Las abejas utilizan ciegamente las matemáticas

Las celdillas de una colmena [1]

Imaginemos un sistema de cilindros iguales o de esferas iguales, en contacto unos con otros sobre un plano, y representados en una sección como circunferencias iguales y concéntricos (Fig.1).

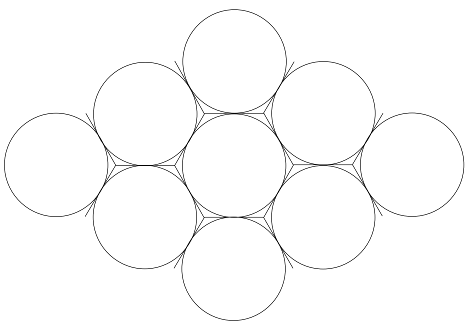

Fig.1 Celdillas hexagonales

Es evidente que cada una de estas circunferencias iguales está en contacto con otras seis que la rodean. Imaginemos que todo el sistema está bajo una presión uniforme; en este caso, los seis "puntos de contacto" entre las circunferencias del dibujo se extenderán hasta formar "líneas", que representan "superficies de contacto" en las esferas o cilindros. Así las circunferencias del dibujo se convertirán en hexágonos regulares e iguales.

La más famosa de todas las formaciones hexagonales es la celdilla de un panal. Nos encontramos con un conjunto de cilindros iguales, de sección circular, comprimidos hasta transformarse en prismas hexagonales. Pero existen dos capas de estos cilindros o prismas en contacto una con otra, una mirando hacia un lado y otra hacia el otro, lo cual supone un nuevo problema en relación con sus extremos. Podemos suponer que los cilindros originales tenían extremos esféricos, que es la forma natural y simétrica de rematarlos. Es evidente que para agruparlos apretadamente el extremo de cada cilindro de una capa tocará y encajará con los extremos de tres cilindros de la otra.

Así como resulta evidente que por la presión mutua de los lados de las seis celdillas adyacentes, cada celdilla se deformará hasta convertirse en un prisma hexagonal, también es obvio que por presión mutua contra los extremos de tres celdillas opuestas, el extremo de cada celdilla se comprime, formando una pirámide triédrica.

Si en lugar de usar cilindros experimentamos con esferas, cada bola, lo mismo que las semillas de una granada, estará en contacto con otras doce: seis en su propio plano, tres encima y tres debajo. Bajo presión, desarrollará doce superficies planas. Arriba y abajo se repetirán las condiciones a las que la celdilla del panal está sometida sólo por un extremo. Y dado que la esfera está situada simétricamente respecto a sus vecinas de cualquier lado, se deduce que los doce planos formados en la superficie son todos similares e igualmente dispuestos. Además, como hemos

[1] Texto extraído de la obra: D'Arcy Thompson.- "Sobre el crecimiento y forma"

obtenido este resultado apretando las esferas originales, es evidente que los cuerpos así formados llenarán un espacio completamente. El sólido regular que cumple estas exactas condiciones es el rombododecaedro (Fig.2).

Las celdillas de la colmena son, en realidad, figuras como ésta, pero incompletas; aproximamente la mitad de la figura, con el ápice y las seis esquinas adyacentes propias del rombododecaedro, sólo que este caso los seis lados se han alargado, como un prisma hexagonal, hasta terminar en un extremo abierto o incompleto.

Respecto a la investigación sobre los extremos de las celdillas, hay que decir que Kepler dedujo que los ángulos de la colmena debían ser los del rombododecaedro, pero este descubrimiento pasó inadvertido, y el astrónomo Maraldi, sobrino de Cassini, se llevó el crédito de elucidar por vez primera la forma de los rombos y del ángulo sólido que forman. Según él, los ángulos de los rombos son de 110° y 70°; también advierte que de la magnitud de los ángulos de los tres rombos de la base de las celdillas depende la de los ángulos basales de los seis trapecios que forman los lados; y se plantea cómo serían estos ángulos si los del fondo y los de los lados fueran iguales ente sí. Adoptando estos principios de belleza matemática, la solución que da es que los ángulos agudos son de 70° 32', y la de los obtusos de 109° 28'.

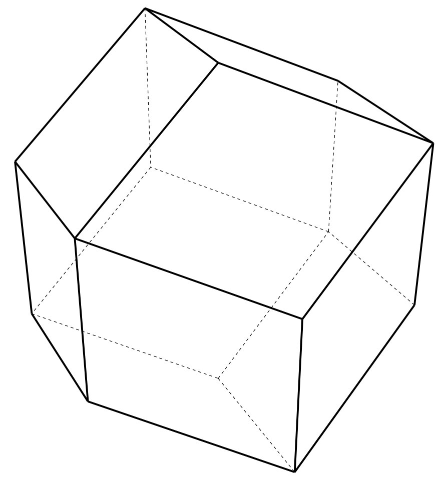

Fig.2 Rombododecaedro

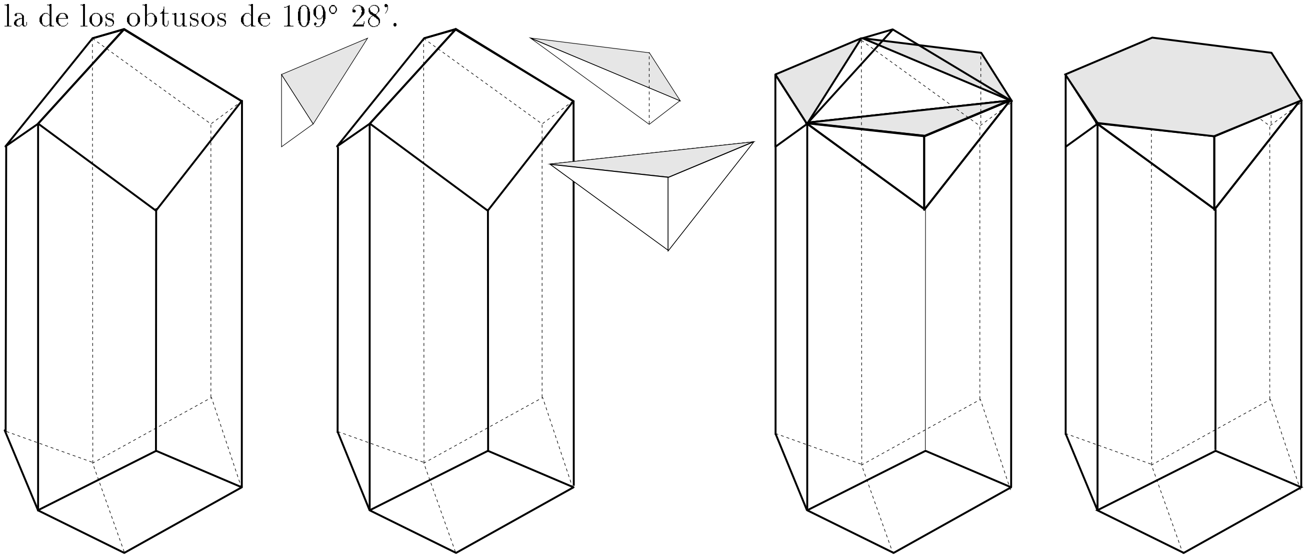

Fig.3 Celdillas rematadas por rombos

El mismo problema fue planteado a Samuel Koenig, joven matemático suizo, en lo siguientes términos: dada una celdilla hexagonal rematada por tres rombos similares e iguales. ¿Cuál es la configuración que precisa de menos cantidad de material para su construcción?

Koenig obtuvo que los ángulos que cumplían la condición son los de 109° 26' y 70° 34'; con lo que los rombos calculados teóricamente por él sólo se diferenciaban en dos minutos de los que Maraldi había encontrado al medir cuidadosamente cada rombo de las celdillas de un panal.

Angulos de los rombos terminales de las celdillas

Un plano que pasa por dos vértices no consecutivos del hexágono de la base de un primas regular hexagonal recto (A y B en la Fig.4) corta a la arista del prisma que parte del vértice intermedio y a la recta paralela a las aristas del prisma por el centro de la base, en dos puntos que equidistan (d en la Fig.4) de la base del prisma, como se comprueba fácilmente por la simetría de la figura o escribiendo la ecuación genérica de un plano que cumple dichas condiciones y hallando las intersecciones con tales recta.

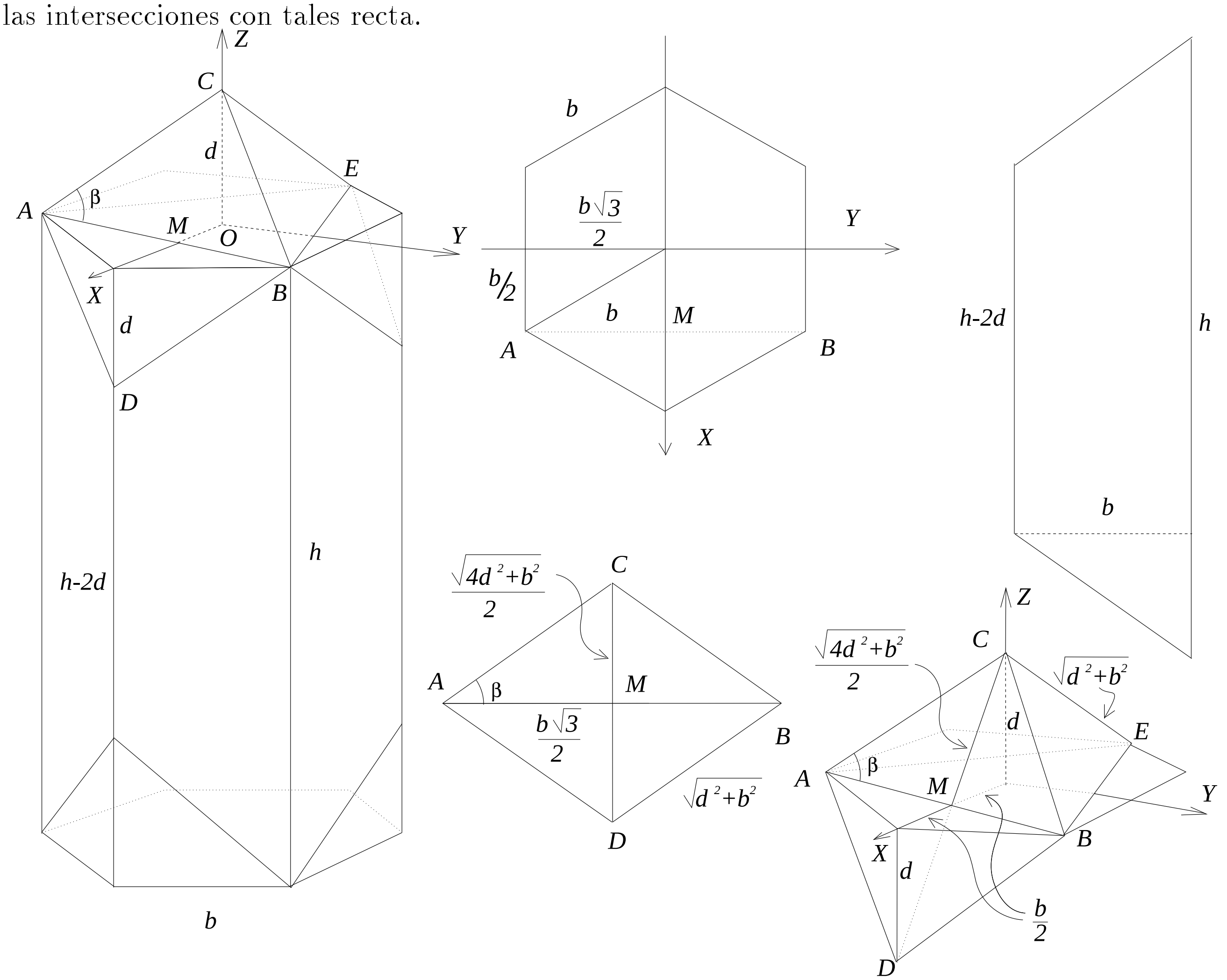

Fig.4 Calculo de los ángulos de los rombos

Ahora es fácil, teniendo en cuenta las magnitudes que consideradas en la Fig.4, obtener el área de la celdilla de altura h y lado de la base b, sumando el área de los seis trapecios laterales (base mayor igual a h, base menor $h-2d$ y altura b), más el área de los seis rombos (de diagonales $\sqrt{3}b$ y $\sqrt{4d^2+b^2}$) con que quedan rematada las dos bases de cada celdilla.

Con lo que el área de la celdilla en función de d es:

$$A(d) = 6\,Trapecio + 6\,Rombo = 6\frac{h+(h-2d)}{2}b + 6\frac{b\sqrt{3}\sqrt{4d^2+b^2}}{2} = 6(h-d)b + 3\sqrt{3}b\sqrt{4d^2+b^2}.$$

Para que este área sea mínima, su derivada ha de anularse:

$$A'(d) = -6b\left(1 - \frac{2\sqrt{3}d}{\sqrt{4d^2+b^2}}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4d^2 + b^2 - 12d^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 2\sqrt{2}b.$$

Y para este valor de d la derivada segunda $A''(d)$ es negativa:

$$A''(d) = -6b\left(\frac{-16\cdot 3\sqrt{3}bd^2}{(4d^2+b^2)\sqrt{4d^2+b^2}} + \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}b}{\sqrt{4d^2+b^2}}\right) = \frac{-6b(12\sqrt{3}b^3)}{(\frac{3b^2}{2})^{3/2}} < 0$$

Por lo que ahora ya podemos calcular el valor del semiángulo agudo β de cada rombo:

$$\cos\beta = \frac{b\sqrt{3}}{2} : \sqrt{d^2+b^2} = \frac{b\sqrt{3}}{2} : \sqrt{\frac{b^2}{8}+b^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 1/3 \Rightarrow 2\beta = \boxed{70^\circ\ 31'\ 43.6''}$$

Y el ángulo obtuso será, por consiguiente, de $\boxed{109^\circ\ 28'\ 16.4''}$

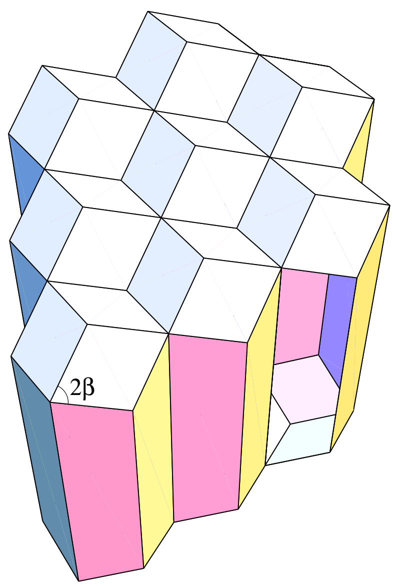

Fig.5 Celdillas de una capa de un panal