Curvatura normal, media y de Gauss

Angel Montesdeoca

Lunes 12 de Mayo del 2008

1 Demostrar que los centros de curvatura de las secciones de una superficie por planos que pasan por una recta tangente en un punto P_0 están sobre una circunferencia.

2 Hallar la curvatura de la sección normal perpendicular al meridiano en un punto del paralelo $z = a^2$, en el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$.

3 Dada la superficie $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u \operatorname{sen} u + v, \cos u + uv, u + v)$.
Se pide: 1) Curvaturas principales en el punto $(1, 1, 1)$.
2) Calcular la curvatura de Gauss en el punto $(1, 1, 1)$.
3) Determinar los puntos de las generatrices rectilíneas que pasan por el punto $(1, 1, 1)$ para los cuales la curvatura de Gauss es máxima o mínima.

4 Encontrar las curvaturas principales y los vectores principales del cilindro circular, en cada uno de sus puntos; y de la silla de montar ($z = xy$), en el origen.

5 En cada una de las superficies siguientes, hállese la aproximación cuadrática en las proximidades del origen:

$$a) \quad z = exp(x^2 + y^2) - 1, \qquad b) \quad z = \ln\cos x - \ln\cos y, \qquad c) \quad z = (x + 3y)^3.$$

6 Demuéstrese que no hay puntos umbilicales en una superficie en la que $K < 0$; y, que si $K = 0$, los puntos umbilicales son puntos planos.

7 Demuéstrese que la media de las curvaturas normales en dos direcciones ortogonales cualesquiera en P es la curvatura media $H(P)$.

8 La curvatura media es

$$H(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\theta)d(\theta),$$

donde $k(\theta)$ es la curvatura normal, expresada en función de las curvaturas normales principales por la fórmula de Euler

$$k(\theta) = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\operatorname{sen}^2\theta.$$

9 Para una carta de Monge $\vec{\mathbf{x}}(u, v) = (u, v, f(u, v))$ verifíquese que

$$g_{11} = 1 + f_u^2; g_{12} = f_u f_v; g_{22} = 1 + f_v^2; \quad L_{11} = \frac{f_{uu}}{W}; L_{12} = \frac{f_{uv}}{W}; L_{22} = \frac{f_{vv}}{W}; \quad K = \frac{f_{uu}f_{vv} - f_{uv}^2}{W^4}$$

donde g_{ij} y L_{ij} son los coeficientes de la 1ª y 2ª formas fundamentales, $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$ y K es curvatura de Gauss K. Encuéntrese la curvatura media H.

10 Obtener la superficie de revolución que resulta de girar la curva $x = f(z)$ situada en el plano XOZ, alrededor del eje OZ. Comprobar que la superficie puede ser parametrizada por coordenadas cilíndricas como

$$\vec{\mathbf{x}}(z, \theta) = \big(f(z)\cos\theta, f(z)\operatorname{sen}\theta, z\big).$$

Demostrar que la curvatura media está dada por

$$2H = \kappa + \frac{1}{f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2}},$$

donde κ es la curvatura de la curva original ($\kappa = -f''/(1 + f'^2)^{3/2}$).
Obtener la curvatura media de la esfera centrada en el origen.

11 Verifíquese que el punto $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$ es un punto umbilical si y sólo si existe un número k tal que

$$L_{11} = kg_{11}, \quad L_{12} = kg_{12}, \quad L_{22} = kg_{22}.$$

(k es la curvatura principal $k_1 = k_2$).

12 Si $\vec{v} = v^1\vec{\mathbf{x}}_1 + v^2\vec{\mathbf{x}}_2$ es tangente a $\mathcal{M}$ en $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u^1, u^2)$, la curvatura normal en la dirección determinada por $\vec{v}$ es

$$k(\vec{v}) = \frac{L_{11}(v^1)^2 + 2L_{12}v^1v^2 + L_{22}(v^2)^2}{g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2}.$$

13 Demostrar que la catenoide (Ejercicio **??**) es la única superficie de revolución, distinta de un plano, que es una superficie mínima (de curvatura media nula).

14 Supongamos que la superficie $\mathcal{M}: \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$ es mínima. Entonces la región de la superficie paralela $\mathcal{M}_\lambda$:

$$\vec{\mathbf{y}} = \vec{\mathbf{y}}(u, v) = \vec{\mathbf{x}}(u, v) + \lambda\vec{\mathbf{N}}(u, v), \qquad \lambda = cte$$

que corresponde a un dominio D en el plano de los parámetros tiene menor área que la correspondiente región en $\mathcal{M}$.

15 Sobre una superficie $\mathcal{M}$ se verifica:

$$III - 2H\, II + K\, I = 0,$$

donde H es la curvatura media, K es la curvatura de Gauss y I, II y III son la primera, segunda y tercera forma fundamental, definida esta última por:

$$III : T_P(\mathcal{M}) \times T_P(\mathcal{M}) \to T_P(\mathcal{M}) \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto III_P(\vec{u}, \vec{v}) = S_P(\vec{u}) \cdot S_P(\vec{v}).$$

16 Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ dos superficies con normales unitarias $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{N}}^*$, respectivamente y $\mathcal{C}$ la curva intersección de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$. Denotemos por k y k^* las curvaturas normales de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^*$ en los puntos de $\mathcal{C}$ y en las direcciones tangentes a $\mathcal{C}$.

Probar que $k\vec{\mathbf{N}} - k^*\vec{\mathbf{N}}^* = \kappa\left((\vec{\mathbf{N}} \times \vec{\mathbf{N}}^*) \times \vec{n}\right)$, donde κ es la curvatura de $\mathcal{C}$ y $\vec{n}$ su vector normal principal.

Demostrar que $\|(\vec{\mathbf{N}} \times \vec{\mathbf{N}}^*) \times \vec{n}\|^2 = \operatorname{sen}^2\phi$, donde ϕ es el ángulo que forman $\vec{\mathbf{N}}$ y $\vec{\mathbf{N}}^*$.

Establecer finalmente que $\kappa^2 \operatorname{sen}^2\phi = k^2 + {k^*}^2 - 2kk^* \cos\phi$.

17 Dada la superficie $\mathcal{M}$ de ecuación implícita $z = xy$ y el punto $P(1, 1, 1)$ de $\mathcal{M}$, se pide:

Probar que el punto $M(0, 0, -1)$ pertenece al plano tangente en el punto P.

Hallar la curvatura normal en P en la dirección de $\overrightarrow{PM}$.

Encontrar las direcciones principales, curvaturas principales y direcciones asintóticas en P.

18 Sea $\mathcal{M}$ una superficie $\mathbb{R}^3$, que contiene al origen O de coordenadas. Supongamos que los ejes OX y OY son tangentes a la superficie en O y que la matriz asociada al operador forma en O, relativa a la base canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, es

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si $\mathcal{C}$ es la curva obtenida intersecando $\mathcal{M}$ con el plano $y = 0$:

- ¿Cuál es la curvatura normal de $\mathcal{C}$ en O?
- ¿Cuales son las curvaturas y direcciones principales en O?
- ¿Cuál es la curvatura geodésica de $\mathcal{C}$ en O?
- ¿Cuál es la curvatura de Gauss de $\mathcal{M}$ en O?
- Dibujar la superficie en las proximidades de O, suponiendo que la normal a la superficie en O es $(0, 0, 1)$.

19 Sea $\mathcal{M}$ el hiperboloide de una hoja $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

Hallar las curvaturas principales y la curvatura de Gauss en el punto $(0, 2, 0)$ de $\mathcal{M}$.

Determinar la curvatura κ en $(0, 2, 0)$ de la elipse sección de $\mathcal{M}$ por el plano $x - \sqrt{3}z = 0$.

20 Demostrar que las curvaturas principales en un punto de una superficie paramétrica $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}(u, v)$, de coeficientes

de la primera forma fundamental g_{11}, g_{12}, g_{22} y de la segunda forma fundamental $L_{11}.L_{12}, L_{22}$, son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} L_{11} - kg_{11} & L_{12} - kg_{12} \\ L_{12} - kg_{12} & L_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Hallar las curvaturas principales y las direcciones asintóticas en el origen de cada una de las superficies

$$z = 2x^2 + y^2, \qquad z = x^2 - y^2, \qquad z = x^2, \qquad z = x^3 - 3xy^2.$$

21 Establecer que si los coeficientes de la 1ª y 2ª formas fundamentales son proporcionales respecto a un sistema de coordenadas (es decir, si existe una función λ tal que $L_{ij} = \lambda g_{ij}, \forall i, j$), son también proporcionales respecto a cualquier otro sistema de coordenadas sobre la superficie.

Respecto a un sistema de coordenadas sobre una superficie para el cual las líneas paramétricas son ortogonales, obtener la siguiente relación entre la curvatura de Gauss K y la curvatura media H:

$$4g_{11}^2 g_{22}^2 (H^2 - K) = (g_{11}L_{22} - g_{22}L_{11})^2 + 4L_{12}^2 g_{11} g_{22} \geq 0.$$

Demostrar que sobre una superficie se tiene $H^2 \geq K$ y que la igualdad sólo se tiene en puntos umbilicales.