

Homografía en el plano proyectivo con CABRI II Plus

Angel Montesdeoca

Comentamos una interpretación con CABRI del siguiente ejercicio:

Determinar las ecuaciones de la homografía en el plano proyectivo que transforma los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(0, 1, 0)$, $C(1, 0, 0)$, $D(1, 1, 1)$ en los puntos B, C, D, A , respectivamente. Hallar los elementos dobles de la misma.

De la ecuación general de una homografía:

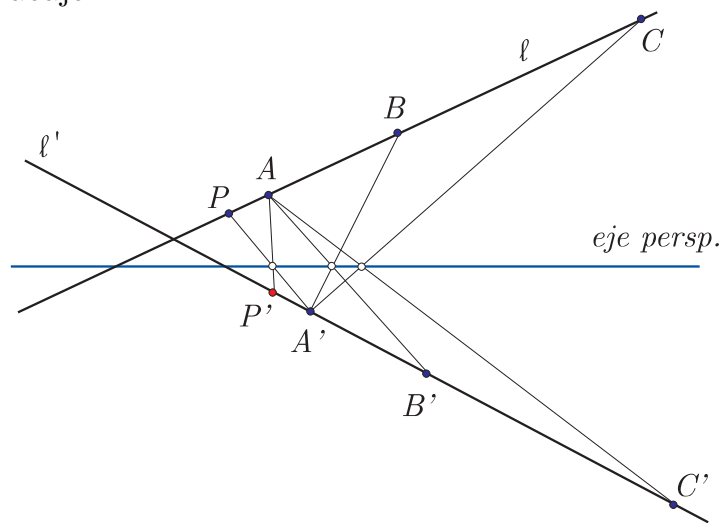
$$\rho \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

imponiendo que $A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto D$ y $D \mapsto A$, resulta la ecuación:

$$\rho \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad x' = z, \quad y' = -x + z, \quad z' = -y + z.$$

Tiene un único punto doble $E = AC \cap BD$, $(1, 0, 1)$, y una única recta doble $FG : x - y + z = 0$; siendo $F(1, 1, 0)$ y $G(0, 1, 1)$ los otros puntos diagonales del cuadrivértice $ABCD$.

Vamos a mostrar con CABRI, la imagen X' , mediante esta homografía, de un punto X arbitrario, así como dar sus coordenadas numéricas respecto a la referencia $\{A, B, C; D\}$. Para ello, utilizaremos tres macros (proyectividad_puntos.mac, homografia.mac, coordenadas_homogeneas.mac) que describiremos más abajo.



Recordemos primero que para determinar el homólogo de un punto P mediante una proyectividad definida entre dos rectas, ℓ y ℓ' , por tres pares de puntos homólogos (A, A') , (B, B') y (C, C') , trazamos su eje de perspectividad, que pasa por los puntos $AB' \cap A'B$ y $AC' \cap A'C$. El

homólogo P' de P se obtiene cortando ℓ' con la recta que une A con el punto de intersección del eje de perspectividad con la recta $A'P$.

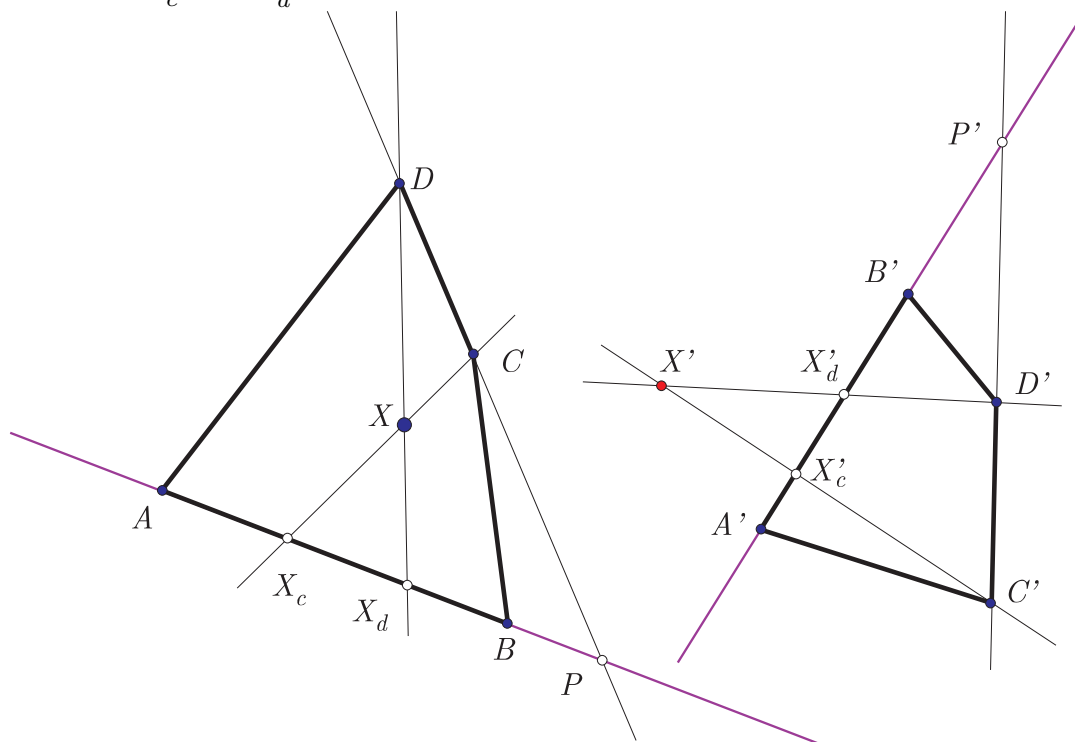
(<http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/gdh.pdf#h-constr-proy>)

El macro `proyectividad_puntos.mac(1)` nos facilita esta construcción. Si las dos rectas coinciden o alguno de los puntos están superpuestos, deberemos proyectar los puntos de una de las rectas sobre una tercera.

Ahora vamos a describir una posible vía de cómo se determina gráficamente el homólogo X' de un punto X de una homología en el plano, determinada por cuatro pares de puntos correspondientes, (A, A') , (B, B') , (C, C') y (D, D') .

Sea $P = AB \cap DC$, su homólogo es $P' = A'B' \cap D'C'$; por lo que tenemos la proyectividad, que la homografía induce entre AB y $A'B'$, determinada por los tres pares de puntos homólogos: (A, A') , (B, B') y (P, P') . Sea $X_c = AB \cap CX$ y X'_c su homólogo. El homólogo X' de X ha de estar en la recta CX'_c .

Tomemos ahora $X_d = AB \cap DX$ y determinemos su homólogo X'_d sobre $A'B'$. Con lo que obtenemos $X' = C'X'_c \cap D'X'_d$.

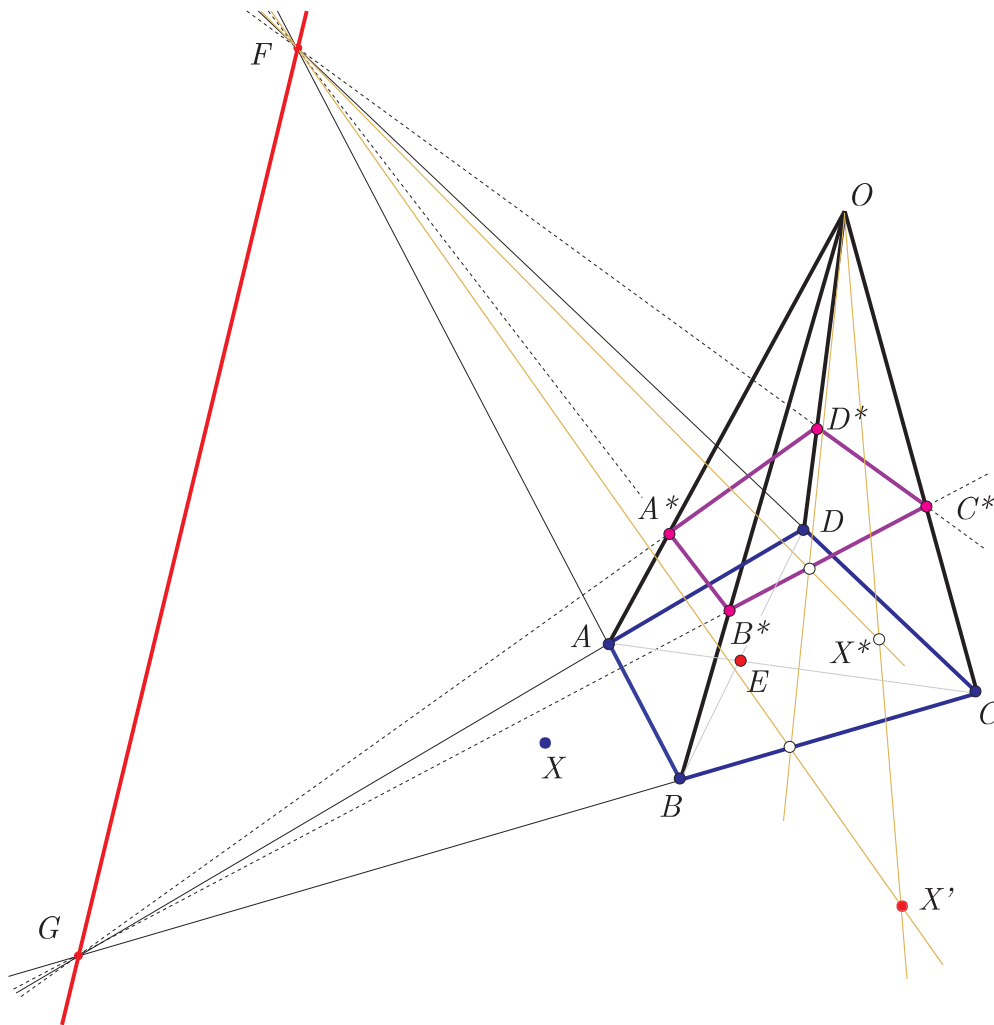


(Applet CabriJava)

El macro `homografia.mac(2)`, nos proporciona esta construcción. Pero, cuando alguno de los pares de puntos que determinan la homografía coinciden, deberemos acometer una construcción previa, que pasamos a comentar.

Como en el ejercicio propuesto, el conjunto de puntos imágenes dados es una permutación de los de partida, para usar el macro no los podemos tomar dos veces. Para solucionar esto, podemos utilizar el siguiente procedimiento:

Simulamos una proyección en el espacio desde un punto O (en particular, puede tomarse $O = E = AC \cap BD$), del plano que contiene a A, B, C y D en otro plano. Para ello, consideramos los puntos $F = AB \cap CD$ y $G = BC \cap DA$, y desde éstos proyectamos un punto A^* , tomado en la recta OA ; obtenemos así, los puntos $B^* = FA^* \cap OB$ y $D^* = GA^* \cap OD$, Si proyectamos B^* desde G o bien D^* desde F , se obtiene el mismo punto C^* sobre OC .



(Applet CabriJava)

Ahora, ya estamos en condiciones de aplicar el macro `homografia.mac`, para construir el homólogo X^* de X en la homografía determinada por los pares de puntos correspondientes (A, A^*) , (B, B^*) , (C, C^*) y (D, D^*) . Encontrado X^* , sólo nos queda localizar X' , sobre OX^* , mediante el proceso inverso al de la construcción de los puntos A^* , B^* , C^* y D^* , a partir de A, B, C y D . Para ello, proyectamos (por ejemplo) X^* desde F sobre B^*C^* y, luego, proyectamos este último punto obtenido desde O sobre BC ; proyectando este punto desde F sobre OX^* , obtenemos el punto X' , homólogo de X .

(Fichero Cabri II Plus: <http://webpages.ull.es/users/amontes/cabri/cabrih03plus.fig>)

Terminamos, comentado el macro `coordenadas_homogeneas.mac`, que permite **determinar** las coordenadas homogéneas de cualquier punto del plano respecto a la referencia $\{A, B, C; D\}$, con D punto unidad.

Dado un punto P , sean $D_b = AC \cap BD$, $D_c = AB \cap CD$, $P_b = AC \cap CP$ y $P_c = AB \cap BP$, entonces se verifica que los valores de las razones dobles $(ABP_cD_c) = y$, $(ACP_bD_b) = z$, dan las coordenadas homogéneas $(1, y, z)$ de P respecto a $\{A, B, C; D\}$.

La obtención gráfica de los valores de la razón doble de los cuatro puntos A, B, P_c, D_c , se puede hacer de la siguiente manera:

Se toma un punto D sobre una recta d que pase por A (se puede tomar d como el lado AC y D como C) y se determinan los puntos de intersección E y F de la recta CP_c y CD_c con la recta paralela a d por B . Entonces la razón doble (ABP_cD_c) es la abscisa del punto F en la referencia

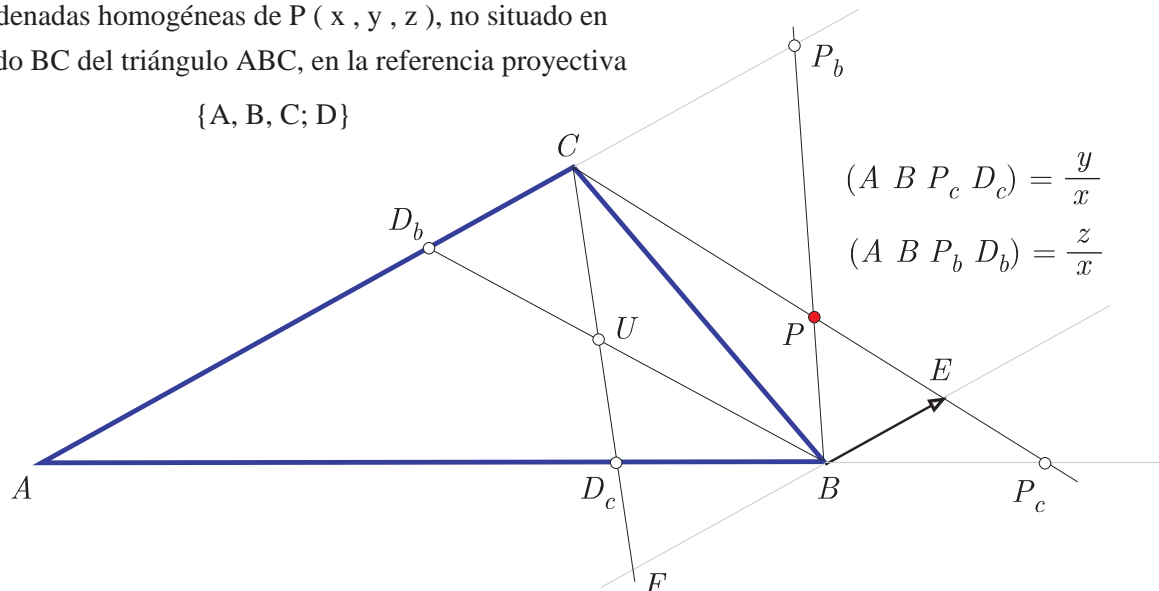
afín $\{B; \overrightarrow{BE}\}$. Ya que:

$$(A B P_c D_c) = \frac{AP_c}{BP_c} : \frac{BP_c}{BD_c} = \frac{AC}{BE} : \frac{AC}{BF} = \frac{BF}{BE}.$$

(Applet CabriJava)

Coordenadas homogéneas de $P(x, y, z)$, no situado en el lado BC del triángulo ABC, en la referencia proyectiva

$\{A, B, C; D\}$



$$(A B P_c D_c) = \frac{y}{x}$$

$$(A B P_b D_b) = \frac{z}{x}$$

Inversamente, si lo que queremos es ubicar un punto en plano del que se conocen sus coordenadas homogéneas, $P(x, y, z)$, respecto a una referencia proyectiva $\{A, B, C; D\}$, debemos obtener los pies P_b y P_c de sus cevianas desde B y C , respectivamente. Así, por ejemplo, como se ha de verificar $(A B P_c D_c) = y/x$, para determinar P_c , procedemos de la forma siguiente:

Tomamos sobre una recta d por A un punto D (tomamos $d = AC$ y $D = C$); sean el punto de intersección E de la recta CD_c con la recta que pasa por B y paralela a d , y el punto F de abscisa y/x en la referencia afín $\{B; \overrightarrow{BE}\}$. Entonces P_c es el punto de intersección de AB con DF .

Transcripción del código de los macros usados:

1. MACRO proyectividad_puntos.mac

```
MACRO CabriIII vers. MS-Windows 1.0
proyectividad puntos, no name
Icon:
000000000000000000
000000000000000000
00004444444440000
0004444444444000
00044400000044000
0004F400000044000
00044400000044000
00044400000044000
0004444444444F4000
00044444444440000
00044400000000000
00044400000000000
```

```

000444000000000000
0004F4000000000000
000000000000000000
000000000000000000
Help:
"Dados tres puntos A, B y C en una recta r, y otros tres A', B' y C'
en otra recta r', determina el homologo de X de r,
mediante la proyectividad A-->A', B--> B' y C-->C'"
Mth: 0
CN:9, ON:11, FN:1, PO:10
CT:
line, CS 0, V, W, t, DS:1 1, GT:0, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
line, CS 0, V, W, t, DS:1 1, GT:0, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const:
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 7
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 6 3
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 8
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 6 4
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 10 11
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 12 13
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 14 15
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 9 6
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 16 17
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 18 2
Int, Mth:0, 1, 0, CN:2, VN:1, Const: 19 5, R, W, t, DS:1 1, GT:2, V, nSt

```

2. MACRO homografia.mac

```

MACRO CabriII vers. MS-Windows 1.0
Homografia, no name
Icon:
000000000000000000
000000000000000000
00066600000006600
00066600000006600
00066600000006600
00066600000006600
00066600000006600
00066666666666600
00066666666666600
00066600000006600

```

0006660000006600
 0006660000006600
 0004660000006600
 0006660000006600
 0000000000000000
 0000000000000000

Help:

"Dados A,A',B,B', C,C' D,D' y X, determina el homologo X'."

Mth: 0

CN:9, ON:35, FN:1, PO:34

CT:

point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
 point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt

Const:

Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 3
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 4
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 7 9
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 10 12
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 7 5
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 10 14
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 8 6
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 11 16
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 4
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 3
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 17
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 15
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 18 19
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 20 21
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 22 23
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 13 2
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 24 25
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 26 1
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 27 11
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 8 28
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 9 5
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 10 30
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 4
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 3
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 17
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 15
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 32 33
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 34 35
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 36 37
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 31 2

```

Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 38 39
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 40 1
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 41 11
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 42 6
Int, Mth:0, 1, 0, CN:2, VN:1, Const: 29 43, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt

```

3. MACRO coordenadas_homogeneas.mac

```

Macro CabriIII vers. DOS 1.0
Coordenadas homogeneas, no name
Icon:
000000000000000000
000000000000000000
00FF00000000FF00
00FFF0000000FFF00
00FFFF0000FFFF00
00FF0FF00FF0FF00
00FF00FFF00FF00
00FF000FF000FF00
00FF00000000FF00
00FF00000000FF00
00FF00000000FF00
00FF00000000FF00
00FF00000000FF00
0000000000000000
0000000000000000
0000000000000000
Help:
"Dada la referencia proyectiva (A,B,C;U) y un punto P, no situado en las rectas AB,
Mth: 0
CN:5, ON:40, FN:2, PO:38
CT:
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
point, CS 0, R, W, t, DS:1 1, GT:1, V, nSt
Const:
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 3
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 1
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 4 3
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 4 2
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 5
Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 5 3
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 6 10
Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 7 11

```

Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 7 8
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 9 6
 Mid, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 1 2
 Mid, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 16 13
 Cir, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 17
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 7
 Int, Mth:1, 0, 256, CN:2, VN:1, Const: 19 18
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 20 13
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 20 14
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 7
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 22 23
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 21 23
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 23
 Cir, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 2 25
 Int, Mth:1, 0, 256, CN:2, VN:1, Const: 26 27
 Axes, Mth:1, 0, 0, CN:3, VN:3, Const: 2 25 28
 Mid, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 1 3
 Mid, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 30 12
 Cir, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 31
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 1 6
 Int, Mth:1, 0, 256, CN:2, VN:1, Const: 33 32
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 34 12
 Line, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 34 15
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 3 6
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 36 37
 Int, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:1, Const: 35 37
 Perp, Mth:0, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 3 37
 Cir, Mth:1, 0, 0, CN:2, VN:2, Const: 3 39
 Int, Mth:1, 0, 256, CN:2, VN:1, Const: 40 41
 Axes, Mth:1, 0, 0, CN:3, VN:3, Const: 3 39 42
 Eq/Co, Mth:0, 1, 0, CN:2, VN:3, Const: 24 29, B, W, NbD:2, FD, WU, GT:0, V, nSt
 Eq/Co, Mth:0, 1, 0, CN:2, VN:3, Const: 38 43, B, W, NbD:2, FD, WU, GT:0, V, nSt