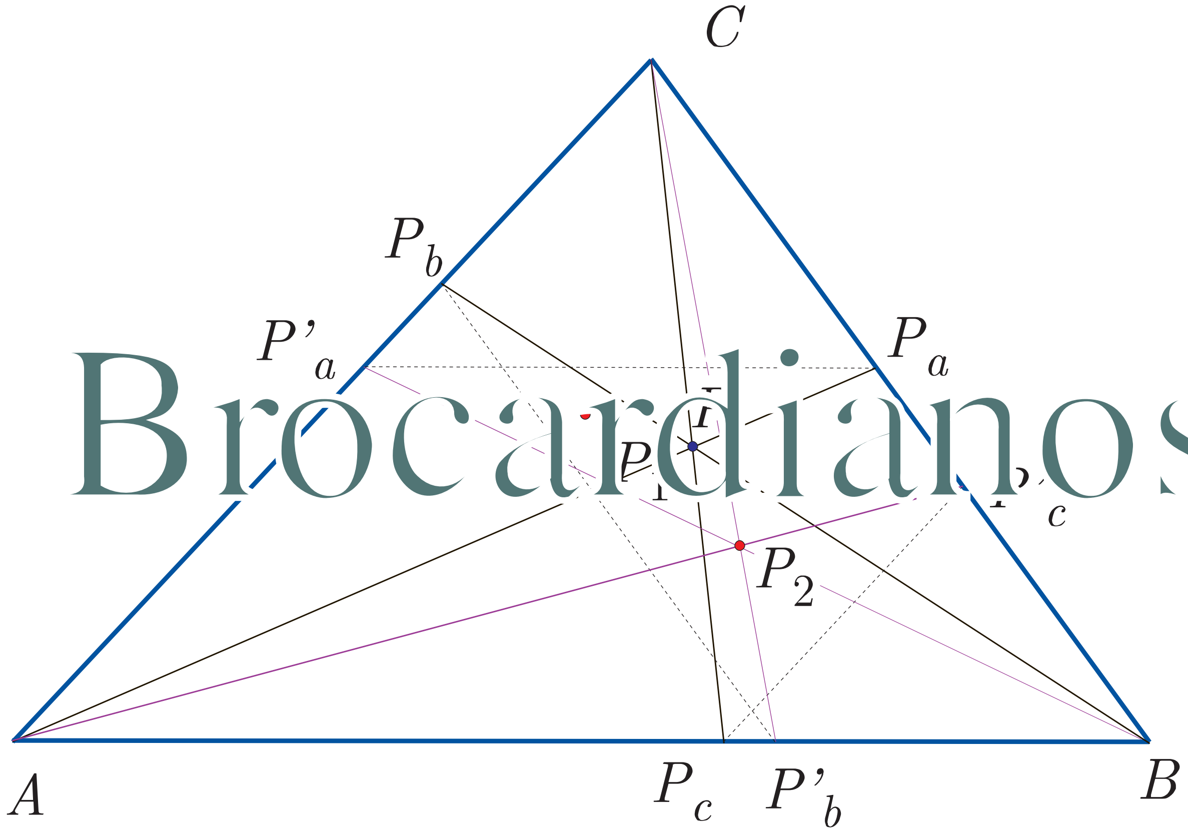
Brocardianos



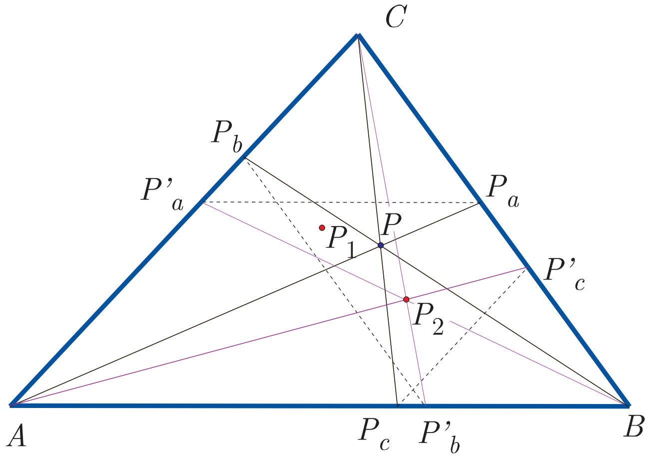
Brocardianos

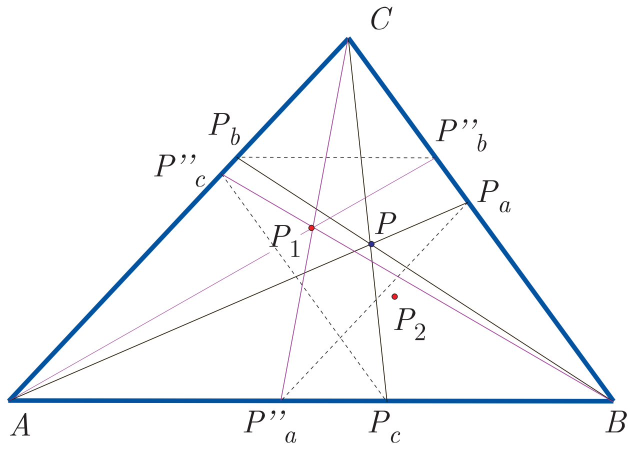
Angel Montesdeoca

Dado un punto $P(u : v : w)$, en coordenadas baricéntricas relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, los brocardianos de P son los puntos

$$P_1\left(\frac{1}{v} : \frac{1}{w} : \frac{1}{u}\right), \qquad P_2\left(\frac{1}{w} : \frac{1}{u} : \frac{1}{v}\right).$$

Su construcción se muestra en las siguientes figuras [(1)]





Sean $P_a(0 : v : w), P_b(u : 0 : w)$ y $P_c(u : v : 0)$ los pies de la cevianas de P.
La paralela, $wx + wy - vz = 0$, por P_a a AB corta a CA en $P'_a(v : 0 : w) = (1/w : 0 : 1/v)$.
La paralela, $-wx + uy + uz = 0$, por P_b a BC corta a AB en $P'_b(u : w : 0) = (1/w : 1/u : 0)$.
La paralela, $vx - uy + vz = 0$, por P_c a CA corta a BC en $P'_c(0 : v : u) = (0 : 1/u : 1/v)$.
Por tanto, los puntos P'_a, P'_b, P'_c son los pies de las cevianas de $P_1\left(\frac{1}{v} : \frac{1}{w} : \frac{1}{u}\right)$.

Similarmente, trazando paralelas por P_a, P_b y P_c a los lados CA, AB y BC, respectivamente, se obtienen los tres puntos $P''_a(1/v : 1/w : 0), P''_b(0 : 1/w : 1/u)$ y $P''_c(1/v : 0 : 1/u)$, que son los pies de las cevianas de $P_2\left(\frac{1}{w} : \frac{1}{u} : \frac{1}{v}\right)$.

Ejemplos:

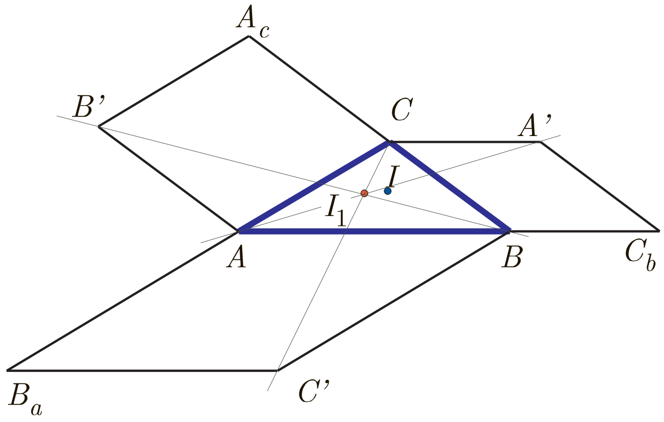
I) Los puntos de Brocard $\Omega_1(1/b^2 : 1/c^2 : 1/a^2)$ y $\Omega_2(1/c^2 : 1/a^2 : 1/b^2)$ son los brocardianos del simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$.

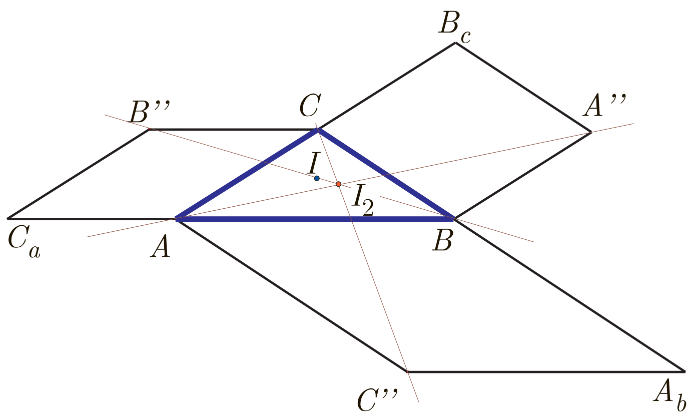
II) Los puntos de Jerabek son los brocardianos del incentro:

[(1)] Yiu, Paul.- Introduction to Geometry of the Triangle. pag. 103
Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps

Si construimos rombos exteriormente sobre los lados de $\widehat{ABC}$, como aparecen en las figuras siguientes.

Sobre el lado BC construimos el rombo tal que uno de los lados esté en la prolongación de AB. Para construir los rombos sobre los otros lados, procedemos cíclicamente.





Si A', B' y C' son los vértices opuestos, en estos rombos, a los vértices B, C y A, respectivamente. Entonces, las rectas AA', BB', CC' son concurrentes en el punto $I_1 = (1/b : 1/c : 1/a)$.

Ahora, sobre el lado BC, construimos el rombo tal que uno de los lados esté en la prolongación de AC, y completamos la construcción de los otros rombos cíclicamente.

Si A'', B'' y C'' son los vértices opuestos, en estos rombos, a los vértices C, A y B, respectivamente. Entonces, las rectas AA'', BB'', CC'' son concurrentes en el punto $I_2 = (1/c : 1/a : 1/b)$.

Los puntos I_1 e I_2 se llaman puntos de Jerabek [(2)] y son los puntos brocardianos del incentro $I = (a : b : c)$.

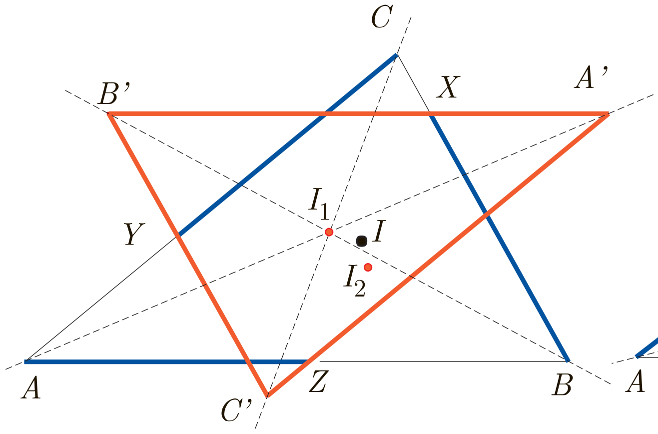
Para la comprobación de estos hechos, debemos tener en cuenta que, por ejemplo, para el segundo caso, $C_a(b + c : -b : 0)$, $A_b(0 : a + c : -c)$, $B_c(-a : 0 : a + b)$; el punto medio de C_aC es $(b + c : -b : c)$ y el simétrico, respecto a éste, de A es $B''(b : -b : c)$. Análogamente, se obtienen $C''(a : c : -c)$ y $A''(-a : b : a)$. Es inmediato ahora comprobar que las rectas AA'', BB'' y CC'' concurren en $I_2(ab : bc : ac)$.

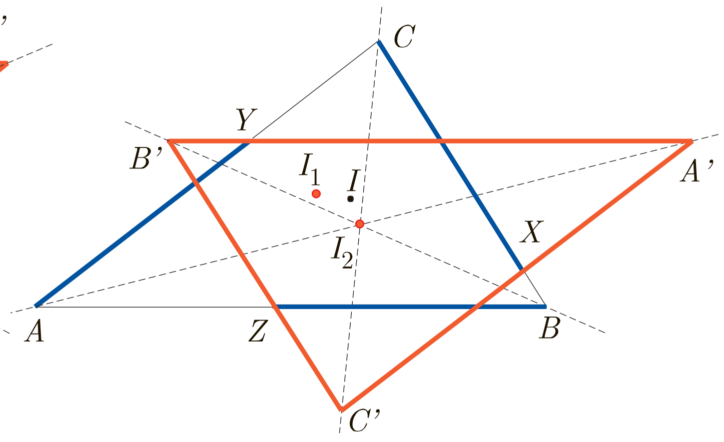
De forma similar, para el primer caso, se llega a que las rectas AA', BB' y CC' concurren en $I_1(ac : ab : bc)$.

Otra interpretación geométrica de los puntos de Jerabek:

Si en cada lado de un triángulo tomamos segmentos iguales y con la misma orientación, las paralelas a los lados por el extremo de estos segmentos determinan un triángulo homotético a $\widehat{ABC}$. El centro de homotecia es uno de los dos puntos de Jerabek del triángulo. El otro se obtiene cambiando la orientación.

[(2)] Los puntos de Jerabek también aparecen en la cúbica K324 de http://pagesperso-orange.fr/bernard.gibert/Exemples/k324.html





Para el primer caso, que se muestra en la primera figura anterior, tenemos que:

$$X(0 : a - t : t), \qquad Y(t : 0 : b - t), \qquad Z(c - t : t : 0).$$

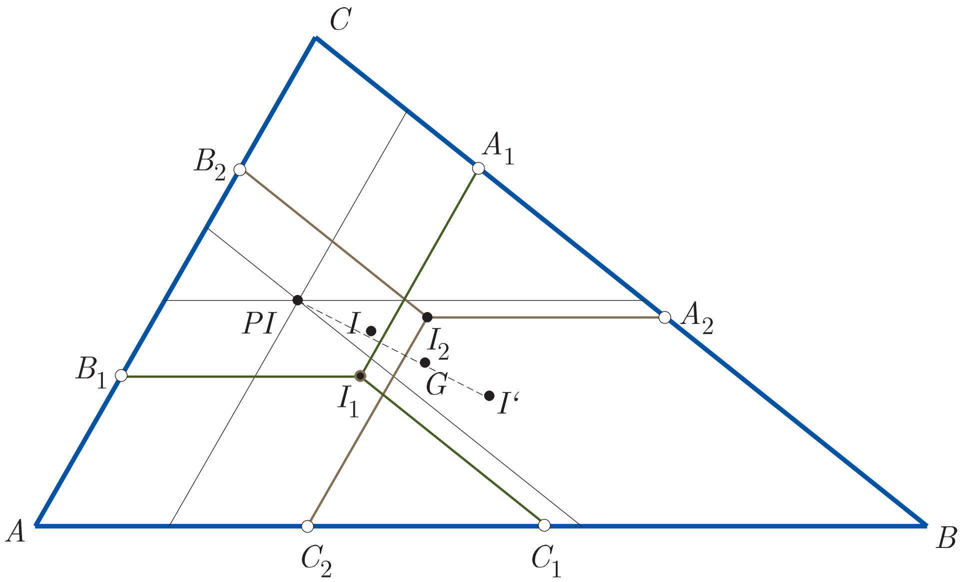
Y las paralelas a AB por X, a BC por Y y a CA por Z son, respectivamente:

$$-tx - ty + (a - t)z = 0, \qquad (b - t)x - ty - tz = 0, \qquad -tx + (c - t)y - tz = 0.$$

Estas rectas se cortan, dos a dos, en los puntos:

$$A'(ct + a(-c + t) : -at : -ct), \quad B'(-at : bt + a(-b + t) : -bt), \quad C'(-ct : -bt : ct + b(-c + t)).$$

Y los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ y $\widehat{ABC}$ son perspectivos con los lados correspondientes paralelos, es decir, son homotéticos, y su centro de homotecia es el centro de perspectividad en $I_1(ac : ab : bc)$, primer brocardiano del incentro I.



Las paralelas a través de I_1 a AB, BC y CA cortan a CA, AB y BC en los puntos B_1, C_1 y A_1, respectivamente; entonces, como $I_1(ca : ab : bc)$ se tiene

$$I_1A_1 = b\frac{ca}{bc + ca + ab}, \quad I_1B_1 = c\frac{ab}{bc + ca + ab}, \quad I_1C_1 = a\frac{bc}{bc + ca + ab}.$$

Análogamente, si las paralelas por $I_2(ab : bc : ca)$ a los lados AB, BC y AC cortan a BC, CA y AB en los puntos A_2, B_2 y C_2, respectivamente, también se tiene la igualdad de las siguientes magnitudes:

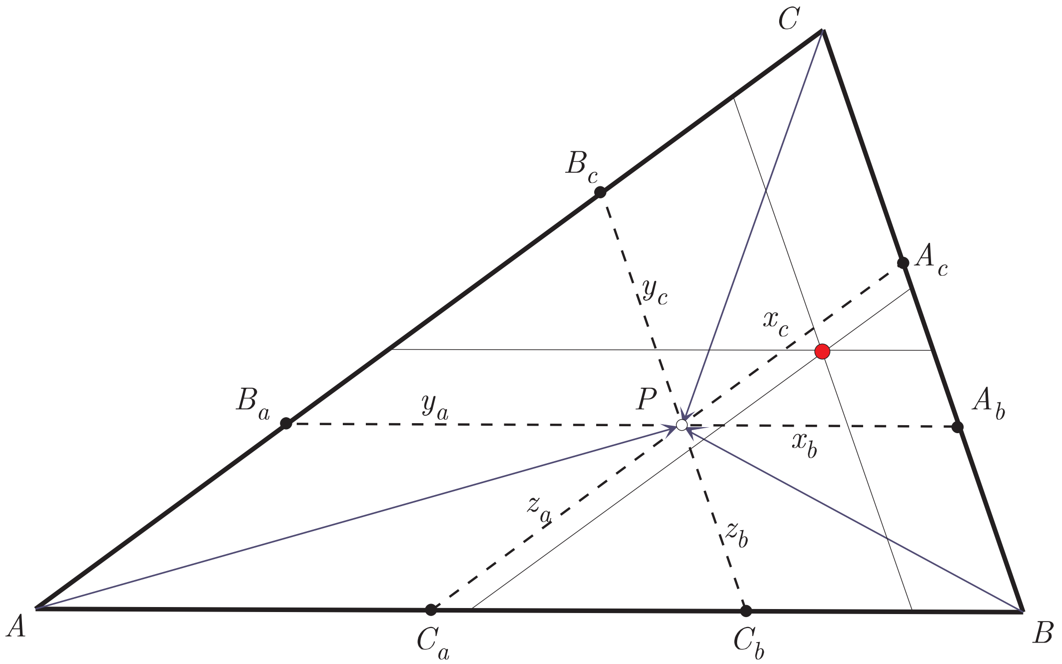
$$I_2A_2 = c\frac{ab}{bc + ca + ab}, \quad I_2B_2 = a\frac{bc}{bc + ca + ab}, \quad I_2C_2 = b\frac{ca}{bc + ca + ab}.$$

Estas seis magnitudes son iguales y coinciden con la mitad de de la longitud de los segmentos que las paralelas a los lados por el punto de paralelas iguales, comprendidos entre los lados del triángulo de referencia.

Vamos a determinar el punto de paralelas iguales; es decir, el punto P para el cual las tres paralelas, trazadas por él a los lados del triángulo de referencias, determinan sobre los lados, segmentos de igual longitud.

Sean (x, y, z) las coordenadas baricénticas absolutas de un punto P; esto quiere decir que

$$\overrightarrow{AP} = y\,\overrightarrow{AB} + z\,\overrightarrow{AC}, \qquad \overrightarrow{BP} = z\,\overrightarrow{BC} + x\,\overrightarrow{BA}, \qquad \overrightarrow{CP} = x\,\overrightarrow{CA} + y\,\overrightarrow{CB}\,.$$



Con lo que

$$\begin{array}{lll} \overline{PB_a} = y_a = cy, & \overline{PA_b} = x_b = cx, & \overline{B_aA_b} = y_a + x_b = c(y+x) = c(1-z), \\ \overline{PC_b} = z_b = az, & \overline{PB_c} = y_c = ay, & \overline{C_bB_c} = z_b + y_c = a(z+y) = a(1-x), \\ \overline{PA_c} = x_c = bx, & \overline{PC_a} = z_a = bz, & \overline{A_cC_a} = x_c + z_a = b(x+z) = b(1-y). \end{array}$$

Para que las longitudes de estos segmentos sean iguales se ha de satisfacer:

$$a(1-x) = b(1-y) = c(1-z), \qquad x+y+z = 1.$$

Resolviendo este sistema se llega a que las coordenadas baricéntricas absolutas y homogéneas de P son, respectivamente [(1)]

$$P\left(\frac{-bc+ca+ab}{bc+ca+ab}, \frac{bc-ca+ab}{bc+ca+ab}, \frac{bc+ca-ab}{bc+ca+ab}\right), \quad P\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} : \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c} : \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right).$$

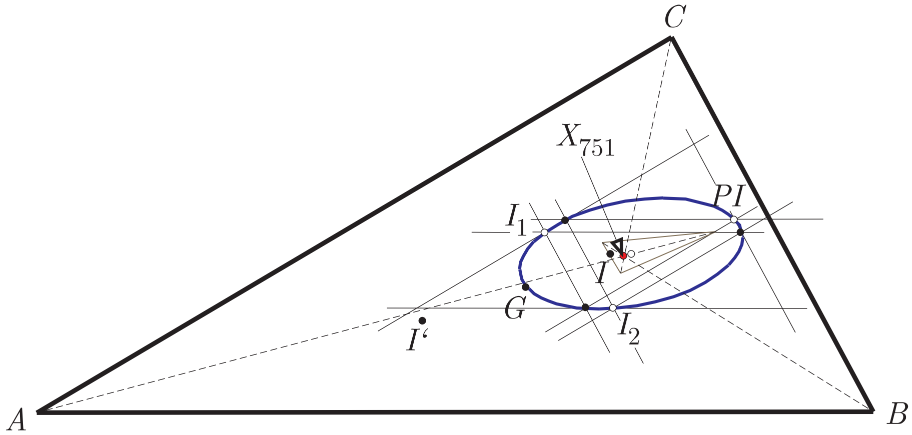
Las longitudes de estos segmentos de paralelas es

$$\frac{2abc}{bc+ca+ab} = 2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Por los seis puntos de triple intersección de las seis paralelas a los lados por los brocadianos del incentro y por el punto de paralelas iguales pasa una cónica de ecuación (tres de estos puntos son los brocardianos del incentro y el punto de paralelas iguales)

(1) El punto de paralelas iguales figura en ETC como el X_{192}.

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-\frac{yz}{a}-\frac{zx}{b}-\frac{xy}{c}=0.$$



Esta elipse pasa por el baricentro. Su centro el simétrico del conjugado isotómico del incentro, respecto al baricentro (punto medio de éste y el punto de paralelas iguales):

$$(2ab-bc+2ca:2bc-ca+2ab:2ca-ab+2bc).$$

Las polares de los vértices de $\widehat{ABC}$ forman un triángulo perspectivo con él (triángulo polar), su centro de perspectividad (perspector de la cónica) es el punto X_{751} de ETC

$$\left(\frac{a}{a^2+2bc}:\frac{b}{b^2+2ca}:\frac{c}{c^2+2ab}\right).$$

III) Cuando el punto recorre una recta $px+qy+rz=0$, cada uno de sus brocardianos describen una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$

$$\mathcal{C}_1:\ qyz+rzx+pxy=0,\qquad \mathcal{C}_2:\ ryz+pzx+qxy=0.$$

El cuarto punto común a estas dos cónicas es

$$\big((q^2-pr)(r^2-pq):(r^2-qp)(p^2-qr):(p^2-rq)(q^2-rp)\big).$$

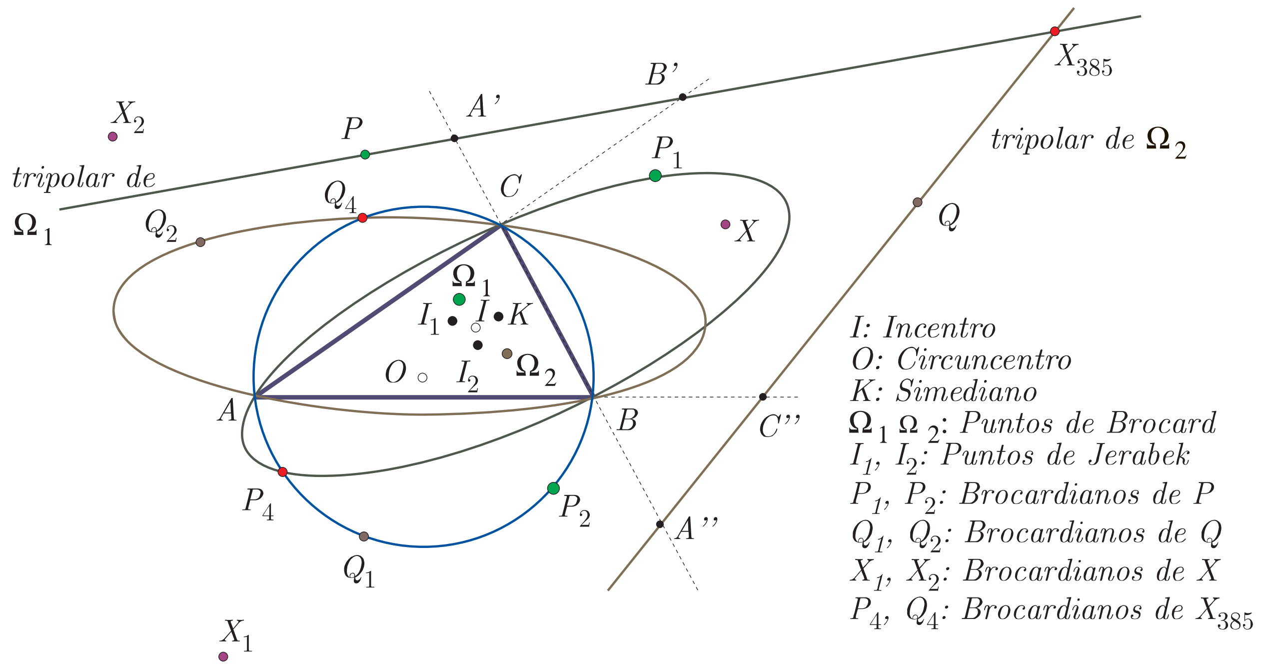
Casos particulares:

Si la recta es $b^2x+c^2y+a^2z=0$ (tripolar del primer punto de Brocard), la cónica $\mathcal{C}_2$ es la circunferencia circunscrita y el cuarto punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es

$$P_4\big((a^4-b^2c^2)(c^4-a^2b^2):(b^4-c^2a^2)(a^4-b^2c^2):(c^4-a^2b^2)(b^4-c^2a^2)\big).$$

Si la recta es $c^2x+a^2y+b^2z=0$ (tripolar del segundo punto de Brocard), la cónica $\mathcal{C}_1$ es la circunferencia circunscrita y el cuarto punto de intersección de $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ es

$$Q_4\big((b^4-a^2c^2)(a^4-b^2c^2):(c^4-b^2a^2)(b^4-c^2a^2):(a^4-c^2b^2)(c^4-a^2b^2)\big).$$



Estos dos puntos son los brocardianos del punto X_{385} de ETC:

$$\left(a^4 - b^2c^2 : b^4 - c^2a^2 : c^4 - a^2b^2\right).$$

Este punto es el de intersección de las tripolares citadas y es, también, el de intersección de la recta GK, $(b^2-c^2)x+(c^2-a^2)y+(a^2-b^2)z = 0$, con la polar, $(b^2+c^2)x+(c^2+a^2)y+(a^2+b^2)z = 0$, de $K(a^2 : b^2 : c^2)$, respecto a la elipse circunscrita de Steiner, $yz + zx + xy = 0$.

A la mediana por A le corresponde las cónicas degeneradas formadas una por la mediana a través de B y el lado AC y, la otra, por la mediana por C y el lado AB. De hecho, a cualquier recta que pase por le baricentro le corresponde dos cónicas circunscritas que pasan por el baricentro.

Si P recorre la bisectriz, $-cy + bz = 0$, P_1 se mueve en la recta $bx - cy = 0$ y P_2 en la recta $cx - bz = 0$. Haciendo lo mismo con las otras bisectrices, tenemos que los tres cuartos puntos son

$$P_a(bc : b^2 : c^2), \qquad P_b(a^2 : ca : c^2), \qquad P_c(a^2 : b^2 : ab),$$

y las rectas AP_a, BP_b y CP_c se cortan en el simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$.

En general, cuando se toman las tres cevianas de un punto $P(u : v : w)$, el centro de perspectividad es el cuadrado baricéntrico $(u^2 : v^2 : w^2)$.

Cuando se toman como rectas los lados del triángulo ceviano de un punto $P(u : v : w)$ los cuartos puntos de intersección de las respectivas cónicas circunscritas son

$$P_a\left(-u(v^2 + uw)(w^2 + uv) : v(u^2 - vw)(w^2 + uv) : w(v^2 + uw)(u^2 - vw)\right),$$

$$P_b\left(u(w^2 + vu)(v^2 - wu) : -v(w^2 + vu)(u^2 + vw) : w(v^2 - wu)(u^2 + vw)\right),$$

$$P_c\left(u(w^2 - uv)(v^2 + wu) : v(u^2 + wv)(w^2 - uv) : -w(u^2 + wv)(v^2 + wu)\right),$$

Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{P_aP_bP_c}$ son perspectivos y su centro de perspectividad es

$$\left(-u\left(vwu^2 + \left(v^3 + w^3\right)u + v^2w^2\right) : \cdots : \cdots\right).$$

En particular, cuando se toma el triángulo medial (ceviano del baricentro $G(1 : 1 : 1)$) este punto es el propio G. Para el triángulo ceviano del incentro $I(a : b : c)$, es el punto X_{256} de ETC,

$$\left(-a\left(bca^2 + \left(b^3 + c^3\right)a + b^2c^2\right) : \cdots : \cdots\right).$$

Cuando se toma el triángulo ceviano del simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$, el punto es el X_{695} de ETC,

$$\Big(-a^2\left(b^2c^2a^4+\left(b^6+c^6\right)a^2+b^4c^4\right):\cdots:\cdots\Big).$$

Otras situaciones son:

Cuando se toman las mediatrices, se obtiene como centro de perspectividad el punto X_{69}, $(S_A : S_B : S_C)$, isotómico conjugado del ortocentro.

Cuando un punto P recorre una cónica circunscrita $pyz+qzx+rxy=0$, sus brocardianos recorren las rectas

$$\ell_1:\ qx+ry+pz=0, \qquad \ell_2:\ rx+py+qz=0.$$

Si la cónica circunscrita es la elipse de Steiner, estas rectas coinciden con la del infinito.

Las rectas ℓ_1 y ℓ_2 se cortan en el punto $\big(p^2-qr : q^2-rp : r^2-pq\big)$. Este punto, para la circunferencia circunscrita, es $(a^4-b^2c^2 : b^4-c^2a^2 : c^4-a^2b^2)$, X_{385} de ETC. En este caso, las cónicas circunscritas conjugadas isogonales de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, tienen de perspectores los puntos de Brocard y se cortan (además de los vértices A, B y C) en el punto X_{694}:

$$\left(\frac{a^2}{a^4-b^2c^2} : \frac{b^2}{b^4-c^2a^2} : \frac{c^2}{c^4-a^2b^2}\right).$$