Contacto de curvas

Angel Montesdeoca

Lunes, 10 de Diciembre del 2012

1 Consideremos, en el plano, la circunferencia Γ con centro en $(0,2)$ y que pasa por el origen de coordenadas. Una recta variable que pasa por el origen corta a la circunferencia Γ además en otro punto L y a la recta paralela al eje OX, que pasa por $(0,4)$, en M. Sea $\mathcal{C}$ la curva cuyos puntos P tienen la misma abscisa (coordenada "x") que M y la misma ordenada (coordenada "y") que L.

Encontrar una parametrización de la curva $\mathcal{C}$, conocida como la "Cúbica de Agnesi". (Ver también)

Ulilizar la parametrización $\vec{\beta}(t) = (2\operatorname{sen} 2t, 2\operatorname{sen} 2t \operatorname{tag} t)$ de la circunferencia Γ, (Ver también) para obtener la siguiente parametrización de la curva $\mathcal{C}$:

$$\vec{\alpha}(t) = (4\operatorname{cotg} t, 4\operatorname{sen}^2 t).$$

Comprobar que la circunferencia osculatriz de $\mathcal{C}$ en $(0,4)$ es la circunferencia Γ. Determinar el orden de contacto entre ambas curvas.

2 Encontrar la curvatura y centro de curvatura de la cónica $x^2-2xy+y^2-x+3y-4=0$ en el punto $(0,1)$. / Applet CabriJava

SOLUCIÓN:

Damos tres formas de resolver el problema: la primera, utilizando una haz de cónicas osculatrices; la segunda, mediante la fórmula que da la curvatura de una curva plana; y la tercera, mediante una construcción geométrica, usando una homologia que transforma la cónica en una circunferencia.

- Se trata de calcular la circunferencia con máximo contacto con la cónica en $(0,1)$.

La tangente en el punto dado $(0,1)$ es $3x-5y+5=0$ y una recta arbitraria por $(0,1)$, tiene por ecuación $mx-y+1=0$.

El haz de cónicas teniendo tres puntos de contacto con la cónica dada en $(0,1)$ está dado por (cónicas osculatrices)

$$u(x^2-2xy+y^2-x+3y-4)+v(3x-5y+5)(mx-y+1)=0,$$

o bien

$$(u+3w)x^2-(2u+3v+5w)xy+(u+5v)y^2+(-u+3v+5w)x+(3u-10v)y-4u+5v=0,$$

donde $w=mv$. Ésta representa una circunferencia si

$$u+3w=u+5v, \qquad 2u+3v+5w=0.$$

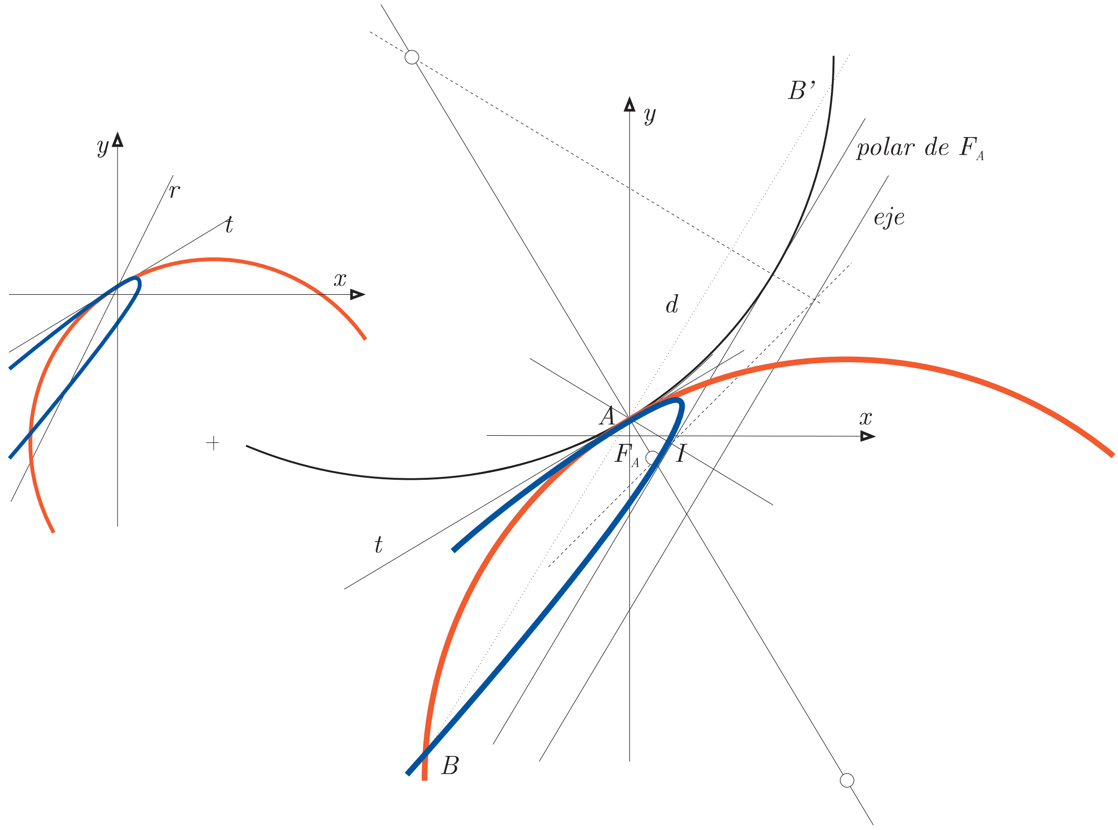
Entonces

$$v=\frac{-3u}{17}, \qquad w=\frac{-5u}{17}, \qquad m=\frac{5}{3}.$$

La ecuación de la circunferencia de curvatura es, poniendo $u=17$,

$$2x^2+2y^2-51x+81y-83=0.$$

El centro de curvatura es $(a,b)=(51/4,-81/4)\simeq(12.75,-20.25)$ y el radio de curvatura $r=\sqrt{c-a^2+b^2}=\sqrt{83/2+(51/4)^2+(-81/4)^2}=17\sqrt{17}/2\sqrt{2}\simeq 24.78$.



La gráfica de la izquierda está extraida del Mathematica:

```
f[u_,v_,m_][x_,y_]:=u(x^2-2x*y+y^2-x+3y-4)+v(3x-5y+5)(m*x-y+1)

 ImplicitPlot[{f[1,0,m][x,y]==0,
              f[0,1,2][x,y]==0,
              f[17,-3,5/3][x,y]==0},{x,-15,30}]
```

• Otra forma de resolver este ejercicio es utilizando la fórmula de la curvatura para curvas planas

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

derivando implícitamente, respecto de x, en la ecuación de la cónica.

$2x - 2y - 2xy' + 2yy' - 1 + 3y' = 0$, en $(0,1)$: $-3 + 5y' = 0$, $y' = 3/5$.

$2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' + 3y'' = 0$, para $x = 0, y = 1$ e $y' = 3/5$: $y'' = -8/125$.

$$\kappa = \left| \frac{-\dfrac{8}{125}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{9}{25}}\right)^3} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{17\sqrt{17}}.$$

El centro (a,b) de la circunferencia osculatriz se obtiene teniendo en cuenta la relación $r^2 = a^2 + (b-1)^2$ y que debe estar en la perpendicular a la tangente de pendiente $y' = 3/5$ en $(0,1)$: $5a + 3b = 3$. Obteniéndose los valores $(-51/4, 89/4)$ ó $(51/4, -81/4)$. El segundo es el que vale, pues está en el semiplano definido por la tangente determinado por el sentido de la derivada segunda $(125, -8)$.

• Construcción gráfica de la circunferencia osculatriz mediante una homología (gráfica de la derecha):

La cónica (parábola) dada queda determinada por los cinco puntos: $(0,1)$ y $(0,-4)$ de intersección con el eje OY, $(2,-1)$ y $(-3,-1)$ de intersección con la recta $y = -1$, y por el punto $(3,1)$, el otro punto de intersección con la recta $y = 1$.

Utilizaremos una propiedad de un punto de Frégier para transformar la cónica en una circunferencia mediante una homología.

El punto F_A de Frégier relativo al punto A de la cónica, es aquel donde se cortan todas las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A. Dos de estas cuerdas lo determinan:

La perpendicular por $(0,1)$ a la cuerda determinada por los puntos $(0,1)$ y $(0,-4)$ es la cuerda que une los puntos $(0,1)$ y $(3,1)$ de la cónica, así una de las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A es la une los puntos $(0,-4)$ y $(3,1)$, que tiene por ecuación

$$-5x+3y+12=0.$$

La perpendicular a la tangente en $(0,1)$ determina otra cuerda que se ve bajo un ángulo recto desde A; su ecuación es

$$5x+3y-3=0.$$

El punto de Frégier relativo a A es el de intersección de estas rectas, o sea, $F_A(3/2,-3/2)$.

Utilizaremos el siguiente resultado:

"Sea A un punto de una cónica. La transformada de esta cónica en una homología de centro A es una circunferencia si y sólo si la recta límite (homotética del eje de homología por una homotecia $h_{A,1/2}$) es la polar del punto de Frégier asociado a A, con respecto a la cónica".

Polar del punto de Frégier $(3/2,-3/2)$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad 5x-3y-14=0.$$

El eje de la homología de centro $A(0,1)$ es la recta homotética de esta polar en la homotecia $h_{A,2}$, de centro A y razón 2.

El homólogo del punto de Frégier F_A es el centro de la circunferencia homóloga de la cónica, pues al conservarse la relación polo y polar mediante una homología, y como la polar de F_A es la recta límite de la homología, que se transforma en la recta del infinito, cuyo polo es el centro de la circunferencia. Éste se determina trazando la recta que une F_A con el punto I de intersección de la recta límite con la perpendicular a ella por A. La recta F_AI corta al eje en un punto; la perpendicular por este punto al eje corta a AF_A en el centro buscado. La tangente a la cónica, por pasar por el centro de la homología A, queda invariante, por tanto, tal circunferencia es tangente a la cónica en A.

Justificaremos ahora que la circunferencia osculatriz en A a la cónica es la simétrica de la circunferencia homóloga respecto a la simétria de centro A:

La recta d paralela al eje de homología por A corta a la cónica en otro punto B. El punto B' homólogo de B es el simétrico de B respecto a A, luego la circunferencia simétrica, respecto a A, de la obtenida, pasa por B. Esta circunferencia es la circunferencia osculatriz en A a la cónica, pues ella pertenece al haz de cónica osculatrices determinado por la cónica dada y por la cónica degenerada en el producto de la tangente t en y la recta d. También, podemos justicar que se trata de la circunferencia osculatriz, observando que los únicos puntos comunes con la cónica son A y B', luego circunferencia y cónica tienen tres puntos comunes confundidos en A.

$\boxdot$

3 Circunferencia osculatriz a la curva $\rho = e^{\theta}$ en $\theta = 0$.

SOLUCIÓN:

Consideremos una circunferencia arbitraria

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

y le imponemos que tenga un contacto de orden dos con la curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, en $t = 0$.

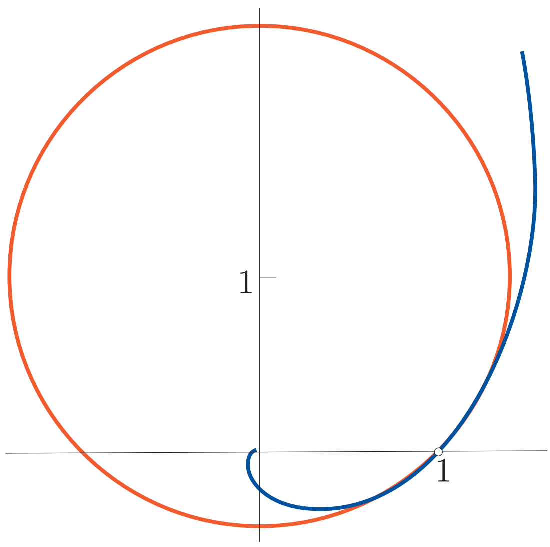
$$f(t) = (e^t \cos t - a)^2 + (e^t \sin t - b)^2 - r^2, \quad f(0) = (1-a)^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

$$f'(t) = 2\,e^t\,\left(e^t - (a+b)\,\cos(t) + (a-b)\,\sin(t)\right), \quad f'(0) = 2(1-a-b) = 0.$$

$$f''(t) = 4\,e^t\,\left(e^t - b\,\cos(t) + a\,\sin(t)\right), \quad f''(0) = 4(1-b) = 0.$$

De donde se obtiene $b = 1$, $a = 0$ y $r = \sqrt{2}$. La circunferencia oscualtriz pedida es:

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 = 2}$$



⊡

4 Una **hélice circular** es una curva cuya curvatura y torsión son constantes y no nulas. Determinar la hélice circular que tiene un **orden de contacto** máximo en $(0,0,0)$ con la cúbica de ecuaciones $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$

SOLUCIÓN:

Resolveremos este ejercicio por dos vías distintas:

Una, integrando el sistema de ecuaciones diferenciales que permite obtener la ecuación de una curva conociendo su curvatura y torsión y, además, unas condiciones iniciales relativas al punto por donde pasa y a los valores de los vectores unitarios tangente, normal y binormal en dicho punto.

Y otra, partiendo del conocimiento de que la ecuación de una hélice circular, situada sobre un cilindro de eje OZ cuyo radio de la sección circular es igual a a, es $x = a\cos u,\ y = a \operatorname{sen} u, z = bu$.

- Empezando por esta segunda vía. La curvatura y torsión de una hélice circular vienen dadas por:

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2} \tag{1}$$

Si se quiere encontrar una hélice circular que tenga al menos un contacto de orden tres con la curva del enunciado $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$ en el $(0,0,0)$, ambas curvas deben tener en este punto las mismas curvatura y torsión; como se deduce inmediatamente del hecho de que, en parametrizaciones naturales, las derivadas hasta el orden tres de ambas curvas deben coincidir en dicho punto. Por tanto, el valor común de la curvatura y torsión en $(0,0,0)$ es:

$$\kappa_0 = \frac{\|\vec{\alpha}_0' \times \vec{\alpha}_0''\|}{\|\vec{\alpha}_0'\|^3} = \|(1,0,0)\times(0,2,0)\| = 2, \qquad \tau_0 = \frac{[\vec{\alpha}_0'\ \vec{\alpha}_0''\ \vec{\alpha}_0''']}{(\vec{\alpha}_0' \times \vec{\alpha}_0'')^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4} = 3.$$

De las ecuaciones (4), podemos obtener los valores de a y b en función de κ y τ.

$$\frac{\kappa}{a} = \frac{\tau}{b} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{\kappa^2}{a^2} = \frac{\tau^2}{b^2} = \frac{\kappa^2+\tau^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{\kappa}{a} = \frac{\tau}{b} = \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{\kappa^2}{a^2(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\tau^2}{\kappa^2+\tau^2} \Rightarrow$$

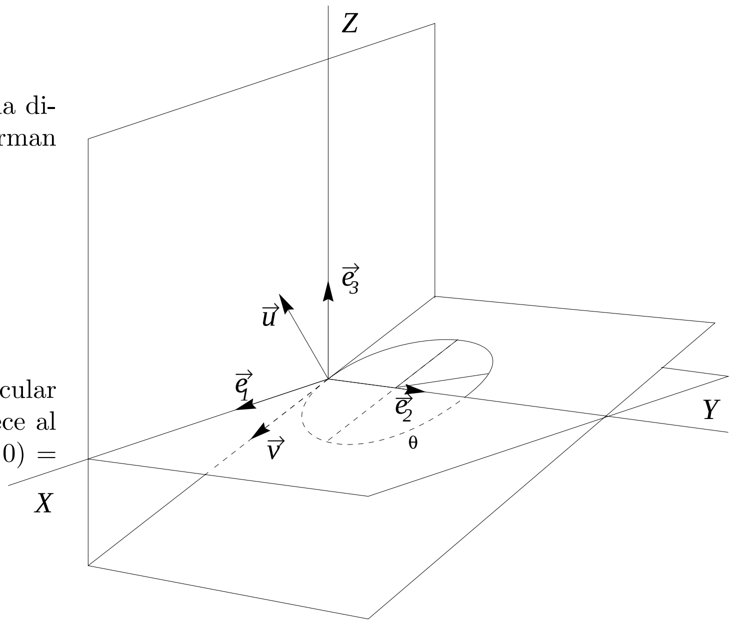
$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{2}{13}, \qquad b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{3}{13}.$$

El vector unitario (eje de la hélice), que da la dirección fija con la que los vectores tangentes forman un ángulo constante, es

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(\tau\vec{t}_0 + \kappa\vec{b}_0) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(\tau\vec{e}_1 + \kappa\vec{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,0,2).$$

La circunferencia de radio a, sección perpendicular al eje del cilindro donde está la hélice, pertenece al plano determinado por los vectores $\vec{e}_2 = (0,1,0) = \vec{n}_0$ y $\vec{v} = \vec{e}_2 \times \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,-3)$.



Por lo que la ecuación de la hélice, tomando en dicho plano y en el centro de la circunferencia la referencia ortonormal $\{\vec{E}_1 = -\vec{e}_2, \vec{E}_2 = \vec{v}, \vec{E}_3 = \vec{u}\}$, será:

$$\vec{\beta}(\theta) = a\vec{e}_2 + a(\cos\theta\vec{E}_1 + \operatorname{sen}\theta\vec{E}_2) + b\vec{E}_3$$

$$\vec{\beta}(\theta) = (0, \frac{2}{13}, 0) + \frac{2}{13}\left(\cos\theta(0,-1,0) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{13}}(2,0,-3)\right) + \frac{3\theta}{13\sqrt{13}}(3,0,2)$$

$$\boxed{\vec{\beta}(\theta) = \left(\frac{4\operatorname{sen}\theta + 9\theta}{13\sqrt{13}}, \frac{-2\cos\theta + 2}{13}, \frac{-6\operatorname{sen}\theta + 6\theta}{13\sqrt{13}}\right)}$$

Realmente, lo que se conoce son las ecuaciones de la hélice respecto a la referencia $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ en el punto $(0, 2/13, 0)$:

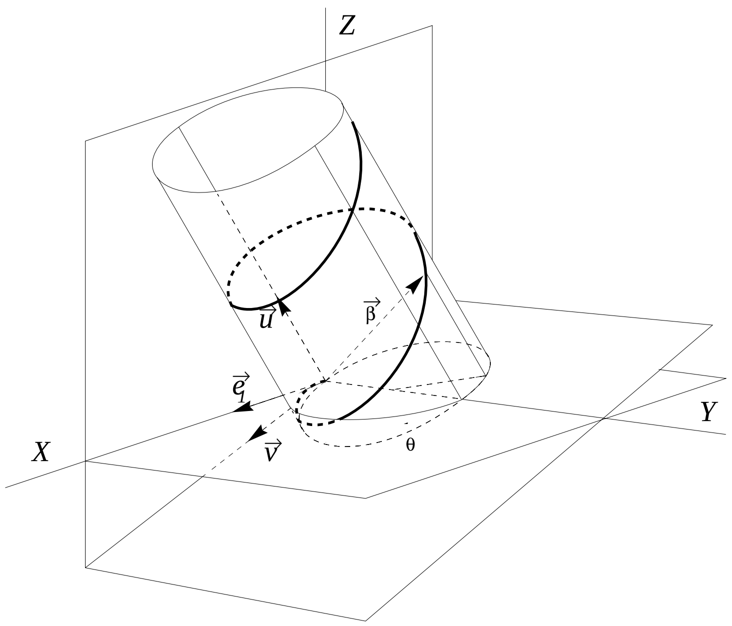
$$x' = \frac{2}{13}\cos\theta, \qquad y' = \frac{2}{13}\operatorname{sen}\theta, \qquad z' = \frac{3}{13}\theta,$$

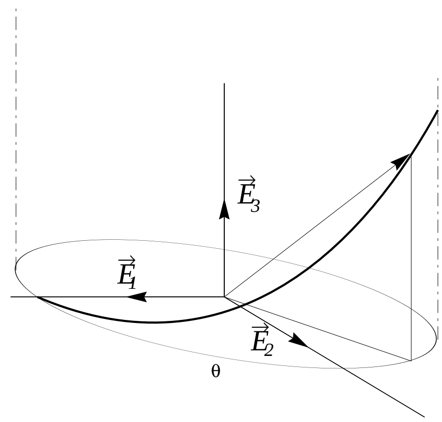
y, mediante la transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/13 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas de dicha hélice respecto a la referencia canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en el $(0,0,0)$, dada arriba:

$$\vec{\beta}(\theta) = \left(\frac{4\operatorname{sen}\theta}{13\sqrt{13}} + \frac{9\theta}{13\sqrt{13}}, \frac{-2\cos\theta}{13} + \frac{2}{13}, \frac{-6\operatorname{sen}\theta}{13\sqrt{13}} + \frac{6\theta}{13\sqrt{13}}\right)$$





Nota: En los dibujos el radio a de la circunferencia es mayor que el resulta de los cálculos.

• Siguiendo la primera vía que decíamos al principio, se trata de encontrar la única curva (hélice circular) con $\tau = 3$ y $\kappa = 2$, con punto inicial $(0,0,0)$ y triedro de Frenet inicial $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Esto es, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{array}{rcl} d\vec{\beta}/ds & = & \vec{t} \\ d\vec{t}/ds & = & 2\vec{n} \\ d\vec{n}/ds & = & -2\vec{t} + 3\vec{b} \\ d\vec{b}/ds & = & -3\vec{n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \vec{\beta}(0) = (0,0,0) \\ \vec{t}(0) = (1,0,0) \\ \vec{n}(0) = (0,1,0) \\ \vec{b}(0) = (0,0,1) \end{array}$$

$$\frac{d^2n^i}{ds^2} = -2\frac{dt^i}{ds} + 3\frac{db^i}{ds} = -13n^i. \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\frac{d^2n^i}{ds^2} + 13n^i = 0 \quad \Rightarrow \quad n^i = A^i\cos\sqrt{13}s + B^i\operatorname{sen}\sqrt{13}s \qquad (i = 1,2,3)$$

Determinemos esta constantes, imponiéndole las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
n_0^1 = 0 \Rightarrow A^1 = 0; \qquad & \frac{dn^1}{ds}_{|0} = -2t_0^1 + 3b_0^1 = -2 \Rightarrow \sqrt{13}B^1 = -2 \\
n_0^2 = 1 \Rightarrow A^2 = 1; \qquad & \frac{dn^2}{ds}_{|0} = -2t_0^2 + 3b_0^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{13}B^2 = 0 \\
n_0^3 = 0 \Rightarrow A^3 = 0; \qquad & \frac{dn^3}{ds}_{|0} = -2t_0^3 + 3b_0^3 = 3 \Rightarrow \sqrt{13}B^3 = 3
\end{aligned}$$

$$\vec{n}(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s, \cos\sqrt{13}s, \frac{3}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s\right).$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = 2\vec{n}(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s, 2\cos\sqrt{13}s, \frac{6}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s\right).$$

$$\begin{aligned}
t^1 &= \frac{4}{13}\cos\sqrt{13}s + C^1; \qquad & t_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{4}{13} + C^1 = 1 \\
t^2 &= \frac{2}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s + C^2; \qquad & t_0^2 = 0 \Rightarrow C^2 = 0 \\
t^3 &= -\frac{6}{13}\cos\sqrt{13}s + C^3; \qquad & t_0^3 = 0 \Rightarrow -\frac{6}{13} + C^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\vec{t}(s) = \left(\frac{4}{13}\cos\sqrt{13}s + \frac{9}{13}, \frac{2}{\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s, -\frac{6}{13}\cos\sqrt{13}s + \frac{6}{13}\right).$$

Finalmente, integrando $d\vec{\beta}/ds = \vec{t}$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4}{13\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s + \frac{9s}{13} + D^1; \qquad & x_0 = 0 \Rightarrow D^1 = 0 \\
y &= -\frac{2}{13}\cos\sqrt{13}s + D^2; \qquad & y_0 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{13} + D^2 = 0 \\
z &= -\frac{6}{13\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s + \frac{6s}{13} + D^3; \qquad & z_0 = 0 \Rightarrow D^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \left(\frac{4}{13\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s + \frac{9s}{13}, -\frac{2}{13}\cos\sqrt{13}s + \frac{2}{13}, -\frac{6}{13\sqrt{13}}\,\mathrm{sen}\,\sqrt{13}s + \frac{6s}{13}\right).}$$

⊡

5 Determinar la elipse con centro de curvatura $(0,0)$ en el punto $(0,1)$ y que tangente a las rectas $x=1$ e $y=-4$.

SOLUCIÓN:

Debemos determinar la cónica que tiene un contacto de orden tres (osculatriz) con la circunferencia $x^2+y^2=1$ en el punto $(0,1)$ y que es tangente a las rectas $x=1$ e $y=-4$.

La ecuación tangencial de la circunferencia y de los puntos $(0,1)$ (de tangencia triple) y $(1,1)$ (donde concurren dos tangentes) son:

$$-u^2-v^2+1=0, \qquad 1+v=0, \qquad u+v+1=0,$$

respectivamente. El haz tangencial de las cónicas osculatrices es:

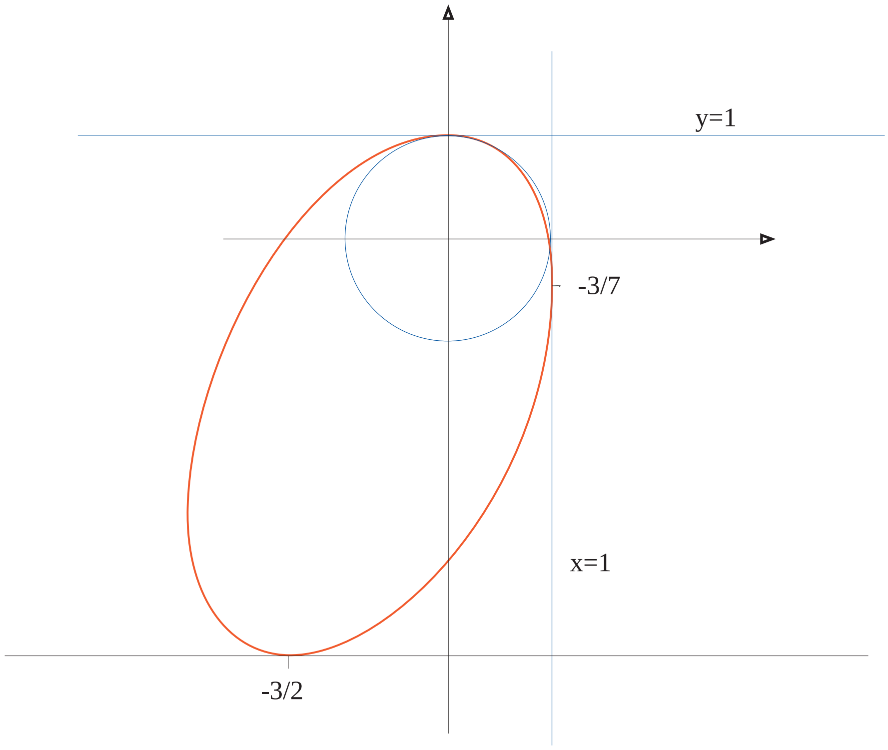
$$-u^2-v^2+1+t(1+v)(u+v+1)=0.$$

La cónica del haz que es tangente a $y=-4$, es decir, tal que su ecuación tangencial es satisfecha por $(0,1/4)$, se obtiene para $t=-3/5$; por lo que la ecuación tangencial de la cónica pedida es:

$$2-3u-5u^2-6v-3uv-8v^2=0.$$

Y su ecuación puntual es:

$$151-60x-100x^2-102y+60xy-49y^2=0.$$



□