# Ejercicios de cónicas

Angel Montesdeoca

Sábado, 14 de Abril del 2018

1 Hallar las ecuaciones de las tangentes desde el origen a la cónica $y^2 - 2xy + 2y - 4x - 2 = 0$.

2 Dada la cónica $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 8y + 21 = 0$, obtener la ecuación de la tangente en el punto $(3, 5)$.

3 Encontrar las tangentes a la cónica $x^2 - 2xy + y - 4 = 0$ desde el punto $(1, 1, -2)$.

4 En el plano proyectivo considérense la cónica que admite por ecuación $2(x^0)^2 + (x^1)^2 - (x^2)^2 + 2x^1x^2 = 0$ y el punto $P(1, 1, 1)$. Se pide: polar de $P$ respecto de la cónica y tangentes desde $P$ a la cónica.

5 Hallar el polo de la recta $x + 2y + 7 = 0$ en relación a la cónica $x^2 - xy + y - 3x - 1 = 0$.

6 Determinar los polos de los ejes de coordenadas respecto de la cónica, $7x^2 - y^2 + 4xy - 3x + 3 = 0$.

7 Lugar geométrico de los polos de la recta $x + y + 1 = 0$ con respectos a todas las cónicas del haz:

$$x^2 + 2\lambda xy + \lambda y^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

8 En el plano proyectivo considérese la cónica que admite por ecuación: $(x^0)^2 - 3(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 4x^0x^2 = 0$.

Hállese el trivértice autopolar respecto de dicha cónica que tenga un vértice en el punto $(1, -1, 0)$ y otro esté situado en la recta que admite por ecuación: $x^0 + 2x^1 + x^2 = 0$.

9 Si dos pares de vértices opuestos de un cuadrilátero son conjugados con respecto a una cónica el tercer par de vértices opuestos es también conjugado con respecto a la cónica.

10 Por un punto $P$ de una cónica se trazan las cuerdas fijas $PQ$ y $PR$ y dos cuerdas variables $PA$ y $PB$ que forman con las primeras una cuaterna armónica. Probar que las rectas $AB$ pasan por un punto fijo (polo de $QR$). Enunciar el resultado dual.

11 Encontrar las tangentes a la cónica $3u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 = 0$ desde el punto $(2, 0, 1)$.

12 Por un punto $M(a, 0)$ sobre el eje de una parábola $y^2 = 2px$ se trazan paralelas a las tangentes. ¿Qué lugar describe el punto en que cada una de estas rectas corta a las rectas que pasan por el origen de coordenadas y por el punto de contacto correspondiente?

13 Demostrar que las siguientes cónicas tangenciales son degeneradas, y determinar sus rectas singulares.

$$(a)\ u_1^2 - u_1u_2 = 0 \qquad\qquad (b)\ (u_1 + u_2)^2 + (u_1 - 3u_0)^2 = 0.$$

14 Demostrar que la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - 2x = 0$ es no degenerada y encontrar su ecuación tangencial.

15 Demostrar que la cónica tangencial $u_1^2 - 2u_1u_2 - 4u_1u_0 + u_2^2 + 2u_2u_0 - 5u_0^2 = 0$ es no degenerada y encontrar su ecuación puntual.

16 Demostrar que la cónica tangencial $u_1^2 - 2u_1u_2 - 4u_1u_0 + u_2^2 + 2u_2u_0 - 5u_0^2 = 0$ es no degenerada y encontrar su ecuación puntual.

17 ¿Es la recta $x^1 - x^2 + x^0 = 0$ tangente a la cónica $2u_1^2 + 4u_1u_0 - 5u_2^2 + u_2u_0 = 0$ ?

18 Encontrar la cónica cuyas tangentes son la familia de rectas $\lambda x + \lambda^2 y + 3\lambda^2 - 1 = 0$.

19 Se dan dos rectas $p_1$ y $p_2$ y un punto $O$ no perteneciente a ellas y sobre $p_1$ se considera una involución con $P$ y $P'$ homólogos. La recta $OP'$ corta a $p_2$ en $Q$. Demostrar que las rectas $PQ$ son tangentes a una cónica cuando $P$ varia sobre $p_1$.

20 Dado un triángulo inscrito en una cónica se considera una recta $r$ conjugada de uno de sus lados (es decir, que pasa por su polo). Demostrar que dicha recta $r$ corta a los otros dos lados en puntos conjugados.

Y recíprocamente, una recta que corta a los lados $AB$ y $AC$ de un triángulo inscrito en una cónica en dos puntos conjugados, es conjugada del tercer lado $BC$.

Enunciar el dual.

21 Se dan cuatro puntos $P, P', Q, Q'$ sobre una recta $\ell$ y dos puntos $A$ y $B$ alineados con $P$; sean $C = AP' \cap BQ$ y $\mathcal{C}$ la cónica que pasa por $A$, es tangente en $B$ a $BQ'$ y en $C$ a $CQ'$. Demostrar de intersección de $\ell$ y $\mathcal{C}$ (si existen) son los puntos dobles de la involución que tiene como conjugados a los pares $(P, P')$ y $(Q, Q')$. / Applet CabriJava

22 Los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, 2)$ quedan sobre la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación

$$2(x^1)^2 + 2x^1x^2 - (x^2)^2 + x^0x^2 - 5x^0x^1 + (x^0)^2 = 0.$$

a) Verificar que la proyectividad $\sigma$ con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

aplica los puntos $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, 2)$ en los puntos $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(1, 0, 0)$, respectivamente y la cónica $\mathcal{C}$ en la cónica $\overline{\mathcal{C}}$ de ecuación $\bar{x}^1\bar{x}^2 - \bar{x}^1\bar{x}^0 + \bar{x}^2\bar{x}^0 = 0$.

b) Determinar la ecuación de la cónica $\widetilde{\mathcal{C}}$ que es imagen de $\overline{\mathcal{C}}$ por la proyectividad $\tau$ con matriz asociada

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Como consecuencia, determinar la matriz asociada a la proyectividad que aplica $\mathcal{C}$ en la cónica de ecuación $x^1x^2 + x^2x^0 + x^1x^0 = 0$.

23 Determinar una hipérbola tangente a la cónica $3x^2 - 2xy + 5y^2 - x + y = 0$, en los los puntos de intersección con la recta $x - 2y + 1 = 0$, teniendo además una asíntota paralela al eje $OX$. Hallar la dirección de la otra asíntota.

24 Sea una cónica no degenerada tangente a los lados $BC, CA$ y $AB$ de un triángulo $\widehat{ABC}$ en los puntos $P, Q$ y $R$, respectivamente, demostrar que las rectas $AP, BQ$ y $CR$ son concurrentes.

25 Sean $A(0, 1, 0), B(0, 0, 1), C(-1, 2, 2)$ y $D(1, 0, 0)$ puntos sobre la cónica $\mathcal{C}$: $x^1x^2 + x^0x^1 + x^0x^2 = 0$ y $P$ otro punto de $\mathcal{C}$; $PB$ y $PC$ cortan a $AD$ en $B'$ y $C'$, respectivamente. Determinar la razón doble $(AB'C'D)$.

26 Sean $A, B, C, D$ puntos sobre una cónica $\mathcal{C}$ y las tangentes a $\mathcal{C}$ en $A$ y $C$ se cortan en $P$ sobre la recta $BD$. Demostrar que las tangentes a $\mathcal{C}$ en $B$ y $D$ se cortan en un punto $Q$ sobre $AC$.

27 Sean cuatro puntos $A, B, C$ y $D$ sobre una cónica $\mathcal{C}$, $AD$ y $BC$ se cortan en $P$ y $AC$ y $BD$ se cortan en $Q$. Demostrar que las tangentes a $\mathcal{C}$ en $A$ y $B$ se cortan en un punto $R$ sobre la recta $PQ$.

28 Hallar los ejes de la cónica $x^2 + y^2 + 2y + 2 = 0$.

29 Determinar el lugar geométrico de los vértices de las familia de cónicas de ecuación $y^2 + 2kx(y-1) - k^2(y-1)^2 = 0$.

30 Cónica determinada por los puntos de intersección de los pares de rayos homólogos de dos haces proyectivos que desde $V(0, 0)$ y $V'$, punto impropio de la recta $y - 2x + 3 = 0$) proyectan $A(1, 1), B(1, 0)$ y $C$, punto variable de la recta $y = 3$.

31 Dadas dos cónicas con cuatro puntos de intersección, probar que los cuatro puntos quedan en un circunferencia si y sólo si los ejes de las cónicas son perpendiculares.

32 Hallar la ecuaciones paramétricas de una elipse situada en el plano $x + y - z = 2$, de centro el punto $(1, 1, 0)$, que tiene un eje situado en el plano paralelo al $x - y = 0$ y las longitudes de sus semiejes son 2 y 3.

33 Ecuación de la cónica que pasa por $(4, 1)$ tiene por directriz la recta $x = 0$ y la involución de puntos conjugados que esta directriz subordina la polaridad hace corresponder al punto $(0, 2)$ el $(0, -2)$ y al $(0, 1)$ el $(0, -4)$. Determinar los focos.

34 Si dos cónicas tienen un punto común en el que sus tangentes son distintas, entonces ellas tienen al menos otro punto común.

35 Haz de cónicas con cuatro puntos de contacto con la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 - 4 = 0$ en el punto $(1, 2)$.

36 Consideremos la cónica $\mathcal{C} \equiv x^2+2xy+y^2-4x=0$. En el haz de rectas que pasan por el punto $F(1/2,1/2)$ definimos la aplicación que a cada recta $p$ del haz le hacemos corresponder la recta $p'$ que pasa por el punto $P$, polo de $p$ respecto a al cónica $\mathcal{C}$, y por $F$. Establecer que esta correspondencia $p \mapsto p'$ es una involución y que $p$ y $p'$ son perpendiculares.

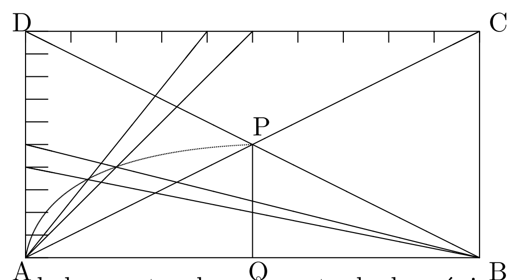
Si $d$ es la polar de $F$, compruébese que la distancia de un punto $X$ de la cónica a $F$ coincide con la distancia de $X$ a la recta $d$ (la cónica es una parábola de foco $F$ y directriz $d$)

37 Sean $p_1, p_2, p_3$ tres rectas, y $p_3$ interseca a una cónica no degenerada $\mathcal{C}$ en dos puntos distintos $A$ y $B$. Si $P$ es un punto arbitrario de $\mathcal{C}$, y $P_1 = AP \cap p_1$, $P_2 = BP \cap p_2$. Demostrar que las rectas $P_1P_2$ son las tangentes a una cónica cuando $P$ varia sobre $\mathcal{C}$.

38 Consideremos el haz de rectas paralelas al eje $OX$ y el haz de rectas pasando por el origen. A una recta del primer haz, de ordenada en el origen $\lambda$, le hacemos corresponder la recta del segundo que tiene por pendiente $\lambda/(1-\lambda)$. Establecer que esta correspondencia es una proyectividad y encontrar la ecuación de la cónica que determinan la intersección de rectas homólogas.

39 Encontrar dos haces proyectivos cuyos rayos homólogos se corten en los puntos de la cónica $x^2-2xy+y-4=0$.

40 Justificar el siguiente método de construcción de una elipse (ver figura). Los lados $AD$ y $DC$ de un rectángulo son divididos en un mismo número de segmentos de igual longitud. Unir $B$ y $A$ a los puntos de división empezando por $A$ y $D$, respectivamente. Estas rectas se cortan en el arco $AP$ de la elipse de semiejes $QA$ y $QP$.




41 Dada una recta $r$ en el plano proyectivo, demostrar que las rectas polares de los puntos de $r$ respecto de dos cónicas dadas se intersecan sobre una tercera cónica.

42 Una proyectividad entre los haces $\lambda x^1 + \mu(x^2-x^0) = 0$ y $\lambda'(x^1+x^2) + \mu'(x^2-x^0) = 0$ está establecida por las ecuaciones $\rho \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$

Encontrar el lugar geométrico de los puntos de intersección de recta correspondientes.

43 Las ecuaciones $\lambda' = 2\lambda - \mu$, $\mu' = \lambda + \mu$ establecen una proyectividad entre los puntos $(0,\lambda,\mu)$ y $(\lambda', 0, \mu')$ de las rectas $x^0 = 0$ y $x^1 = 0$. Encontrar la ecuación de la cónica tangencial cuyos elementos son las rectas que unen puntos correspondientes.

44 ¿Qué valor hay que dar al parámetro $\lambda$ para que la cónica $x^2+2y^2-\lambda xy - x - 2 = 0$ esté formada por dos rectas? Obtener además las rectas.

45 En el plano proyectivo real considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación:

$$2(x^0)^2 + (x^1)^2 + 2(x^2)^2 - 2x^0x^1 + 2ax^1x^2 = 0$$

a) Obténgase los valores de $a$ para los que $\mathcal{C}$ es totalmente imaginaria.

b) Obténgase los valores de $a$ para los que $\mathcal{C}$ es una cónica degenerada.

46 Demostrar que las cónicas (puntuales)

$$(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^0 - 8(x^2)^2 + 2x^2x^0 + 3(x^0)^2 = 0,$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^0)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^0 + 2x^2x^0 = 0$$

son degeneradas, y encontrar los puntos singulares.

47 Utilizar que en una cónica degenerada la recta que une un punto singular con otro punto de ella está contenida en la cónica, para factorizar las ecuaciones de las cónicas

$$(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^0 - 8(x^2)^2 + 2x^2x^0 + 3(x^0)^2 = 0,$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^0)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^0 + 2x^2x^0 = 0$$

48 Demostrar: “Una cónica que contiene a una recta es degenerada”. Enunciar el resultado dual.

49 Reducir las cónicas degeneradas siguientes a su forma normal o diagonal.

$$(x^1)^2 + 2x^1x^2 + 4x^1x^0 - 8(x^2)^2 + 2x^2x^0 + 3(x^0)^2 = 0,$$

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^0)^2 - 2x^1x^2 - 2x^1x^0 + 2x^2x^0 = 0$$

50 Hallar el valor de $k$ para que la cónica $x^2 + ky^2 + 4xy - 6x - 12y + 9 = 0$ sea una recta doble.

51 Dada la hipérbola $4x^2 + 4xy - 12x - 4y + 9 = 0$, referirla a sus asíntotas.

52 Dada la cónica $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$, demostrar que es degenerada y descomponerla en producto de dos rectas.

53 Toda cónica no degenerada real tiene, en un adecuado sistema coordenado, por ecuación: $x^1x^0 - (x^2)^2 = 0$.

54 Encontrar la transformación de coordenadas que reduce la ecuación de la cónica $3(x^1)^2 - 2x^1x^2 - (x^0)^2 = 0$ a la forma del Ejercicio 53.

55 Probar que toda cónica no degenerada real tiene por ecuación tangencial $u_0u_1 - u_2^2 = 0$, en un conveniente sistema de coordenadas y encontrar la transformación de coordenadas que efectúa esta reducción para la cónica $u_1^2 + u_2^2 - u_0^2 = 0$.

56 Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que una cónica carezca de puntos (es decir, sea imaginaria) es que

$$a_{00} > 0 \qquad A^{22} > 0 \qquad |A| > 0$$

siendo $A^{22}$ el adjunto de $a_{22}$ y $|A|$ el determinante de $(a_{ij})$, matriz asociada a la ecuación de la cónica

57 Clasificar las cónicas: a) $3x^2 + 2y^2 + 6xy - 4x - 2y + 1 = 0$ b) $4x^2 + 9y^2 + 12xy - 4x - 6y = 0$.

58 Hallar las ecuaciones reducidas de las siguientes cónicas:

$$9x^2 + y^2 - 6xy - 4x + y = 0.$$
$$6x^2 + 6y^2 + 4xy - 16x - 16y = 0.$$
$$x^2 - y^2 - 2xy - 4x + 4y - 3 = 0.$$

59 Dada la familia uniparamétrica de cónicas: $\mathcal{C}_\alpha \equiv x^2 + y^2 - 2x\cos\alpha - 4y \operatorname{sen}\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$. Se pide:
a) Clasificar dichas cónicas. b) Determinar y clasificar el lugar geométrico de los centros de dichas cónicas.

60 Clasificar las siguientes cónicas:

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 12x - 6y + 3 = 0, \qquad 5x^2 - 4xy + 4y^2 - 16y - 80 = 0,$$
$$8x^2 + 6xy - 9y^2 - 24x - 36y + 9 = 0, \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 5y = 0.$$

En cada caso calcular, cuando exista, el centro, ejes y asíntotas.

61 Dos de los vértices $A_1$, $A_2$ de un triángulo variable están sobre dos rectas dadas $p_1$ y $p_2$, cada uno de sus tres lados pasa por uno de tres puntos dados $P, Q$ y $R$. ¿Cuál es el lugar geométrico del tercer vértice $A_3 = A_1Q \cap A_2R$?

62 Clasificar proyectivamente las cónicas del plano real [1]:

$$3y^2 - xy + xz - 4yz + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2xy + 2xz - 2yz + z^2 = 0,$$
$$x^2 - y^2 + xz + z^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9 = 0.$$

63 Clasificar, en el plano afín, las cónicas

$$2x^2 - 4xy - y^2 + 5x - 7y - 3 = 0, \qquad x^2 + 3x - y^2 + 3y = 0.$$
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0, \qquad x^2 - 2xy + 3 = 0.$$

64 En el plano afín, clasifíquense las cónicas que admiten por ecuaciones:

$$\alpha x^2 + \alpha y^2 + 2\beta xy + (\alpha + \beta)(x + y) + 1 = 0, \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

[1] $z$ es la coordenada homogénea

65 Se da la familia de cónicas $x^2 + 2\lambda xy - 2y^2 + 2\lambda x - 1 = 0$. Hallar el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y = 0$ respecto a ellas.

66 Determinar el lugar geométrico de los polos de la recta $x + y + 1 = 0$ respecto de la familia de cónicas
$$\lambda y^2 - 2xy + 2y + (2 - \lambda) = 0.$$

67 En el plano afín considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación $x^2 - 2y^2 + 2xy + 2x - 4y + 1 = 0$. Hállese un paralelogramo circunscrito a $\mathcal{C}$ cuyos lados tengan las direcciones de los vectores $\vec{a}(1,0)$ y $\vec{b}(1,1)$.

68 En el plano afín considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación: $x^2 - 12xy + 6y^2 + 2x + 3y - 13 = 0$. Se pide: a) centro de $\mathcal{C}$; b) proyectividad sobre el centro definida por $\mathcal{C}$; c) asíntotas de $\mathcal{C}$.

69 Determinar centro, ejes y asíntotas si las tiene, de las cónicas:

$$\begin{aligned}
&x^2 + 2y^2 + 2xy - 6x - 2y + 9 = 0,\\
&x^2 - y^2 - 2xy + 8x - 6 = 0,\\
&x^2 + 9y^2 + 6xy + 2x - 6y = 0.
\end{aligned}$$

70 Determinar los focos de la cónica: $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 80x - 140y + 100 = 0$.

71 Hallar el diámetro de la cónica $x^2 - y^2 + 6xy + 4x - 6y + 8 = 0$ paralelo a la recta $4x - 2y + 3 = 0$.

72 Hallar la ecuación de la cónica $\mathcal{C}$ que pasa por: $A(1, 0, -1)$, $B(1, 0, 1)$, $C(1, 2, 1)$, $D(1, 2, -1)$ y $E(1, 3, 01)$.

73 Hallar la ecuación de la cónica tangente a $x - 3y = 0$ en $A(0, 3, 1)$ que pasa por los puntos $B(1, 2, 1)$, $C(-1, 2, 1)$ y $D(2, 0, 1)$.

74 Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x + y = 0$, $s \equiv y + 1 = 0$, $u \equiv x + y + 1 = 0$, $v \equiv x + 1 = 0$ y $w \equiv 6x + 5y + 2 = 0$.

75 Hallar la ecuación de la cónica que es tangente a las rectas: $r \equiv x + y + 2 = 0$ en $A(-1, 1, 1)$, a $s \equiv x + 2y - 2 = 0$ en $B(1, 0, 1)$ y a $u \equiv x + 2y = 0$.

76 Encontrar la cónica que es tangente a las rectas $r \equiv y - x + 1 = 0$ en $A(1, 2, 1)$ y a $s \equiv x - y + 1 = 0$ en $B(1, 0, 1)$, y pasa por el punto $C(1, 1, -1)$

77 Encontrar la ecuación de la cónica que pasa por $A(1, -1, 1)$ y que tiene dos puntos de contacto doble con $\mathcal{C} \equiv x^2 + 3y^2 - 2x - 4y + 8xy + 1 = 0$ en $B(1, 1, 0)$ y $C(1, 0, 1)$.

78 Encontrar la ecuación de la cónica que tiene un punto triple de contacto con $\mathcal{C} \equiv 2x^2 - xz + yz + xy - z^2 = 0$ en $A(1, 0, 1)$ y pasa por los puntos $B(1, 1, 0)$ y $C(1, 0, 0)$.

79 Hallar la ecuación del diámetro polar del punto $(0, 1, 4)$ en la cónica: $4y^2 - 5xy - 2x + 3y + 1 = 0$.

80 Se da un triángulo $\widehat{OAB}$ en el plano afín. Se pide:

1. Calcular la ecuación general de las parábolas circunscritas a $\widehat{OAB}$.
2. Calcular el lugar geométrico de los puntos cuya tangente es paralela a la cuerda $OA$.

81 En el plano afín hállese la ecuación general de las cónicas que son tangentes a la recta $y = x$ y pasan por los puntos $P(0, 1)$, $Q(2, 0)$ y $R(2, 2)$. De entre todas ellas determínese las que son parábolas.

82 Encontrar la ecuación de la cónica tangente a las rectas $x + y = 0$, $x = 1$ en los puntos de intersección con la recta $x + y + 1 = 0$ y que pasa por el punto $(2, 1, 1)$.

83 Dar un ejemplo que sea la situación dual del Ejercicio 82.

84 Encontrar la ecuación de las siguientes cónicas:

(a) Que pasa por los puntos $(1, 1, 1), (-1, 3, -1), (0, 1, 1), (0, 4, -1), (0, 7, 5)$.

(b) Que pasa por los puntos $(1, 1, 1), (-1, 3, -1), (0, 1, 1), (0, 4, -1)$y es tangente en el punto $(1, 1, 1)$ a la recta $x^1 + x^2 - 2x^0 = 0$.

(c) Tangente a las rectas $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$ en la intersección de éstas con $x^0 = 0$, pasa por el punto $(3, 1, 2)$.

(d) Como en (c), pero con la última condición reemplazada por la condición de que la cónica sea tangente a la recta $x^1 + 2x^2 - x^0 = 0$.

(e) Tangente a las rectas $x - 1 = 0$, $x + 1 = 0$, $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$.

(f) Tangente a las rectas $x-1 = 0$, $x+1 = 0$, $y-1 = 0$, $3x+4y-5 = 0$ con el punto $(2, 1)$ como punto de contacto.

85 Una parábola con el vértice $(1, 1)$ pasa por el punto $(2, 0)$, y además su eje es paralelo al eje $OY$. Escribir la ecuación de la parábola.

86 En el plano afín hállese la ecuación general de las hipérbolas que pasan por los puntos $P(0, 0)$ y $Q(2, 0)$ y cuyas asíntotas tienen las direcciones de los vectores $\vec{a} = (1, 1)$ y $\vec{b} = (1, -1)$. Hállese el lugar geométrico de los centros de dichas hipérbolas.

87 Hallar el lugar geométrico de los polos de las normales a la parábola $y^2 = 2px$.

88 En el plano euclídeo, y respecto de una referencia rectangular, considérese la cónica que admite por ecuación: $2x^2 - y^2 + 4xy - 12x + 12y + 3 = 0$.

Se pide: Clasificar la cónica. Hallar el centro. Hallar sus ejes y vértices. Hallar sus asíntotas si las tiene.

89 Dada una parábola y una circunferencia de centro fijo $C(a, b)$ y un radio variable $r$, se pide el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen la misma polar respecto de las dos curvas.

90 En el vértice situado sobre el eje $OX$ de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ se ha trazado la tangente. De cada uno de los puntos de esta tangente se ha trazado la perpendicular a su polar correspondiente. Hallar el lugar geométrico de los pies de estas perpendiculares.

91 En un plano se dan: una circunferencia fija $\mathcal{C}$ de centro $O$ y radio $R$, y una recta $r$ que dista $a$ del punto fijo $O$. La tangente en un punto fijo $T$ de la circunferencia encuentra a $r$ en $M$. Hallar el lugar geométrico de los puntos donde la perpendicular a $OM$ en $O$ encuentra a la recta $TM$ cuando $T$ varía. Definir el lugar.

92 Dado el conjunto de circunferencias representadas por la ecuación: $x^2 + y^2 - 2a\lambda x + \lambda^2 - b^2 = 0$, donde $a$ y $b$ son constantes y $\lambda \in I\!R$ un parámetro, se pide:

Ecuación del lugar geométrico de los puntos de contacto de las tangentes a estas circunferencias paralelas al eje $OX$. Estudiar el lugar resultante.

93 Se considera la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \neq b)$. Se pide calcular el lugar geométrico de los puntos $X$ del plano cuya polar es perpendicular a la recta $XP$ donde $P$ es un punto fijo del plano de coordenadas $(\alpha, \beta)$. Estudiar el lugar resultante.

94 Dada la cónica en plano euclídeo: $5x^2 + 4y^2 - 4xy - 16y - 80 = 0$ Se pide: a) Clasificarla, b) Coordenadas del centro, c) Ecuación reducida, d) Coordenadas de los focos y directrices.

95 Dado el triángulo determinado por las rectas $x = 0$, $y = 0$ y $x + 2y - 2 = 0$, hallar el lugar geométrico de los puntos $P$ tales que sus proyecciones ortogonales sobre los tres lados determinan un triángulo de área constante igual a $k$. Estudiar el lugar obtenido.

96 Se da la parábola $y^2 = 2px$ y un punto $A(a, b)$. Por el vértice $O$ de la parábola se traza una cuerda variable $OB$. Se proyecta el punto $B$ sobre la tangente en el vértice, obteniéndose un punto $C$, y se une $C$ con $A$. Se pide:

a) Lugar geométrico de los puntos de encuentro de las rectas $OB$ y $AC$.

b) Discutir el lugar haciendo variar la posición del punto A del plano.

97 Desde un punto cualquiera de la directriz de la parábola $y^2 = 2px$, se traza la perpendicular a su polar correspondiente. Lugar geométrico del punto de intersección de estas dos rectas.

/ Applet CabriJava

98 En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, obténgase la ecuación general de las cónicas que tienen como foco y vértice, correspondientes a un mismo semieje, a dos puntos dados.

99 En el plano euclídeo, considérese una cónica no degenerada, $\mathcal{C}$. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos desde los cuales las tangentes a $\mathcal{C}$ forman ángulo recto. Pruébese que si $\mathcal{C}$ es elipse o hipérbola, entonces el lugar buscado es una circunferencia con el mismo centro que $\mathcal{C}$ (de Monge); si $\mathcal{C}$ es una parábola, el lugar es una recta (la directriz de la parábola). (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg1846.pdf)

100 En el plano euclídeo, y respecto de una referencia rectangular, de una circunferencia se sabe que la polar de $P(2,0)$ es la recta $x=y$, y que el origen de coordenadas es conjugado del punto del infinito del eje $y=0$. Determínese dicha circunferencia.

101 En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, considérese la cónica $\mathcal{C}$ que admite por ecuación: $2x^2-y^2+4xy-12x-12y+3=0$. Se pide:

1. Clasificar $\mathcal{C}$. 2. Hallar su centro. 3. Hallar sus ejes y sus vértices. 4. Hallar sus asíntotas (si las tiene).

102 En el plano euclídeo y respecto de una referencia rectangular, considérense las cónicas que admiten por ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 9x^2+y^2-6xy-4x+y=0, \\ 6x^2+6y^2+4xy-16x-16y=0, \\ x^2-y^2-2xy-4x+4y-3=0. \end{array}$$

Hállense las ecuaciones reducidas de dichas cónicas.

103 Dada, en el plano euclídeo, una hipérbola, pruébese que el producto de las distancias de un punto de la hipérbola a sus asíntotas es constante.

104 Hallar las ecuaciones de los ejes de la cónica dada por la ecuación $3x^2-2y^2+12xy-3x+y-2=0$.

105 Hallar la polar del punto $(1,2)$ respecto a la cónica dada por $x^2+y^2-2xy+2x-1=0$.

106 Hallar el polo de la recta $x+y-2=0$ respecto de la cónica $x^2-2xy+1=0$.

107 Hallar el polo de la recta $x+5y+6=0$ respecto de la cónica $x^2+y^2-2x+4y+2=0$.

108 Dada la hipérbola equilátera $xy=1$ y la recta $r\equiv x+y=0$, definimos la correspondencia entre puntos de $r$ de la siguiente forma: a un punto $A$ de $r$ se le hace corresponder el punto $A'$, intersección de $r$ con la polar $a$ de $A$ respecto de la hipérbola.

1) Demostrar que dicha correspondencia es una involución sobre $r$. ¿Tiene puntos dobles?

2) Si en vez de la recta $r$, tomamos la recta $t\equiv x+y=2$, tal correspondencia es una involución?

3) Finalmente, si ahora tomamos la recta $s\equiv x+y=5/2$. ¿Cuáles son los puntos dobles de la involución en cuestión?

109 Establecer que $x^2+2xy+y^2-3x-5y+4=0$ es la ecuación de la parábola que pasa por el punto $(0,1)$, cuya tangente en el punto $(1,1)$ es la recta $y=x$ y su eje es paralelo a la recta $x+y=0$.

¿Cuál es su ecuación respecto al nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes son la recta $y=x$ y el eje de la parábola?

En la recta $y=0$, definimos la correspondencia que a un punto $A$ de ella, le hacemos corresponder el punto $A'$ de intersección con dicha recta de la polar de $A$ respecto a la parábola anterior. Establecer que se trata de una involución . ¿Tiene puntos dobles?

110 En la hipérbola $4x^2+4xy-12x-4y+9=0$, la involución de rectas conjugadas en el punto $(1,1)$ (centro de la hipérbola), tiene como rectas dobles las asíntotas $x=1, x+y-2=0$.

111 Consideremos la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $x^2+2xy+y^2-4x=0$. En el haz de rectas que pasan por el punto $F(1/2,1/2)$ definimos la aplicación que a cada recta $p$ del haz le hace corresponder la recta $p'$ del mismo haz que además pasa por el punto $P$, polo de $p$ respecto a al cónica $\mathcal{C}$. Establecer que esta correspondencia $p\mapsto p'$ es una involución y que $p$ y $p'$ son perpendiculares. Concluir que $F$ es un foco de $\mathcal{C}$.

Si $d$ es la polar de $F$, compruébese que la distancia de un punto $X$ de la cónica a $F$ coincide con la distancia de $X$ a la recta $d$ (la cónica es una parábola de foco $F$ y directriz $d$)

112 Sea una cónica generada por dos haces proyectivos (no perspectivos) con puntos base en $A$ y $B$; se considera sobre una recta $r$ no tangente a la cónica la proyectividad $\sigma$ que ambos haces determinan, así como la involución $\tau$ que la cónica (polaridad asociada) determina. Dado un punto $Q$ se consideran los punto $R=\sigma(Q)$, $P=\sigma^{-1}(Q)$ y $\tau(Q)$, demostrar que $Q$ y $T$ están armónicamente separados de $R$ y $P$ (es decir, $(QTRP)=-1$).

Caso particular: Tomar la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $r \equiv x = 2$; expresar explícitamente las ecuaciones de $\sigma$ y $\tau$.

113 Si dos puntos $B$ y $C$ de una cónica, se proyectan desde dos puntos conjugados, alineados con el polo de $BC$, las rectas proyectantes se cortan en un punto de la cónica. Enunciar el dual

/ Applet CabriJava

114 En una cónica con centro, si se proyecta un punto de la cónica desde dos puntos de la misma diametralmente opuestos, se obtienen un par de rectas paralelas a un par de diámetros conjugados.

115 Determinar el valor de $\lambda$ para que $t_1 t_2 + \lambda p^2 = 0$ sea la ecuación de la cónica $\mathcal{C} \equiv x^2 - 6xy + 2x + 2y - 1 = 0$, donde $t_1 = 0$ y $t_2 = 0$ son las ecuaciones de las tangentes a $\mathcal{C}$ desde el punto $P(1,1)$ y $p = 0$ es la ecuación de la polar de $P$ respecto a $\mathcal{C}$.

116 Determinar la ecuación de la hipérbola con centro $(1,0)$, que tiene a la recta $y - x + 1 = 0$ como una asíntota y que pasa por los puntos $(2,2)$ y $(0,2)$.

Obtener la otra asíntota, sus ejes y la ecuación de la hipérbola referida a los ejes.

117 René Descartes (1596-1650) dio la siguiente solución para la construcción de rectas tangentes:

Dada la ecuación de una curva, sea la parábola $y^2 = 2x$, para construir la tangente a la curva en el punto $(2,2)$, deberemos considerar la familia de circunferencias con centro $(a,0)$ esté en el eje de las "x" y que pasen por el punto $(2,2)$.

Sólo una de estas circunferencias intersecará a la parábola en un sólo punto (i.e. es tangente a la parábola). Cuando encontremos esta circunferencia, afirma Descartes, la tangente a la circunferencia será la tangente a la parábola en $(2,2)$.

Usando este método, encontrar la ecuación de dicha tangente.

118 Se considera la familia de rectas dada por $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y - (4\lambda + 2) = 0$

1. Probar que existe un punto del plano cuya distancia a todas las rectas de la familia es constante.
2. Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano por los que pasa una sola recta de la familia anterior. ¿Qué figura geométrica es?

119 Ecuación de la cónica con centro en el punto $(2,1)$, cuyos ejes tienen la misma dirección que los ejes coordenados y que pasa por los puntos $(3,0)$ y $(1,0)$.

120 En plano y respecto a un sistema de coordenadas cartesianas tenemos la cónica de ecuación $8x^2-3y^2-2xy-8x+2y = 0$. Determinar el centro y las asíntotas. Hacer un cambio de coordenadas de origen el centro de la cónica y ejes coordenados las asíntotas. ¿Cuál es la ecuación de la cónica en este nuevo sistema de coordenadas?

121 Dada la cónica de ecuación $8x^2 - 3y^2 - 2xy - 8x + 2y = 0$. Sobre el eje "$x$" se define la siguiente correspondencia, a cada punto $P$ le asociamos el punto $P'$ de intersección de dicho eje con la polar de $P$ respecto a la cónica. Establecer que $P \mapsto P'$ es una proyectividad. ¿Cuáles son los puntos dobles?

122 Dado un cuadrilátero $ABCD$, demostrar que el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por sus vértices es una cónica que contiene a los seis puntos medios de los segmentos que unen sus vértices y a los tres puntos diagonales de cuadrilátero.

Comprobarlo para el caso particular en que los vértices del cuadrilátero tienen de coordenadas $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,2)$, $D(0,1)$.

123 Dados tres puntos $A, B$ y $C$ en una cónica y las tres tangentes $a, b$ y $c$ en ellos. Demostrar que puntos $a \cap BC$, $b \cap AC$ y $c \cap AB$, están alineados. Demostrar que las rectas que unen los vértices del triángulo $ABC$ y el formado por las tangentes $a, b$ y $c$, con concurrentes. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejgp895.pdf) (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejgp1422.pdf)

124 Determinar las tangentes comunes a las dos circunferencia $(x+1)^2 + y^2 = 4$ y $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$.

125 Lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una parábola que pasan por su foco.

/ Applet CabriJava

126 Ecuación de la parábola de la que se conoce el eje y la tangente en uno de sus puntos.

127 Se dan dos rectas secantes $a$ y $b$ y un punto $P$ que no pertenece a ninguna de ellas. Una recta $d$ que pasa por $P$ corta a $a$ y $b$ en $A$ y $B$ respectivamente. Mostrar que el lugar geométrico de la intersección de la paralela a $a$ pasando por $B$ con la perpendicular a $a$ trazada por $A$ es una hipérbola. Determinar las asíntotas de ella. / Applet CabriJava

128 Se dan en el plano una circunferencia y un punto $P$ exterior a ella. Se considera un punto $A$ variable sobre la circunferencia y su diametralmente opuesto $B$, la recta $PA$ corta a la circunferencia en otro punto $Q$ y la recta $QB$ interseca a la recta paralela a $AB$ por $P$ en $M$. De pide el lugar geométrico del punto $M$ cuando $A$ varía. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg1662.pdf)

129 Hallar la ecuación de una cónica que pase por el origen y tenga un foco en el punto $F(2, -1)$, siendo la directriz correspondiente a $F$: $3x - y - 1 = 0$.

130 Dadas las parábolas $y = ax^2 + b$ y $x = cy^2 + d$, que se cortan en cuatro puntos, demostrar que por ellos pasa una circunferencia.

131 Sean $\mathcal{F}$ un haz de cónicas y $P$ un punto del plano. Demostrar que las polares de $P$ respecto a las cónicas de $\mathcal{F}$ son concurrentes.

132 Demostrar que las cuerdas que unen los pares de punto homólogos de una proyectividad sobre una cónica, envuelven a su vez otra cónica.

133 Demostrar que las hipérbolas equiláteras circunscritas a un triángulo, pasa por el punto de intersección de las alturas. / Applet CabriJava

— — — — — — — — — — — — —

134 Sean $\mathcal{C}$ una cónica del plano afín y $d_1, d_2$ y $d_3$ tres rectas. Sea $M_0$ un punto de $\mathcal{C}$, $M_1$ el otro punto de intersección de la paralela a $d_1$ pasando por $M_0$ y que está en $\mathcal{C}$, $M_2$ el otro punto de intersección de la paralela a $d_2$ pasando por $M_1$ con $\mathcal{C}$, $M_3$ el otro punto de intersección de la recta que pasa por $M_2$ y es paralela a $d_3$ con $\mathcal{C}$, $M_4$ el otro punto de intersección de la recta que pasa por $M_3$ y es paralela a $d_1$, etc. Se define así los puntos $M_i$ para $i \geq 0$. Demostrar que $M_6 = M_0$.

135 Demostrar que la ecuación de cualquier circunferencia en coordenadas polares puede escribirse en la forma

$$\rho^2 + 2\rho\cos(\alpha+\theta) + b = 0$$

Determinar las coordenadas $(\rho_0, \theta_0)$ de su centro, y su radio $r$.

136 Demostrar que la curva

$$\rho = \frac{c}{1 + a\cos\theta + b\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

es la ecuación de una cónica. ¿Bajo qué condiciones esta curva es una elipse, una hipérbola o una parábola?

137 Sean $A$ y $B$ los puntos en que una sección cónica no degenerada corta a una recta que pasa por el foco $F$. Probar que la cantidad siguiente no depende de la recta tomada:

$$\frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{BF}}$$

138 Pruébese que para una elipse o una hipérbola, del plano euclídeo, ocurre que la tangente y la normal a la cónica en uno cualquiera de sus puntos son las bisectrices del ángulo que determinan las rectas que unen al punto con los focos.

139 Probar que una homología armónica cuyo centro y eje sean polo y polar respecto a una cónica, deja invariante a dicha cónica.

140 Establecer que el lugar geométrico de los puntos del plano cuya razón de distancias a dos puntos fijos $A$ y $B$ es constante, es una circunferencia que tiene centro en la recta $AB$ y corta a ésta en dos puntos $P$ y $Q$ armónicamente separados de $A$ y $B$.

141 En el plano euclídeo, una parábola gira (sin deformarse) alrededor de su foco; en cada posición, se le traza una tangente paralela a una dirección fija. Hállese el lugar geométrico descrito por los puntos de tangencia.

142 Dada, en el plano euclídeo, una parábola, hállese el lugar geométrico descrito por los puntos tales que las dos tangentes trazadas desde ellos a la parábola forman un ángulo dado.

143 En el plano euclídeo, considérense un punto $P$ y una recta $r$, $P \notin r$ ; hállese la hipérbola equilátera que tiene un foco en $P$ y tal que $r$ es la correspondiente directriz.

144 En el plano euclídeo considérese una cónica $\mathcal{C}$, conocida mediante su ecuación respecto de una referencia rectangular. Determínense todas las cónicas que tienen los mismos focos que $\mathcal{C}$ (homofocales con $\mathcal{C}$). y

145 En el plano proyectivo, sean $\mathcal{C}$ una cónica no degenerada, $A, B, C, D, E, F$ puntos distintos de $\mathcal{C}$, $U = BF \cap EC, V = CD \cap FA, W = AE \cap DB$, $\ell$ recta que no contiene a ninguno de los puntos anteriores que interseca a $UVW$ en $X$ y a $\mathcal{C}$ en $Y$ y $Z$, entonces se tiene la siguiente relación entre razones dobles

$$(WUVX) = (ACDZ)\cdot(DFCY)\frac{(YZBE)-(YZCF)}{(YZBE)-(YZAD)}.$$

146 Tres circunferencias son tangentes a una recta, dos de ellas tangentes entre sí y una tercera, situada entre las dos primeras, es tangente a ellas. ¿Qué relación existe entre los radios de las tres circunferencias?

147 Probar que las tangentes comunes a cada par de tres circunferencias se intersecan en tres puntos alineados.

148 Demostrar que los puntos de intersección de una recta variable $r$ que pasa por un punto fijo $P$ sobre el eje de una parábola, con la recta $s$ que pasa por el vértice $B$ de la parábola y por el punto de contacto de la tangente a la parábola paralela a la recta $r$, están en la polar del punto $P$.

149 En una elipse se traza una recta variable $r$ por uno de los focos $F$ que corta a la tangente en uno de los vértice $A$ en $P$. Por $P$ se traza la otra tangente $t$ a la elipse. Demostrar que el punto $P'$ de intersección de la tangente $t$ con la recta $r'$ que pasa por el foco $F$ y perpendicular a la recta $r$, están en la tangente a la elipse en otro vértice $A'$.

150 Sea la parábola $y^2 = 2px$, $O$ su vértice, $G$ un punto situado sobre su eje con $\overline{OG} > p$ y $E$ un punto en el eje entre $O$ y $G$, tal que $\overline{EG} = p$. Si $A$ es uno de los puntos en que la perpendicular al eje en $E$ corta a la parábola, demostrar que $\overline{GA}$ es la mínima distancia de $G$ a la parábola.

Observación: Esto nos da un método para construir la normal a una parábola desde un punto de su eje. Para el caso de que el punto no esté en el eje: (Ver también) / Applet CabriJava

151 Sea $\mathcal{C}$ una parábola dada y un punto $P$ que no esté sobre su eje. Justificar la siguiente construcción de la normal a la parábola desde el punto $P$ (recta que corta a la parábola en ángulos rectos):

Desde $P$ se traza la perpendicular al eje, que corta a éste en $Q$; se toma el punto $R$ sobre el eje tal que $\overline{OR}$ ($O$, vértice de la parábola), tenga longitud igual a la mitad del latus rectum (cuerda perpendicular al eje y que pasa por el foco); sea $M$ el punto medio del segmento $RQ$; y $L$ el punto sobre la perpendicular al eje, tal $\overline{ML} = \frac{1}{4}\overline{PQ}$. Entonces, la circunferencia de centro en $L$ y que pasa por el vértice de la parábola, interseca a ésta en un punto $A$ tal que la recta $AP$ la corta en ángulos rectos.

(Ver también)

152 Se llama podaria de una curva $\mathcal{C}$, respecto de un punto $O$, al lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde $O$ a las tangentes de $\mathcal{C}$.

Hallar la podaria de la parábola $y^2 = 2px$ respecto al origen de coordenadas.

Dicha podaria coincide con el lugar geométrico de los puntos de intersección de cada tangente en un punto $B$ de la circunferencia de centro en el eje de la parábola, que pasa por su foco y por su vértice, con la recta que pasa por el vértice y por el punto $A$ diametralmente opuesto a $B$ (Cisoide de Diocles). (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg1841.pdf) / Applet CabriJava

153 Se considera un triángulo con sus vértices $A, B, C$ sobre la hipérbola $xy = a^2$. Demostrar que son concurrentes las perpendiculares a cada lado por su punto de corte con el eje $OX$.

154 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualquiera a la parábola $y^2 = 4px$. (↻)

155 Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de intersección de dos tangentes perpendiculares cualquiera a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

156 Dados de una cónica dos puntos $R$ y $S$ y las tangentes en ellos $r$ y $s$ y siendo $A$ otro punto de la cónica, localizar el otro punto $P$ que está en una recta $u$ que pasa por $R$. Utilizar que dicha cónica es el lugar geométrico de la intersección de las rectas homólogas en la proyectividad entre los haces de base $R$ y $S$.

157 Dados el vértice $V$, el eje $e$ y otro punto $A$ de una parábola, dar un método para hallar el punto de corte con la parábola de una recta paralela al eje.

158 Sea una hipérbola, de la que se suponen dadas las asíntotas $r$ y $s$ y un punto $A$: Dar un método para hallar el otro punto de corte con la hipérbola de una recta paralela a una asíntota.

159 Sea en una parábola, una cuerda $AB$, $C$ el punto de intersección de las tangentes en $A$ y $B$, y $M$ el punto de contacto de la tangente paralela a la cuerda $AB$. La recta $CM$ corta a $AB$ en el punto $E$. Demostrar que $M$ es el punto medio del segmento $CE$.

160 Se da una asíntota y un punto $P$ de una hipérbola. Uno de los focos de la cónica describe la perpendicular trazada desde $P$ a la asíntota dada. Hallar el lugar geométrico del punto $Q$ de intersección de la segunda asíntota con la directriz del foco considerado.

161 Supongamos dada una proyectividad sobre la tangente $t$ a una cónica. Desde cada dos puntos homólogos $A$ y $A'$ trazamos las tangentes $a$ y $a'$ distintas de $t$. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de $a$ y $a'$.

162 Supongamos dada una proyectividad sobre el eje de las "$x$" y la circunferencia tangente a dicho eje en el origen y de radio $a$. Desde cada dos puntos homólogos $A$ y $A'$ en la proyectividad, trazamos las tangentes $a$ y $a'$ distintas de $OX$. Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de $a$ y $a'$.

163 Determinar la ecuación de la parábola tangente a las cuatro de ecuaciones rectas $a \equiv x = 0$, $b \equiv 4x - 2y + 1 = 0$, $c \equiv 4x + 2y + 1 = 0$ y $d \equiv x - y + 1 = 0$.

164 Dadas una cónica, las tangentes $m$ y $n$ en dos de sus puntos $M$ y $N$, y una secante $r$ que no pasa por $M$ ni por $N$, entonces los pares de puntos intersecciones de $r$ con la cónica y con las tangentes, definen una involución, que tiene uno de sus puntos dobles en la intersección de $MN$ con $r$. Enunciar el dual. .

165 Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda $r$ recta que sea tangente la cónica, que pase por un punto diagonal y sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución, en la que son dobles el punto de tangencia y el punto diagonal por donde pasa $r$. Enunciar el dual.

166 Dada una cónica y un cuadrivértice inscrito en ella, toda recta que sea secante a la cónica y sin pasar por ninguno de los vértices del cuadrivértice, corta a la cónica y a los lados opuestos del cuadrivértice en pares de puntos homólogos en una misma involución. Enunciar el dual.

167 Establecer que los centros de las cuerdas paralelas en un parábola están sobre una paralela a su eje.

168 Si los puntos medios de dos cuerdas en una parábola están sobre una perpendicular al eje de la parábola, demostrar que las mediatrices de dichas cuerdas se cortan en el eje y recíprocamente.

169 La perpendicular en el punto medio (mediatriz) a una cuerda de una parábola y la perpendicular al eje de la parábola por el punto medio de dicha cuerda, intersecan al eje en dos puntos que determinan un segmento de longitud la mitad del parámetro de la parábola.

170 Sean $a, b, c, d$ y $e$ los lados de un pentágono dado. Los lados $p, q$ y $r$ de un triángulo variable pasan por $d \cap e, c \cap d$ y $c \cap e$, respectivamente; quedando los vértices $q \cap r$ y $p \cap r$ sobre $a$ y $b$, respectivamente. Demostrar que el lugar geométrico descrito por el tercer vértice $p \cap q$ del triángulo, contiene a los cinco vértices del pentágono.

171 Problema de la mariposa:

Dos cuerdas $PQ$ y $RS$ de una circunferencia pasan por el punto medio $M$ de una tercera cuerda $AB$. Demostrar que la distancia de $M$ a los puntos de intersección de la recta $AB$ con las rectas $PS$ y $QR$ son iguales.

172 De una cónica se conocen cinco puntos, utilizar el Teorema de Pascal para construir más puntos de la misma.

173 La elipse que pasa por los vértices $A, B, C$ y que tiene su centro en el baricentro del triángulo $\widehat{ABC}$ se denomina elipse de Steiner y es la de menor área que pasa por $A, B$ y $C$. Ella tiene en común con con la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$ no sólo los puntos $A, B, C$ sino también el punto de Steiner.

174 Establecer que en todo triángulo circunscrito a una cónica las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos, concurren en un punto. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejgp895.pdf) (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1507.pdf)

175 Utilizar el caso límite del teorema de Brianchon, en el que el hexágono circunscrito a una cónica se reduce a un triángulo: "En todo triángulo circunscrito a una cónica, las rectas que unen los vértices con los puntos de contacto de los lados opuestos, concurren en un punto", para, conocidas las asíntotas, $r$ y $s$, y una tangente $t$ a un hipérbola, hallar gráficamente el punto de contacto de la hipérbola con la tangente.

Deducir de ésta construcción que el punto de contacto hallado, es el punto medio del segmento que la tangente determina con las asíntotas. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1425.pdf)

/ Applet CabriJava

176 Demostrar el recíproco del teorema de Pascal, a saber: "Si un hexágono $ABCDEF$ tiene tres pares de lados opuestos tales que se cortan en puntos de una misma recta, existe una cónica que pasa por sus seis vértices".

177 De una hipérbola se conoce las dos asíntotas y una tangente, demostrar que el punto de contacto con la tangente dada es el punto medio del segmento que ella determina con las asíntotas. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1423.pdf)

178 Dados dos rectas fijas $r$ y $s$ que se cortan en $O$ y una recta variable $\ell$, que corta a $r$ en $P$ y a $s$ en $Q$, de tal forma que el área el triángulo $\widehat{OPQ}$ es constante, demostrar que la envolvente de las rectas $\ell$ es una hipérbola de asíntotas $r$ y $s$. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1428.pdf) / Applet CabriJava

179 Consideremos una haz de cónicas y la siguiente correspondencia, a cada punto del plano $P$ le asociamos su conjugado respecto a todas las cónicas del haz. Estudiar esta correspondencia: ¿Para qué puntos está definida? ¿Qué puntos se transforman en sí mismos? ¿En qué se transforman los puntos de una recta?

Estudiar esta situación en el caso particular de las cónicas que pasan por $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ y $(2,2)$. ¿En qué se transforma la recta $y = mx$?

180 El área de un triángulo formado por las asíntotas de un hipérbola y una tangente a la hipérbola no depende de la tangente tomada. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg1426.pdf)

/ Applet CabriJava

(12-09-08)

181 Se dan un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto $P$ fijo. Por un punto $M$ variable se trazan paralelas a $AP$, $BP$ y $CP$ que cortan a $BC$, $AC$ y $AB$, respectivamente en $A_1$, $B_1$ y $C_1$. Si el área del triángulo $\widehat{A_1B_1C_1}$ está fijada, demostrar que el lugar geométrico que describe $M$ es una cónica.

182 La curva podaria de la parábola respecto al punto simétrico de su foco respecto a la directriz es la trisectriz de Maclaurin. (La curva podaria de una curva dada con respecto a un punto $P$, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares desde $P$ a cada recta tangente de la curva dada):

$$y^2 = \frac{(x+2a)^2(a-x)}{x+3a}.$$

183 Demostrar que la circunferencia de diámetro el segmento de tangente a una elipse comprendido entre las tangentes en los vértices del eje focal pasa por los focos.

184 Dadas la circunferencia $\mathcal{C}_1$ de centro en el origen y radio $a$ y la circunferencia $\mathcal{C}_2$ tangente al eje $OX$ en el origen y radio $b$ $(b \geq a)$, demostrar que las rectas, no paralelas al eje $OX$, que unen los puntos de corte de la circunferencia $\mathcal{C}_2$ con las rectas $x = \pm a$ son tangentes a $\mathcal{C}_1$.

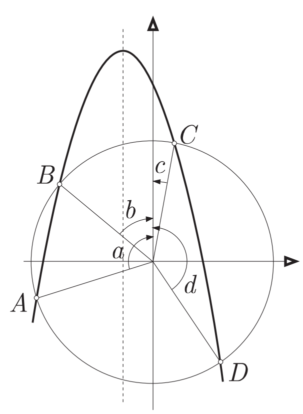
185 Dada la parábola tangente a las dos rectas $a$ y $b$ en los puntos $A$ y $B$, respectivamente. Sea $P$ el punto de intersección de dichas tangentes, demostrar que el punto medio $Q$ de la mediana en el triángulo $\widehat{PAB}$ que parte del vértice $P$, pertenece a la parábola y que la tangente en $Q$ es paralela al lado $AB$. Deducir de ello un método de construir un arco de parábola.

186 Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo formado por la intersección de tres tangentes a una parábola, pasa por su foco.

187 Cuatro puntos $A, B, C, D$ de una circunferencia se encuentran sobre una parábola $y = a_2x^2 + a_1x + a_0$ (de eje vertical) si sólo si

$$a + b + c + d = 0 \ (mod. 2\pi)$$

donde los ángulos son los formados por los puntos, el centro de la circunferencia y el "polo norte" (ángulos orientados, ver dibujo).




188 Si una elipse se mueve, permaneciendo tangente a una recta $t$ y tal que uno de los focos recorre otra $r$, perpendicular a la anterior, demostrar que su centro describe una circunferencia con centro en el punto de intersección de las rectas $r$ y $t$ y cuyo radio es igual al semieje mayor de la elipse.

189 Sea una cónica con centro $\mathcal{C}$, de centro $C$ y un punto $P$ del plano. Desde un punto $M$ de la cónica, se traza la tangente en $M$ a $\mathcal{C}$, luego la perpendicular a esta tangente pasando por $P$. Esta recta corta a $CM$ en $Q$.

El lugar geométrico de $Q$ cuando $M$ describe la cónica es una hipérbola equilátera pasando por $P$ y $C$ llamada hipérbola de Appolonio asociada a $\mathcal{C}$ y a $P$.

190 Considérese la cónica homóloga de una circunferencia en una homología armónica de centro en un punto $C$ de una circunferencia y eje $d$, entonces dicha cónica imagen es tangente a la circunferencia en $C$.

La imagen del centro $O$ de la circunferencia O en dicha homología es el punto $F$, denominado de Frégier y es el punto común a todas las cuerdas de la cónica vistas desde $C$ bajo un ángulo recto.

El lugar geométrico de los puntos de Frégier de una cónica con centro es una cónica homotética en una homotecia con el centro en la cónica. Para el caso de la parábola es una parábola trasladada.

191 Dados cuatro puntos en una cónica, cada tangente en ellos corta a las tangentes en los otros tres en tres puntos. La razón doble de estos cuatro puntos, sobre cada tangente, es la misma en las cuatro tangentes. / Applet CabriJava

192 Se consideran los triángulos que tienen un vértice fijo $P$ y están circunscritos a una circunferencia fija $\mathcal{C}$. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias circunscritas a dichos triángulos. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg
/ Applet CabriJava

193 Determinar la envolvente de las polares de los puntos de una parábola respecto a una cónica. / Applet CabriJava

194 Se consideran los pares de parábolas que pasan por tres puntos fijos y cuyos ejes forman un ángulo constante, determinar el lugar geométrico del cuarto punto de corte.

195 Dos tangentes a una parábola se cortan sobre la paralela a su eje por el punto medio de la cuerda que une los puntos de tangencia.

196 Dos vértices de un triángulo rígido en plano se deslizan por dos rectas fijas. ¿Qué lugar geométrico describe el tercer vértice?

197 Sobre una recta se fijan tres puntos $A, B$ y $C$. Los puntos $A$ y $B$ se deslizan sobre dos rectas perpendiculares fijas. Lugar geométrico del punto $C$. / Applet CabriJava

198 Dados el eje, el foco y un punto $P$ de una parábola se pide:

1) Obtener la parábola por puntos,

2) Obtener la tangente a ella desde un punto $T$ dado, determinando los puntos de tangencia.

199 Clasificar las siguientes cónicas:

$a)$ $4x^2 - 2xy + y^2 - 14x + 2y + 13 = 0,$ $b)$ $4y^2 + 4xy + 2x^2 - 8y - 2x + 9 = 0,$ $c)$ $y^2 + 2xy - 6x - 8y + 15 = 0.$

200 Clasificar según los valores de a la cónica $9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0$.

201 Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen $O$, eje de simetría la recta $x - y = 0$ y que pasa por $A(2, 0)$.

202 Dados cuatro puntos $A, B, C$ y $D$ y una recta $t$, determinar gráficamente los puntos de tangencia de las cónicas que pasan por los cuatro puntos dados y son tangentes a $t$. / Applet CabriJava

203 Demostrar que si dos ángulos constantes giran alrededor de sus vértices fijos $A$ y $B$, de manera que un par de lados se cortan sobre una recta, los otros lados se cortan sobre una cónica.

204 Si rayos luminosos procedentes de una fuente fija $F$ se reflejan sucesivamente sobre $n$ rectas del plano, los últimos rayos reflejados cortan a los rayos originales respectivos en puntos de una cónica, que es una circunferencia si $n$ es par y no lo es, si $n$ es impar. En el segundo caso existen dos puntos sobre la cónica en los cuales los rayos inicial y final se cortan según un ángulo dado. En el primer caso todos los rayos originales y finales se cortan bajo el mismo ángulo.

205 Se dan en el plano una recta $r$ y dos puntos $A$ y $B$ no contenidos en ella. Lugar geométrico de los puntos $P$, tales que las rectas $AP$ y $BP$ determinan en $r$ segmentos de longitud constante.

/ Applet CabriJava

206 Establecer que el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde el foco de una parábola a sus tangentes, es la tangente en el vértice (podaria de la parábola respecto a su foco). / Applet CabriJava

207 El lugar geométrico de las intersecciones de pares de tangentes perpendiculares a la parábola es la directriz.

208 La recta que pasa por el foco de una parábola y por el punto de intersección de la tangente con la directriz, es perpendicular a la recta que une el foco con el punto de contacto de la tangente con la parábola.

209 El lugar geométrico de los vértices de una parábola cuyo foco describe una circunferencia $\mathcal{C}$ y que permanece tangente a dos diámetros perpendiculares fijos de $\mathcal{C}$, es una astroide. / Applet CabriJava

210 Dada una parábola tangente a dos rectas perpendiculares fijas y su foco sobre una recta paralela a una de las anteriores. El lugar geométrico de su vértice es una cisoide. / Applet CabriJava

211 1735) Se dan tres puntos fijos $A, B$ y $C$, y dos rectas fijas $p$ y $q$ que se cortan en $D$. Se considera el triángulo variable $\widehat{PQR}$ con el vértice $P$ en $p$ y el $Q$ en $q$, el lado $PR$ pasando por $A$, el $QR$ por $B$ y el $PQ$ por $C$. Entonces el lugar geométrico del vértice $R$ es una cónica que pasa por los cinco puntos $A, B, C, D, M$ (punto de intersección de $p$ con $BC$) y $N$ (punto de intersección de $q$ y $AC$).

212 En una cónica consideramos dos puntos $A$ y $B$ y sus simétricos $A'$ y $B'$ respecto al eje focal. Sean $A''$ y $B''$ las proyecciones de $A$ y $B$ desde otro punto $P$ de la cónica sobre una recta $r$, perpendicular al eje focal. Entonces las rectas $A'B''$ y $A''B'$ se cortan en la cónica.

213 Dado un rectángulo $ABCD$, en el lado $AB$, se considera un punto variable $M$, y sea $N$ la intersección del lado $CD$ con la paralela por $M$ al lado $BC$. Sea $d$ una recta por $M$, que corta a $BC$ en $Q$. Sea, finalmente, $P$ el punto de intersección del lado $AC$ con la perpendicular por $N$ a $d \equiv MQ$. Se pide el lugar geométrico de $R$ punto de intersección de las rectas $PQ$, y $MN$.

214 En una parábola, la mediatriz de una cuerda variable pasando por su foco $F$ y la perpendicular al eje por su punto medio, determinan en el eje segmentos de longitud constante.

215 Dada una recta $r$ y una circunferencia $\mathcal{C}$, se traza la perpendicular por el centro a la recta y sea $R$ uno de los puntos de intersección de esta perpendicular con la circunferencia. Considérese un punto variable $M$ sobre la circunferencia y sea $A$ su proyección sobre $r$ y $B$ la intersección de $r$ con la recta $MR$, Establecer que el lugar geométrico del punto $P$ intersección de la recta $AR$ con la perpendicular por $B$ a $r$ es una parábola.

216 Construcción de una hipérbola punto a punto, dadas las longitudes de sus semiejes, utilizando su ecuación paramétrica $x = a \sec\theta, y = b \operatorname{tag}\theta$.

217 Supuesto un triángulo cualquiera $\widehat{ABC}$ y $P$ un punto de su plano, los tres conjugados armónicos de los pies de las cevianas $AP, BP$ y $CP$, respecto a los vértices del triángulo, están en una recta, denominada polar con relación al triángulo del punto $P$. Demostrar que las polares de los puntos de cualquier cónica circunscrita al triángulo, pasan por un punto fijo. Si se trata de la circunferencia circunscrita, dicho punto fijo es el simediano del triángulo.

218 El lugar geométrico de los polos respecto a un triángulo de las rectas de un haz cuyo vértice no está en los lados, es una cónica circunscrita al triángulo.

219 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las parábolas circunscritas a $\widehat{ABC}$ con sus tangentes paralelas al lado $BC$.

220 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo. Sea $A'$ un punto que se mueve en la mediatriz $\mathcal{L}$ del lado $BC$. Sea $B'$ el punto sobre la mediatriz del lado $CA$ tal que el triángulo $\widehat{CB'A}$ es semejante al $\widehat{BA'C}$, y sea $C'$ el punto sobre la mediatriz del lado $AB$ tal que el triángulo $\widehat{AC'B}$ es semejante al $\widehat{CB'A}$. Las tres rectas $AA', BB', CC'$ concurren en un punto, $P$. Cuando $A'$ recorre $\mathcal{L}$, el punto $P$ recorre la hipérbola de Kiepert del triángulo $\widehat{ABC}$, circunscrita y que pasa por su baricentro y ortocentro. / Applet CabriJava

221 Dada una recta $r$ en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$, que no coincide con los lados $BC, CA, AB$, y dado un punto $P$ que recorre $r$, el lugar geométrico del conjugado isogonal de $P$ es una cónica $\Gamma$ (denominada transformada isogonal de $r$) que pasa por los tres vértices $A, B, C$.

Si $r$ no interseca a la circunferencia circunscrita su transformada isogonal es una elipse.

Si $r$ es tangente a la circunferencia circunscrita, es una parábola.

Y si $r$ corta a dicha circunferencia, es una hipérbola, que es equilátera si $r$ pasa por el circuncentro.

/ Applet CabriJava

222 Demostrar que si cinco puntos de un hexágono quedan en una cónica y los tres puntos de intersección de los lados opuestos del hexágono están alineados, entonces el sexto punto está en la misma cónica.

223 Demostrar que el lugar geométrico de los polos de la recta del infinito respecto a las cónicas tangentes a cuatro rectas, es una recta que pasa por los puntos medios de las diagonales. / Applet CabriJava

224 Establecer que el lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los cuatro vértices de un cuadrivértice es una cónica que pasa por los puntos diagonales y por los punto medios de los lados. / Applet CabriJava

225 El lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices $A, B$ y $C$ de un triángulo y por su ortocentro $H = X_4$, es la circunferencia de los nueve puntos del triángulo, cuyo centro es $X_5$. / Applet CabriJava

226 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices $A, B$ y $C$ de un triángulo y por su incentro $I = X_1$ es el punto $X_{1125}$ (complemento del $X_{10}$ o centroide del $\{ABCX_1\}$).

Si $P$ y $U$ están alineados con el baricentro $G = X_2$, entonces $P$ es el complemento de $U$ si $G$ triseca al segmento $PU$ y está más cerca de $P$ que de $U$.

El centroide de cuatro punto $A, B, C, P$ es el complemento del complemento de $P$ con respecto al triángulo $\widehat{ABC}$. / Applet CabriJava

227 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices de un triángulo y por su circuncentro $X_3$ es el punto $X_{140}$ de ETC (punto medio de $X_3$ y el centro de la circunferencia de nueve puntos, $X_5$). / Applet CabriJava

228 El centro de la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas que pasan por los vértices de un triángulo y por su punto de Gergonne ($X_7$ en ETC) es el $X_{124}$.

Notas:

El punto de Gergonne es la intersección de las rectas que unen los vértices con los puntos de tangencia con el triángulo de la circunferencia inscrita.

$X_{124}$ es el complemento del Mittenpunkt $X_9$.

$X_{124}$ es el $X_9$ del triángulo medial.

$X_{124}$ es el baricentro de $\{X_1, X_4, X_7, X_{40}\}$.

$X_{40}$ es el punto de Bevan: punto de concurrencia de las perpendiculares desde los excentros a los respectivos lados. / Applet CabriJava

229 Las rectas que unen puntos conjugados en una involución sobre una cónica pasan por un mismo punto (polo de la involución).

230 Sean dados un haz de cónicas determinado por cuatro puntos distintos y una recta que no pasa por ninguno de ellos. Probar que el lugar geométrico de los polos de la recta respecto de las cónicas del haz es una cónica, la cual pasa por los once puntos siguientes:

a) los tres puntos diagonales del cuadrivértice base del haz.

b) los dos puntos de contacto de las cónicas que son tangentes a la recta dada.

c) los seis puntos conjugados armónicos respecto a los puntos base del haz de aquellos en que los seis lados del cuadrivértice que determinan cortan a la recta dada.

/ Applet CabriJava

231 La cónica que pasa por los tres vértices de un triángulo, por el circuncentro, y por el ortocentro, contiene al simediano y su centro es el $X_{125}$ de ETC.

232 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto $P$. Sean $X, Y$ y $Z$ los puntos de intersección de las rectas $BC$ y $AP$, $AC$ y $BP$, $AB$ y $CP$, respectivamente. $\mathcal{C}$ una cónica que pasa por $X, Y$ y $Z$ y sean $X', Y'$ y $Z'$ los otros puntos de intersección de la cónica con los lados $BC$, $AC$ y $AB$, respectivamente. Demostrar que las recta $AX'$, $BY'$ y $CZ'$ son concurrentes. / Applet CabriJava

233 Sea $P_1(u_1 : v_1 : w_1)$ y $P_2(u_2 : v_2 : w_2)$ las coordenadas trilineales de dos puntos respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, demostrar que la ecuación de la cónica que pasa por las 6 trazas de $P_1$ y $P_2$ (intersección de las cevianas con los lados) es:

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{x^2}{u_1u_2} - \left(\frac{1}{v_1w_2} + \frac{1}{v_2w_1}\right) yz = 0.$$

/ Applet CabriJava

234 Sean una cónica $\mathcal{C}$, $A$ y $B$ los puntos de corte de la cónica con un diámetro, $T$ un punto de la cónica, $t$ la tangente en $T$ y $P$ el punto de intersección de $t$ con el diámetro paralelo a $AT$. Establecer que el lugar geométrico de $P$, cuando $T$ varía, está en la tangente en $B$.

/ Applet CabriJava

235 De una cónica se dan un foco, un punto y una tangente. Lugar geométrico del segundo foco.

/ Applet CabriJava

236 Lugar geométrico de los puntos de intersección de tangentes a una parábola que forman un ángulo constante. / Applet CabriJava

237 La envolvente de las polares de los puntos de una circunferencia $\Gamma$ de centro en $C$, respecto de otra circunferencia $\Gamma_0$ de centro en $O$, es una cónica $\mathcal{C}$, denominada polar recíproca de $\Gamma$, respecto a $\Gamma_0$. Un foco de $\mathcal{C}$ es $O$ y la directriz correspondiente, es la polar de $C$. La cónica $\mathcal{C}$ es una elipse, parábola o hipérbola, según que el centro $O$ de $\Gamma_0$ sea interior a $\Gamma$, esté situado en ella o sea exterior. / Applet CabriJava

238 Dada cónica y un triángulo rectángulo inscrito en ella, sean pares de rectas que pasan por el vértice recto y son simétricas respecto a los catetos. Éstas cortan a la cónica en otros dos puntos, demostrar que las rectas que los unen pasan por el polo de la hipotenusa. / Applet CabriJava

239 Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo, $P$, $Q$ y $R$ puntos en los lados $BC$, $AC$ y $AB$, respectivamente. El lugar geométrico de los puntos de concurrencia $L$ de las cevianas para las cuales la cónica tritangente en $P$, $Q$ y $R$ es una parábola, es una elipse (denominada elipse de Steiner) circunscrita a $\widehat{ABC}$, cuya tangente en cada vértice es paralela al lado opuesto y cuyo centro es el baricentro de $\widehat{ABC}$.

/ Applet CabriJava

240 Consideremos las tres cónicas circunscritas a un triángulo $\widehat{ABC}$ y con centros en cada punto medio de los lados. Cada tres tangentes, en los vértices del triángulo, a cada cónica forman triángulos perspectivos con $\widehat{ABC}$. Los tres perspectores $P, Q$ y $R$, que así se obtienen, forman un triángulo $\widehat{PQR}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, con perspector el ortocentro de $\widehat{ABC}$.

Las tres cónicas se cortan, además de en los vértices $A$, $B$ y $C$, en tres puntos que forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con perspector el ortocentro del triángulo anticomplementario de lados paralelos a los de $\widehat{ABC}$ y que pasa por sus vértices. / Applet CabriJava

241 Sean $C$ y $D$ dos puntos fijos en el diámetro $AB$ de una circunferencia de centro $O$ y $GE$ una semicuerda paralela a dicho diámetro. Determinar el lugar geométrico de los puntos de intersección de las rectas $DG$ y $CE$. / Applet CabriJava

242 La polar de un vértice de un triángulo respecto a la elipse de diámetro el lado opuesto y que pasa por por los puntos medios de los otros lados, contiene al baricentro. / Applet CabriJava

243 Se consideran un triángulo $\widehat{ABC}$ y su triángulo medial $\widehat{A'B'C'}$. Por el baricentro común se trazan paralelas a los lados; estas seis rectas cortan a ambos triángulo en seis puntos. Se consideran las elipses circunscritas a estos hexágonos.

Las seis tangentes a la elipse correspondiente al triángulo medial desde sus vértices, se cortan en doce puntos, aparte de en los vértices:

– Seis de ellos, están, por pares, en las medianas y se verifica que el conjugado de cada par respecto al baricentro es un vértice del triángulo dado.

– Los otros seis puntos de intersección de las tangentes, están en la elipse correspondiente al triángulo $\widehat{ABC}$.

/ Applet CabriJava

244 Haz de parábolas que pasan por $A(2,2)$, tienen como tangente en este punto la recta $y = x$, y la polar de $O(0,0)$ es $x = 2$. Envolvente de sus directrices. Lugar geométrico de los focos. / Applet CabriJava

245 Sea la parábola $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$, determinar el foco y directriz. / Applet CabriJava

246 En un triángulo $\widehat{ABC}$, se toma el punto $M$, que divide al segmento $AC$ en la razón $t$, es decir, el baricentro se $A$ y $C$ afectados de las masas $1 - t$ y $t$, respectivamente, para un valor de $t$, comprendido entre cero y uno. Del mismo modo, se toman $N$ tal que divide a $BC$ en la misma razón $t$, y $P$, que divide a $MN$ en la razón $t$.

El lugar geométrico de $P$ cuando $t$ recorre $[0,1]$ es una parábola (curva de Bézier con tres puntos de control), tangente en $A$ a $AC$, en $B$ a $BC$ y en $P$ a $MN$. Además se tiene las siguientes igualdades de razones simples: cónicas

$$(A\,M\,C) = (M\,P\,N) = (C\,N\,B).$$

/ Applet CabriJava

247 Sea un cuadrilátero inscrito en una cónica. Los puntos de intersección de las tangentes en dos vértices opuestos y de los dos pares de lados opuestos, se cortan sobre una misma recta. / Applet CabriJava

248 Se dan un punto $O$, una recta $r$ y una cónica $\mathcal{C}$. Se considera un punto $P$ variable sobre la cónica, el punto $R$, intersección de las rectas $OP$ y $r$, y el punto $R$, armónicamente separado de $P$, respecto a $O$ y $Q$. Se pide el lugar geométrico del punto $Q$.

Si la recta se puntos medios de $O$ y $R$, corta a la cónica dada, el lugar geométrico es una hipérbola, Si es tangente, una parábola y si no la corta, es una elipse.

249 Las distancias $p$ y $q$ de dos puntos fijos $P$ y $Q$ a una recta variable están relacionadas por

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = D.$$

Demostrar que dichas rectas variables son tangentes a una cónica que tiene a la recta $PQ$ como eje de simetría.

250 En una elipse o hipérbola, el producto de distancias de los focos a sus tangentes, es constante.

Recíprocamente, si se tienen dos puntos fijos y una recta variable tal que el producto de distancias de los puntos a la recta es constante, la recta variable es tangente a una cónica.

/ Applet CabriJava

251 Si dos cónicas están inscritas en una cuadrado, los ocho puntos de contacto están en una cónica. / Applet CabriJava

252 Si dos cónicas están inscritas en un cuadrilátero, sus ocho puntos de contacto quedan en una cónica. / Applet CabriJava

253 La circunferencia circunscrita al triángulo formado por tres tangentes a una parábola, pasa por el foco de la parábola. / Applet CabriJava

254 Dados dos triángulos autopolares (cada vértice es el polo del lado opuesto) respecto a una cónica, demostrar por los seis vértices pasa una cónica. / Applet CabriJava

255 Sea $P$ un punto en una parábola distinto del vértice $V$, consideremos dos puntos $M$ y $N$ en la recta paralela al eje de la parábola por el punto $P$, equidistantes de éste. Si $A$ y $B$ son los puntos de la parábola en los que las rectas $VM$ y $VN$ la cortan, demostrar que que la recta $AB$ siempre es paralela a la tangente en $P$ a la parábola.

Establecer que $A$ y $B$ están armónicamente separados de $C$ y $D$, siendo $C$ la intersección de la recta $AB$ con el eje de la parábola y $D$ el punto de corte de la recta $AB$ con la recta $VP$.

256 En una parábola, la razón entre los segmentos que determinan tres tangentes fijas al intersecar una cuarta tangente, es independiente de esta cuarta tangente. / Applet CabriJava

257 Cuatro tangentes de una cónica intersecan a cualquier otra en cuatro puntos con la misma razón doble. / Applet CabriJava

258 Un triángulo rectángulo dado $\widehat{ABC}$ (ángulo recto en $A$), se hace deslizar sobre una recta $r$, apoyando sobre ella el cateto $AB$. Se considera un punto fijo $P$. La recta $AP$ corta a la hipotenusa $BC$, o a su prolongación, en un punto $M$. Establecer que el punto $M$ describe una hipérbola con una asíntota $r$ y otra paralela a la hipotenusa.

Esto nos da un método para construir una porción de hipérbola: El lado $AB$ de una cartabón se apoya en una regla. Una varilla se articula en $P$ y $A$. Un lápiz colocado en la intersección de la varilla con la hipotenusa describe un arco de hipérbola. / Applet CabriJava

259 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sea $\widehat{A'B'C'}$ un triángulo variable tal que $B'$ y $C'$ quedan en $CA$ y $AB$, respectivamente. Si los lados del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ son tangentes a una cónica $\mathcal{C}$, entonces el lugar geométrico de $A'$ es una cónica o una recta.

260 Dada una cónica $\mathcal{C}$ y una recta $d$, sean $P$ en la cónica, $Y$ en la recta, $X$ el otro punto de intersección de $PY$ con la cónica y $Z$ el conjugado armónico de $Y$ respecto a $P$ y $X$.

El lugar geométrico de $Z$ cn $P$ varía en la cónica $\mathcal{C}$ es la polar de respecto a dicha cónica.

El lugar geométrico de $Z$ cuando $X$ varía en la cónica $\mathcal{C}$ es otra cónica bitangente a la dada en el punto $P$, que pasa por el polo $D$ de la recta $d$ y por el punto de intersección de la recta $d$ y la cónica $\mathcal{C}$. / Applet CabriJava

261 Dado un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ (con ángulo recto en $A$), se consideran las parábolas circunscritas a dicho triángulo. Lugar geométrico de los puntos de tangencia de las rectas paralelas a la hipotenusa con las parábolas. / Applet CabriJava

262 Lugar geométrico de los centros de las cónicas tangentes a una recta $r$ en un punto $A$, tangentes a otra recta $s$ y que pasan por un punto $C$. / Applet CabriJava

263 Dada una elipse, se considera la elipse simétrica de la dada respecto a uno de sus vértices. Se hace rodar ésta última sobre la dada y se pide el lugar geométrico de los centros, de los focos y de los vértices de la elipse que rueda. / Applet CabriJava

264 Dada una hipérbola, se considera la hipérbola simétrica de la dada respecto a uno de sus vértices. Se hace rodar ésta última sobre la dada y se pide el lugar geométrico de los centros, de los focos y de los vértices de la hipérbola que rueda. (↻)

/ Applet CabriJava

265 Dada una parábola, se considera la parábola simétrica de la dada respecto a su vértice. Se hace rodar ésta última sobre la dada y se pide el lugar geométrico de los centros, de los focos y de los vértices de la parábola que rueda. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1957.pdf)

/ Applet CabriJava

266 Sean $M$ y $N$ los puntos medios tomados sobre dos lados cualesquiera del triángulo $\widehat{ABC}$. Sea $P$ un punto variable elegido en el otro lado. Se pide el lugar geométrico descrito por los ortocentros de $\widehat{MNP}$, cuando $P$ mueve sobre la recta que contiene al lado en el que se encuentra. / Applet CabriJava

267 Los extremos de un segmento, de longitud constante, están en dos rectas dadas, determinar el lugar geométrico descrito por el punto medio del segmento, cuando éste varía.

/ Applet CabriJava

268 Lugar geométrico del ortocentro de un triángulo cuando uno de los vértices recorre una recta. / Applet CabriJava

269 Dada una proyectividad entre dos rectas, no paralelas, en el plano, demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de puntos homólogos es una hipérbola de asíntotas paralelas a las rectas dadas.

270 Soit un cercle (c) fixe de centre O, deux diamètres perpendiculaires [AA'] et [BB'] et M un point qui décrit le cercle sauf les points A et A'.

On projette orthogonalement le point M sur le segment [BB'] en K et on appelle P le point d'intersection des droites (OM) et (AK).

Montrer que le lieu du point P est la parabole de foyer O et directrice (D), tangente au cercle en A, privée de son sommet.

271 Dadas una cónica $\mathcal{C}$ y una recta $\delta$, para cada punto $M$ de $\delta$ se considera el punto $P$, intersección de la perpendicular a $\delta$ por $M$ con la polar de $M$, respecto a $\mathcal{C}$. Entonces, el lugar geométrico de $P$, cuando $M$ varía en $\delta$, es una cónica que pasa por el polo de $\delta$ y pertenece al haz de cónicas formado por $\mathcal{C}$ y la cónica degenerada producto de $\delta$ y el diámetro conjugado con la dirección perpendicular a $\delta$.

272 Una parábola de foco $F$ y de directriz $d$ es la envolvente de las rectas que pasan por un punto $D$ variable de $d$ y bisecan al ángulo formado por $DF$ y $d$. / Applet CabriJava

273 Sean $O(r)$ una circunferencia de centro $O$ y radio $r$ y $a$ y $b$ dos tangentes a ella. Consideremos una tangente variable que corta en $P$ y $Q$ a las tangentes $a$ y $b$, respectivamente. Obtener una ecuación de la proyectividad que lleva $P$ en $Q$.

274 Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, una recta $\ell$ que pasa por un punto $P$ y $\delta$ la recta homotética de $\ell$ mediante la homotecia de centro $A$ y razón $-2$. Ésta corta a $AC$ en $A'$. Sean los puntos $B' = \ell \cap A'B$, $C' = \ell \cap A'A$. Entonces el punto medio $M'_a$ de $B'C'$ describe una hipérbola, cuando $\ell$ gira alrededor de $P$. Además, las rectas $A'M'_a$ pasan por un punto fijo que está en la hipérbola.

/ Applet CabriJava

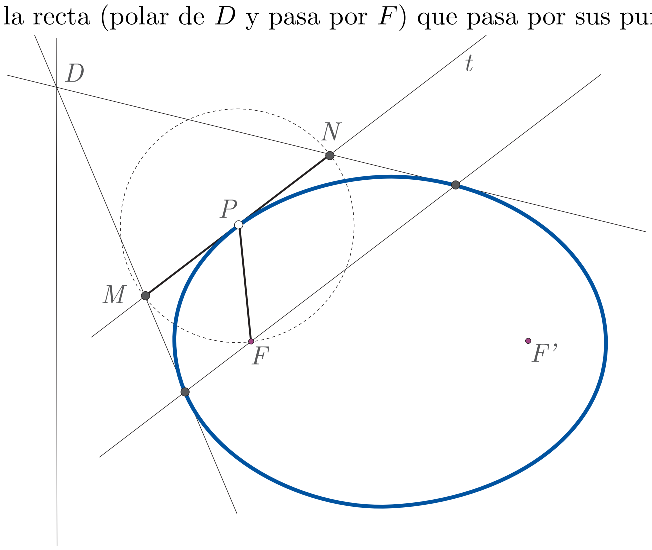
275 Construir un cónica, por puntos, de la que se conocen cuatro puntos y la tangente en uno de ellos. / Applet CabriJava

276 Los centros de las cónicas (hipérbolas equiláteras) que pasan por el incentro y los tres exincentros de un triángulo de un triángulo, están en la circunferencia circunscrita. / Applet CabriJava

277 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, determinar la ecuación, en coordenadas baricéntricas referidas a dicho triángulo, de la parábola de vértice $A$ y directriz $BC$. / Applet CabriJava

278 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean $\Gamma$ la circunferencia circunscrita y $H$ el ortocentro. El lugar geométrico de las mediatrices de los segmentos $PH$, cuando $P$ varía en $\Gamma$ es una cónica inscrita en $\widehat{ABC}$, conocida como la cónica de MacBeath. El punto medio de $PH$ describe la circunferencia de Euler o de los nueve puntos. / Applet CabriJava

279 Sobre la tangente $t$ a una cónica de punto de contacto $P$, se toman los puntos $M$ y $N$, tales que $PM = PN = PF$ (donde $F$ es un foco); entonces, las tangentes (distintas de $t$) desde $M$ y $N$ a la cónica se cortan en un punto $D$ de la directriz relativa a $F$. Además, la recta (polar de $D$ y pasa por $F$) que pasa por sus puntos tangencia es paralela a $t$.




280 La hipérbola dada por dos de sus puntos $A$ y $B$, su centro $O$ y la asíntota paralela a la bisectriz $b$ de $\widehat{ABA'}$ ($A'$ es el simétrico de $A$ respecto a $O$), es equilátera y la tangente en $B$ es la simétrica de $BO$ respecto a $b$.

281 El segmento de tangente a una cónica, cuyos extremos son el punto de contacto y el punto de intersección con la directriz, es visto desde el foco bajo un ángulo recto. / Applet CabriJava

282 Dados cuatro puntos $A, B, C, D$ en plano, de tal forma que no haya tres en una misma recta; sean $d$ la polar trilineal de $D$ respecto al triángulo $\widehat{ABC}$ y $P$ un punto en ella. Demostrar que el lugar geométrico, cuando $P$ varía en $d$, del polo de la recta $DP$ respecto a la cónica que pasa por $A, B, C, D, P$ es la cónica inscrita a $\widehat{ABC}$, tangente a los lados en los puntos de intersección con las rectas $AD, BD$ y $CD$. / Applet CabriJava

283 Dadas las cónicas $\mathcal{C}_\lambda :\ 2\lambda xy + 1 = 0$ y $\mathcal{C} :\ 2xy + 1 = 0$, determinar $t$ para que las polares de los puntos de $\mathcal{C}_\lambda$, respecto a $\mathcal{C}$, sean tangentes a $\mathcal{C}_\lambda$ y, así mismo, las polares de los puntos de $\mathcal{C}$ respecto a $\mathcal{C}_\lambda$, sean tangentes a $\mathcal{C}$. / Applet CabriJava

284 Las cónicas que pasan por un punto fijo y tienen a un triángulo como autopolar, pasan por otros tres puntos fijos.

285 Una recta corta a una cónica $\mathcal{C}$ en dos puntos $P$ y $Q$; sea $M$ el punto medio de la cuerda $PQ$. Sean otras dos cuerdas de $\mathcal{C}$, $DE$ y $FG$, que contienen a $M$, y una cónica $\mathcal{H}$ que pasa por $D, E, F$ y $G$ y corta a la recta $PQ$ en $U$ y $V$. Sean $R$ y $S$ los puntos de corte de la polar de $M$, respeto a $\mathcal{C}$, con las rectas $DE$ y $FG$. Demostrar que $M$ también es el punto medio de $UV$. (Teorema de la mariposa)

286 Si M es un punto variable de una cónica y $B$ y $C$ son dos puntos conjugados respecto a dicha cónica; $BM$ y $CM$ cortan de nuevo a la cónica en los puntos $P$ y $Q$. Demuéstrese que $PQ$ pasa por un punto fijo (el polo de $BC$). / Applet CabriJava

287 Dada una circunferencia $\Gamma$ y un punto $A$ (exterior) hallar la polar recíproca del lugar geométrico de los centros de los circunferencias circunscritas a los infinitos triángulos autopolares de vértice $A$, con respecto a la homológica de la circunferencia $\Gamma$, en la homología de centro $A$, eje la polar de $A$ (resp. a $\Gamma$) y recta límite de la primera figura la tangente paralela a la polar de $A$, no comprendida entre este punto y su polar. Polar del punto $A$ respecto a la homológica de la circunferencia. / Applet CabriJava

288 Dada una rectas $\ell$ en el plano del triángulo $\widehat{ABC}$, se le asocia su recta de Newton $\ell'$, definida así: la recta $\ell$ corta a los lados $BC$, $CA$ y $AB$, respectivamente en $D$, $E$ y $F$; entonces, los puntos medios $A'$ de $AD$, $B'$ de $BE$, $C'$ de $CF$ están alineados sobre $\ell'$.

Establecer que $\ell'$ tiene la dirección del eje de la parábola tangente a los lados del triángulo $\widehat{ABC}$ y a $\ell$. / Applet CabriJava

289 Una cónica $\mathcal{C}$ tiene las siguientes propiedades:

(1) Contiene al punto $(0, 1)$

(2) La polar del punto del infinito de la recta $y = 2x$, respecto a $\mathcal{C}$, es la recta $r:\ y = 0$.

(3) La involución inducida por $\mathcal{C}$ en la recta $r$ está dada por $(t, 0) \mapsto \left(\dfrac{1-2t}{2}, 0\right)$.

Determinar los puntos de intersección de $\mathcal{C}$ con $r$ y las tangentes en ellos. Ecuación de la cónica. / Applet CabriJava

Resp. Parábola: $3y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$.

290 Dada una cónica $\mathcal{C}$ y un punto $P$, determinar el lugar geométrico del punto medio del par de puntos en que una recta variable, que pasa por $P$, corta a la cónica. / Applet CabriJava

291 Ecuación de la cónica con centro en $(1, 1)$, tal que $y = 1$ es un eje y la polar del punto $(2, 2)$ es la recta $x+y-3 = 0$.

Resp. Elipse: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

292 Demostrar que los centros de las cónicas que pasan por cuatro puntos cocíclicos están en una hipérbola equilátera.

293 En el plano afín, dotado de una referencia $\{O; \vec{i}, \vec{j}\}$, se considera la hipérbola equilátera $\mathcal{H}$ de ecuación $y = \dfrac{1}{x}$, Sea $P$ un punto de $\mathcal{H}$, $Q$ el simétrico de $P$ respecto de $O$ y $\Gamma$ la circunferencia de centro en $P$ y radio $PQ$. Se denota por $A$ y $B$ los dos puntos de intersección de $\Gamma$ con la rama de $\mathcal{H}$ que contiene a $P$. Se denota por $C$ el segundo punto de intersección de $\Gamma$ con la rama de $\mathcal{H}$ que contiene a $Q$ (puede coincidir con $Q$). Demostrar que $\widehat{ABC}$ es un triángulo equilátrero.

294 ean $a$ y $b$ dos números reales positivos tales que $A \neq b$. En una referencia ortonormal se considera una elipse $\mathcal{E}$ de ecuaciones paramétricas:

$$x = a\cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad (t \in \mathbb{R})$$

y cuatro puntos $A_1, A_2, A_3$ y $A_4$ de esta elipse d eparámetros respectivos $t_1, t_2, t_3$ y $t_4$. Entonces se tiene que $A_1, A_2, A_3$ y $A_4$ son cocíclicos si y sólo si $t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ es un múltiplo entero de $2\pi$.

295 Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y una recta $\ell$ que pasa por $A$, sea $A'$ el punto de intersección de $\ell$ con la paralela a $AB$ por $C$ y $M$ un punto sobre $\ell$. Demostrar que la paralela por $A$ a $CP$ y la paralela por $A'$ a $BP$ concurren en un punto $Q$ sobre la recta $BC$.

Demostrar que, cuando $P$ varía, las rectas $PQ$ son tangentes a la hipérbola de asíntotas $\ell$ y $BC$, la cual es tangente a $AC$ en el punto medio de $A$ y $C$ y a $BA'$ en el punto medio de $B$ y $A'$. Realmente, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos medios del segmento $PQ$. / Applet CabriJava

296 Cónica osculatriz en el punto $(0, 1)$ a la circunferencia de centro en el origen y radio $r = 1$, y tangente a las rectas $x = 1$ e $y = -4$.

297 Determinar la envolvente de las cueradas comunes de una parábola y sus circunferencia osculatrices.

298 Dada una hipérbola $\mathcal{H}$ y una cónica $\mathcal{C}$ tangente a sus asíntotas, demostrar que dos de las cuerdas comunes a ambas cónicas son paralelas a la recta que pasa por los puntos de tangencia de la cónica $\mathcal{C}$ con las asíntotas.

299 La polar recíproca de la parábola de un haz bitangente, respecto a cada cónica del haz, pasa por el centro de ésta.