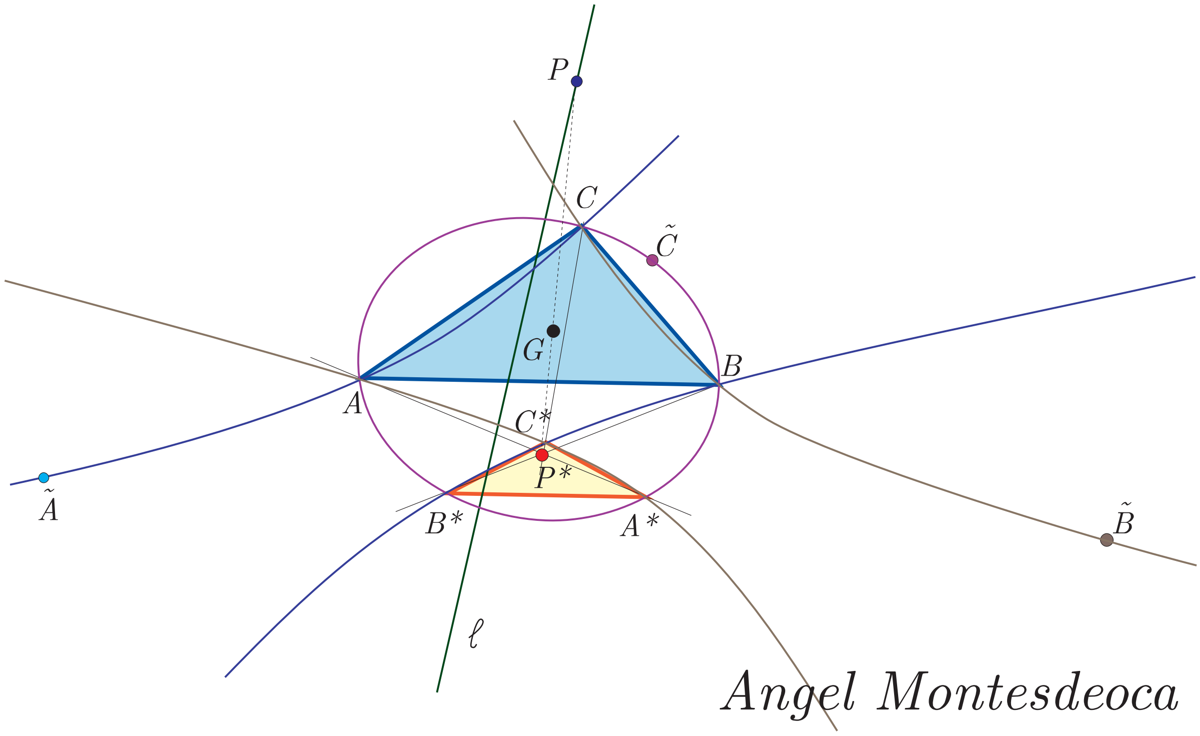
Complemento de un punto como perspector de triángulos perspectivos



Angel Montesdeoca

Complemento de un punto como perspector de dos triángulo perspectivos

ANGEL MONTESDEOCA

Se da una interpretación del complemento de un punto P respecto a un triángulo $\widehat{ABC}$, como el centro de perspectividad de éste y un triángulo cuyos vértices son puntos de intersección de ciertas cónicas circunscritas.

⊛ *Introducción*

Quim Castellsaguer ([1]) en su página virtual Todo Triángulos Web, en el apartado de construcciones geométricas (entrada c30) da un método para construir un triángulo del que se sabe que uno de sus lados está sobre una recta ℓ, los otros dos lados pasan por sendos puntos dados y del que se conoce también su baricentro.

Supongamos ahora que la recta ℓ varía, girando sobre uno de sus puntos, ocurre entonces que el vértice del triángulo pedido (que no está en la recta ℓ) describe una cónica que pasa por los tres puntos dados. Nos planteamos entonces el siguiente estudio:

Sean dados tres puntos A, B y C, que forman un triángulo, y otro punto P de su plano. Para cada recta ℓ que pasa por P, construimos el triángulo con un lado en ℓ, con los otros dos pasando por B y C, respectivamente, y tal que su baricentro sea A. Al variar ℓ, el vértice de dicho triángulo (que no está en ℓ) describe una cónica $\mathcal{C}_a$, circunscrita a $\widehat{ABC}$. Análogamente, se construye el triángulo con un lado en ℓ y los otros dos pasando por C y A, respectivamente, y tal que su baricentro sea B y sea $\mathcal{C}_b$ la correspondiente cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$, descrita por el vértice que no está en ℓ. De forma similar, al considerar que C sea el baricentro del triángulo a construir, se tiene la cónica circunscrita $\mathcal{C}_c$.

Cada par de cónicas descritas tienen un punto común, además de los A, B y C, que denotamos por

$$A^* \in \mathcal{C}_b \cap \mathcal{C}_c, \qquad B^* \in \mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_a, \qquad C^* \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b.$$

Resulta entonces que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son perspectivos y el centro de perspectividad (perspector) P^* es el complemento de P respecto al triángulo $\widehat{ABC}$.

⊛ Preliminares

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, sean G su baricentro y P un punto en su plano. Q es el **complemento**[1] (o "**inferior**", en notación de Paul Yiu[3, pág. 101], también conocido como "subordinado" o "imagen medial") respecto a $\widehat{ABC}$ si Q, G, P están alineados en este orden y $PG = 2GQ$. Es decir, Q es la imagen de P en la homotecia $h_{\{G;-1/2\}}$ de centro G y razón $-1/2$. Se dice, además, que P es el **anticomplemento** del punto Q respecto $\widehat{ABC}$.

Si $(u : v : w)$ son las coordenadas baricéntricas de P, respecto a $\widehat{ABC}$, entonces las de su complemento son $(v + w : w + u : u + v)$; pues como se tiene

$$\frac{GQ}{QP} = -\frac{1}{3},$$

al tomar coordenadas normalizadas

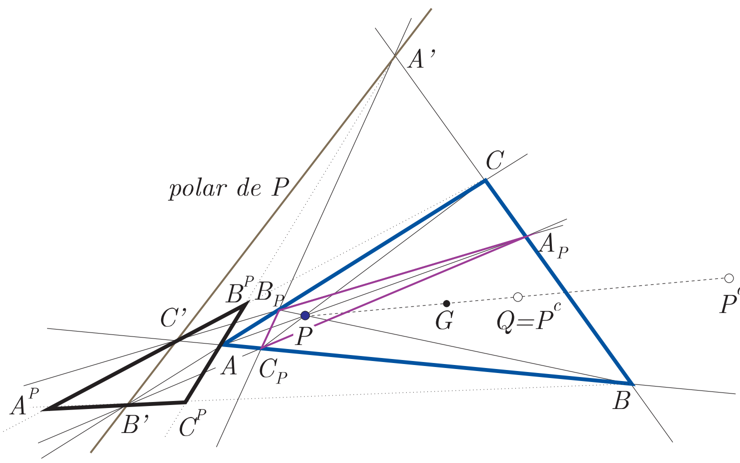
$$P(3u : 3v : 3w), \qquad G(u + v + w : u + v + w : u + v + w),$$

las coordenadas de Q son

$$Q\left(3(u + v + w) - 3u : 3(u + v + w) - 3v : 3(u + v + w) - 3w\right).$$

Análogamente se obtienen que las coordenadas baricéntricas del anticomplemento son

$$P^a(-u + v + w : u - v + w : u + v - w).$$



La polar trilineal (o **tripolar**) del punto P respecto al triángulo $\widehat{ABC}$ es el eje de perspectividad del triángulo $\widehat{ABC}$ y el triángulo ceviano $A_P\widehat{B_P}C_P$ de P (cuyos vértices son los pies de las cevianas de P).

Como los pies de las cevianas de P tienen por coordenadas baricéntricas

$$A_P(0 : v : w), \qquad B_P(u : 0 : w), \qquad C_P(u : v : 0),$$

[1]Puede consultarse una relación de varios complementos de "triangles centers" en: http://mathworld.wolfram.com/Complement.html

los puntos de corte de los lados homólogos de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $A_P\widehat{B_P}C_P$ son

$$BC \cap B_PC_P = A'(0 : v : -w),\; CA \cap C_PA_P = B'(-u : 0 : w),\; AB \cap A_PB_P = C'(u : -v : 0),$$

y la ecuación de la tripolar de P es:

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0.$$

El polo trilineal (o tripolo) de una recta, respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, es el punto tal que su polar trilineal es la recta dada. Si la recta pasa por un vértice, su polo es dicho vértice.

Como el tripolo de la recta de ecuación $px + qy + rz = 0$ es

$$\left(\frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r}\right),$$

el lugar geométrico de estos puntos, cuando la recta varía, girando alrededor de P, es

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} + \frac{w}{z} = 0 \qquad \text{ó} \qquad uyz + vzx + wxy = 0.$$

Se trata de una cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ (que coincide con la circunferencia circunscrita si $P(a^2 : b^2 : c^2)$ que es el simediano), cuyas tangentes en los vértices son las rectas:

$$t_a = AA' \equiv wy + vz = 0, \qquad t_b = BB' \equiv uz + wx = 0, \qquad t_c = CC' \equiv vx + uy = 0.$$

Es decir, los lados del triángulo preceviano $A^P\widehat{B^P}C^P$ de $\widehat{ABC}$ ($\widehat{ABC}$ es triángulo ceviano de $A^P\widehat{B^P}C^P$ respecto a P).

Se tiene que las cuaternas siguientes son armónicas:

$$(A\,B\,C_P\,C'),\quad (B\,C\,A_P\,A'),\quad (C\,A\,B_P\,B'),\qquad (A\,A_P\,P\,A^P),\quad (B\,B_P\,P\,B^P),\quad (C\,C_P\,P\,C^P).$$

△
▽

⊛ ***Diversas construcciones de un triángulo***

Consideremos el siguiente problema de construcción de triángulos:

> Dadas tres puntos P, Q y G y una recta ℓ, existe un único triángulo con baricentro en G, con dos de sus vértices en la recta ℓ y tal que los lados que pasan por el otro vértice (denotado por $\tilde{A}$) pasan por P y Q, respectivamente.

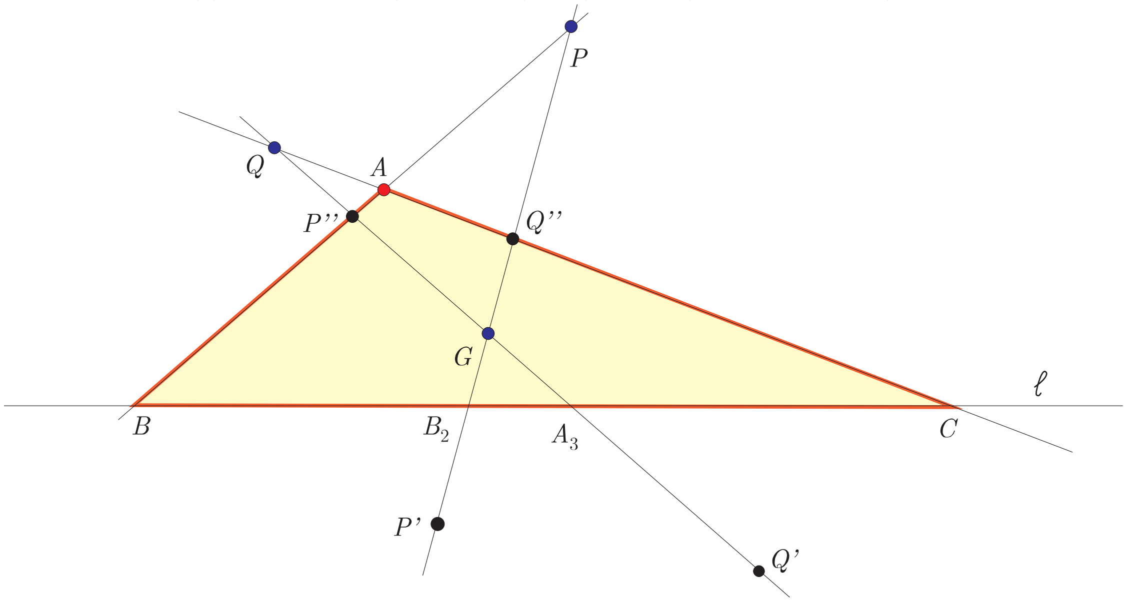
Normalmente si se desconocen o no se tienen presentes ciertas propiedades y fórmulas de geometría y, en particular, relativas a triángulos, atacar un problema de construcción de un triangulo, del que se conocen en general al menos tres datos, suele ser complicado. Un posible camino a seguir podría ser el de considerar un triángulo que verifique algunas de las condiciones impuestas y hacerlo variar con el fin de encontrar el triángulo pedido. Esto genera ciertos lugares geométricos, que al estudiarlos pueden sugerir la construcción definitiva. Para ello se puede recurrir a ciertos programas informáticos de geometría interactiva para visualizar el problema y ayudar así a encontrar una demostración de la construcción.

He aquí distintas construcciones de tal triángulo:

PRIMERA:

Quim Castellsaguer ([1]) da el siguiente método de construcción:

http://www.xtec.es/ qcastell/ttw/ttwesp/construccions/c30.html



1) La recta ℓ corta a GP en B_2 y GQ en A_3.

2) Sean P' el armónico de G respecto P y B_2, y Q' el armónico de G respecto Q y A_3.

3) Sean Q'' el homotético de P' respecto G con razón $-1/2$, y P'' el homotético de Q' respecto G con razón $-1/2$.

4) QQ'' es la recta AC y PP'' es la recta AB.

SEGUNDA:

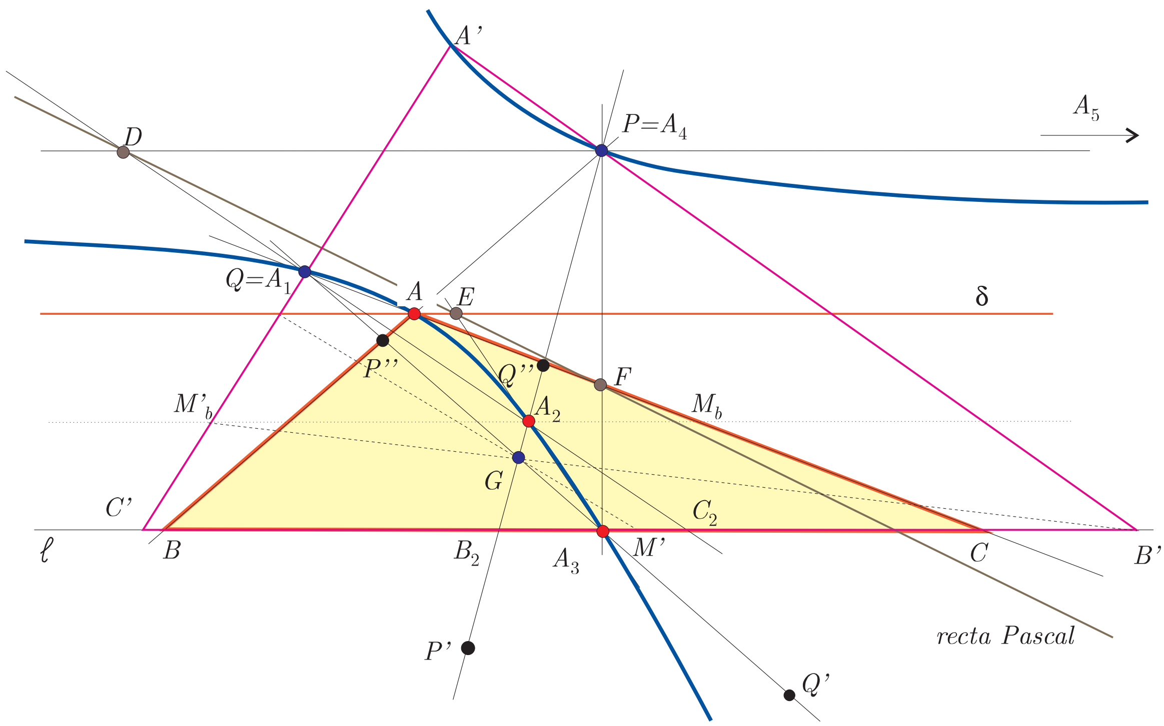
Solución, al considerar un vértice variable en ℓ:

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2120.pdf

Sean ℓ la recta dada que ha de contener al lado BC, una recta variable por P que corta a ℓ en B', y M'_b el homotético de B' en la homotecia $h_{\{G;\,-1/2\}}$ de centro en el baricentro G (del triángulo a construir) y razón $-1/2$. La recta QM'_b corta a BC en C'.

La correspondencia $PB' \mapsto QC'$ es una proyectividad. Ya que resulta de la composición de las proyectividades siguientes: primera, a cada recta PB', que pasan por P, se le asocia el punto B' en ℓ; segunda, a los puntos B' de ℓ se le asocia las rectas GB', que pasan por G; tercera, a cada recta GB' le corresponde el punto M'_b sobre la recta homotética de ℓ, mediante la homotecia $h_{\{G;\,-1/2\}}$; y cuarta, se proyectan los puntos M'_b desde Q.

Los puntos $A' = PB' \cap QC'$, de intersección de rectas homólogas, describen una cónica $\mathcal{C}$ que pasa por P y Q. Para que el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ sea la solución buscado, su vértice A' debe estar, además de en la cónica, en la recta δ homotética de ℓ en la homotecia $h_{\{G;\,2\}}$. Dicha recta δ y la cónica $\mathcal{C}$ tienen en común el punto impropio de ℓ, pues ℓ y δ son paralelas y la recta que pasa por P y es paralela a ℓ tiene como homóloga, en la proyectividad, la recta paralela por Q.



Podemos determinar el otro punto A común de δ y $\mathcal{C}$, tan solo con conocer cinco puntos que determinan $\mathcal{C}$. Podemos tomar como tales puntos los siguientes:

$A_1 = Q$, $A_2 = h_{\{G;\,-1/2\}}(B_2)$ $(B_2 = PG \cap \ell)$, $A_3 = QG \cap \ell$, $A_4 = P$ y A_5 el punto impropio de ℓ.

Para buscar A (sexto punto de $\mathcal{C}$ en la recta δ que pasa por A_5), consideremos la recta de Pascal que pasa por los puntos

$$D = A_1A_2 \cap A_4A_5, \quad E = A_2A_3 \cap \delta.$$

Sea $F = DE \cap A_3A_4$, entonces $A = A_1F \cap \delta$. Los otros dos vértices de $\widehat{ABC}$ son $B = AP \cap \ell$ y $C = AQ \cap \ell$.

Discusión de la solución en función de la posición de los puntos P, Q y G:

• Si P, Q y G están alineados, la proyectividad en cuestión es un perspectividad, ya que la recta PQ se corresponde en la proyectividad. Por tanto, el lugar de los puntos de intersección de las rectas homólogas es el producto de dos rectas: una es la recta PQ y la otra resulta ser una recta paralela a ℓ. La primera corta a δ en A y ocurre entonces que A, B y C están alineados: el triángulo $\widehat{ABC}$ no existe. La segunda no corta a δ. Por tanto no hay solución en este caso.

• Si PQ es paralela a ℓ, la proyectividad también es una perspectividad y el lugar geométrico de los puntos de intersección de rectas homólogas consta de la recta PQ (que no corta a δ) y de la recta A_2A_3 de la figura, siendo $A_3 = QG \cap \ell$ y A_2 el homotético de $B_2 = PG \cap \ell$, mediante la homotecia $h_{\{G;\,-1/2\}}$. Con lo que el triángulo $\widehat{ABC}$ solución tiene como vértices

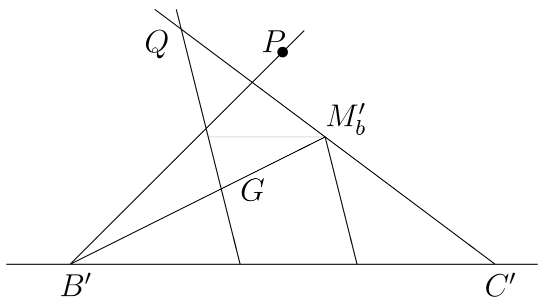
$$A = E = A_2A_3 \cap \delta, \quad B = PA \cap \ell, \quad C = QA \cap \ell.$$

Si ambos P y Q están en δ, no hay solución.

• Si P está sobre la recta δ, el vértice A coincide con P, $C = PQ \cap \ell$ y B es el punto de intersección de ℓ con la recta que pasa por P y por el punto homotético de C mediante la homotecia $h_{\{C;-1/2\}}$.

Lo mismo ocurre si es Q el que está en δ.

Para establecer, analíticamente, que la correspondencia $PB' \mapsto QC'$ es una proyectividad, podemos tomar un sistema de coordenadas afines con un eje en la recta ℓ y tal que $G(0,g)$, $Q(0,q)$ y $P(p_1,p_2)$. Si $B'(t,0)$ es un punto variable en ℓ, el punto M'_b, imagen de B' mediante la homotecia $h_{\{G,-1/2\}}$, tiene de coordenadas $M'_a(t/2, 3g/2)$.



Entonces tenemos las ecuaciones de las rectas

$$PB' \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p_1 & p_2 & 1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \; QM'_a \equiv \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ t & 3g & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

El punto $C' = \ell \cap QM'_a$ es $C'(qt/(2q-3g), 0)$. Por lo que la ecuación de la proyectividad es

$$t' = \frac{qt}{2q-3g}.$$

El lugar geométrico (cónica) de las rectas homólogas, se obtiene eliminando t entre sus ecuaciones, y resulta la hipérbola:

$$gx(3p_2 - 3y) = p_2qx + p_1qy + p_2xy - 2qxy - p_1y^2.$$

<u>TERCERA</u>:

Solución obtenida al considerar un vértice variable en la recta δ, homotética a ℓ mediante la homotecia $h_{\{G,2\}}$:

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2125.pdf

Sea ℓ la recta que ha de contener al lado BC y δ la recta homotética a ℓ en la homotecia de centro G y razón 2. Sobre δ ha de estar el vértice A del triángulo buscado.

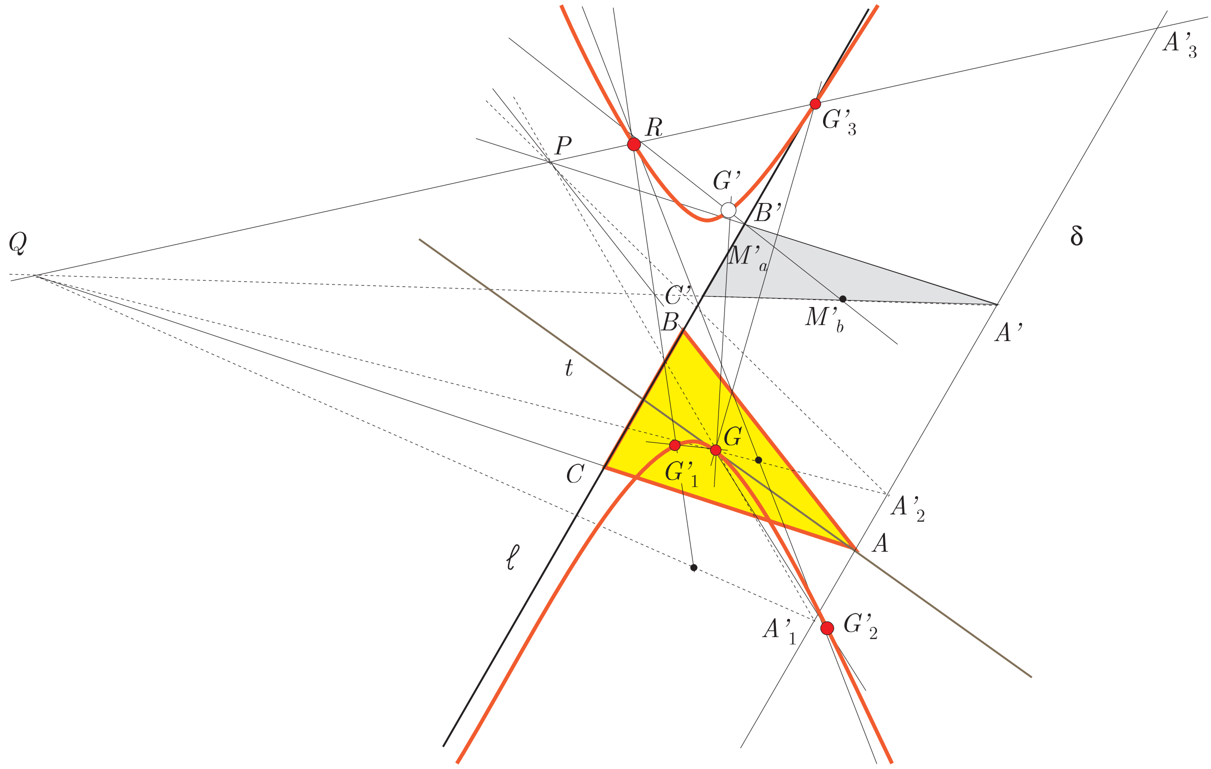
Sea A' un punto en δ, $B' = PA' \cap \ell$ y $C' = QA' \cap \ell$. Debemos encontrar la posición de A' para que el triángulo $\widehat{A'B'C'}$ sea el buscado.

La recta que une B' con el punto medio M'_b de $A'C'$, corta a la recta que une G con el punto medio M'_a de $B'C'$, en el punto G'. El lugar geométrico que describe G' pasa por G (cuando A' es el vértice buscado), con lo que basta con determinar la tangente a tal lugar geométrico en G y su intersección con δ nos da el vértice A; los otros vértices serán $B = AP \cap \ell$ y $C = Q \cap \ell$.

Como la recta $B'M'_b$ pasa por un punto fijo R en PQ (cuando A' varía en δ) y la correspondencia

$$GG' \longmapsto RG'$$

es una proyectividad entre las rectas que pasan por G y las que pasan por R, se sigue que el lugar geométrico descrito por G' es una cónica; además, que como cuando A' es el punto del infinito de δ, GG' y RG' son paralelas, la cónica es un hipérbola con una asíntota paralela a la recta ℓ dada.



La cónica pasa por los puntos base G y R de la proyectividad, y por los puntos siguientes, al considerar posiciones particulares de A' en δ:

Si $A'_1 = PG \cap \delta, B'_1 = PG \cap \ell, C'_1 = QA'_1\ell$, M'_{a1} punto medio de $B'_1C'_1$ y M'_{b1} punto medio de $A'_1C'_1$, entonces

$$G'_1 = GM'_{a1} \cap B'_1M'_{b1} \quad \text{está en la cónica.}$$

Si $A'_2 = QG \cap \delta, B'_2 = PA'_2 \cap \ell, C'_1 = QG\ell$, M'_{a2} punto medio de $B'_2C'_2$ y M'_{b2} punto medio de $A'_2C'_2$, entonces

$$G'_2 = GM'_{a2} \cap B'_2M'_{b2} \quad \text{está en la cónica.}$$

Si $A'_3 = PQ \cap \delta, B'_3 = C'_3 = PQ \cap \ell, C'_1 = QA'_1\ell$, $M'_{a3} = B'_3$ y M'_{b3} punto medio de $A'_3B'_3$, entonces

$$G'_3 = GB'_3 \cap B'_3M'_{b3} = B'_3 \quad \text{está en la cónica.}$$

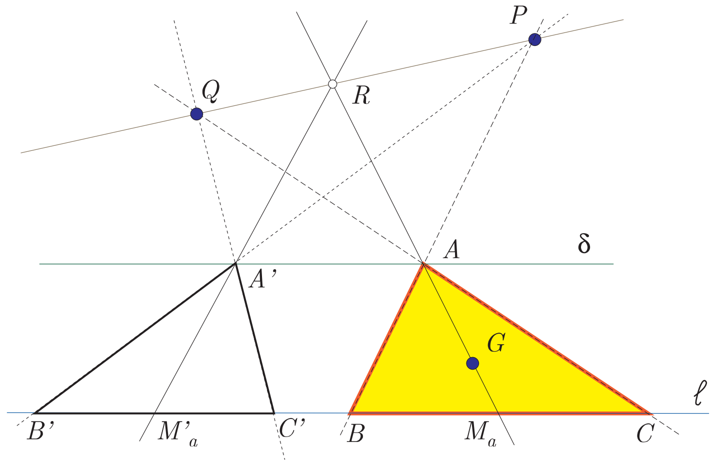
Por lo que la hipérbola queda determinada por los cinco puntos G, R, G'_1, G'_2 y G'_3.

Para determinar la tangente t en G, podemos usar el Teorema de Pascal aplicado al pentágono $GRG'_1G'_2G'_3$: La recta de Pascal pasa por los puntos $GR \cap G'_2G'_3$ y $RG'_1 \cap G'_3G$. El punto de intersección de ella con $G'_1G'_2$ da un punto de la tangente t en G.

<u>CUARTA</u>: Una construcción muy sencilla

El estudio hecho en los métodos de construcción anteriores nos motiva para hacer la siguiente:

Sea ℓ la recta dada, que ha de contener al lado BC, y δ la recta homotética a ℓ en la homotecia de centro G y razón -2 (ℓ y δ son paralelas). Sobre δ ha de estar el vértice A del triángulo buscado.



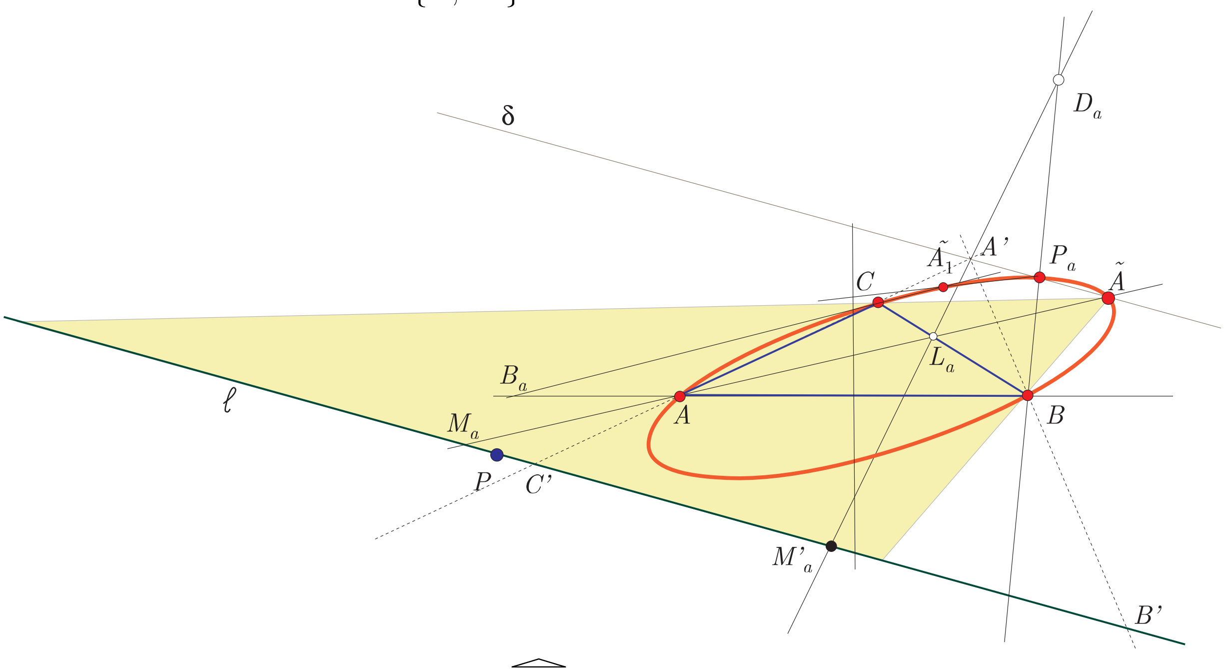
Al proyectar un punto A' de δ desde P y Q sobre ℓ, nos dan dos puntos B' y C', respectivamente. Entonces las medianas del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ cortan a la recta PQ en tres puntos fijos, cuando A' varía en δ.

Si R es el punto fijo por donde pasan las medianas desde A', o sea si R es el punto de intersección de PQ con $A'M'_a$ (M'_a, punto medio de $B'C'$). El vértice A del triángulo buscado es la intersección de RG con δ. Los otros vértices son $B = AP \cap \ell$ y $C = AQ \cap \ell$.

$\triangle$
∇

⊛ ***Cónicas circunscritas a un triángulo relativas a un haz de rectas.***

Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo y una recta ℓ. Designamos por δ la recta paralela a ℓ, homotética de ésta mediante la homotecia $h_{\{A;\,-2\}}$ de centro A y razón -2.



Consideremos todos los triángulos $\widehat{A'B'C'}$ con el vértice A' en δ, el lado $B'C'$ sobre ℓ y los lados $A'B'$ y $A'C'$ pasando por B y C, respectivamente, ocurre entonces que la mediana por A' pasa por un punto fijo L_a en la recta BC, cuando A' varía en δ.

En consecuencia, de estos triángulos el de baricentro A, tiene uno de sus vértices en $\delta \cap AL_a$, que denotamos por $\tilde{A}$.

Si ahora hacemos girar la recta ℓ, alrededor de uno de sus puntos P, vamos a determinar el lugar geométrico del correspondiente vértice $\tilde{A}$ que se obtiene.

Sea, en particular, el triangulo $\widehat{A'B'C'}$, con $A' = AC \cap \delta$, y sea M'_a el punto medio de $B'C'$. Cuando la recta ℓ varía, las rectas $A'M'_a$ pasan por un punto fijo D_a.

Sea $P_a = h_{\{A;\,-2\}}(P)$. Para cada recta δ por P_a, sea ℓ su recta paralela por P y el punto L_a en BC, considerado arriba, entonces la correspondencia

$$\delta \longmapsto AL_a$$

que asocia a una recta por P_a otra por A, es una proyectividad, pues es composición de las siguientes proyecciones y secciones:

$$\delta \in P_a \longmapsto A' \in AC \longmapsto L_a \in BC \longmapsto AL_a \in A.$$

Es decir, dada una recta δ que pasa por el punto fijo P_a, se le asocia su punto de corte A' con la recta fija AC; luego, a éste punto A' se le hace corresponder el punto L_a en la recta fija BC, proyectando desde el punto fijo D_a; finalmente, se proyecta L_a desde A.

En esta proyectividad, los puntos $\tilde{A} = \delta \cap AL_a$, de intersección de rectas homólogas, determinan una cónica $\mathcal{C}_a$, que pasa por los puntos base A y P_a. Además pasa por B y C, puntos que se obtienen cuando δ pasa por B y C, respectivamente.

Cuando δ pasa por A, la recta AL_a correspondiente es la tangente en A; por tanto, la tangente en A es la recta AD_a. Esta tangente es la recta que une A con el punto de corte de la tripolar de P, respecto a $\widehat{ABC}$, con su lado BC. Es decir, la tangente en este vértice, a la cónica circunscrita lugar geométrico de los tripolos de las rectas por P o lo que es lo mismos el lado B^PC^P del triángulo preceviano $\widehat{A^PB^PC^P}$ de $\widehat{ABC}$.

Con estos cinco datos (cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ que pasa por P_a y se conoce su tangente en A) la cónica $\mathcal{C}_a$ es fácilmente construible por puntos.

La cónica $\mathcal{C}_a$ puede ser determinada por cinco puntos: cuatro de ellos son A, B, C y P_a. Para determinar un quinto punto, podemos tomar, en particular la recta $\ell_1 = PB$, con lo que B va a ser uno de los vértice del triángulo a determinar, luego $\tilde{A}_1$, punto de intersección de la recta CB_a ($B_a = h_{\{A;\,-1/2\}}$) con la paralela a $\ell_1 = PA$ por P_a, está en $\mathcal{C}_a$.

De forma similar, considerando como baricentro los otros vértices de $\widehat{ABC}$, se obtienen las cónica circunscritas $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$, que pasan por $P_b = h_{\{B;\,-2\}}(P)$ y $P_c = h_{\{C;\,-2\}}(P)$, respectivamente, y tienen tangentes en B y C, respectivamente, las mismas que la cónica lugar de los tripolos de las rectas que pasan por P.

Cada par de cónicas descritas tienen un punto común, además de A, B y C, que denotamos por

$$A^* \in \mathcal{C}_b \cap \mathcal{C}_c, \qquad B^* \in \mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_a, \qquad C^* \in \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b.$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

> Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A^*B^*C^*}$ son perspectivos y el centro de perspectividad (perspector) P^* es el complemento de P respecto al triángulo $\widehat{ABC}$.

Para establecer este hecho podemos utilizar MATHEMATICA para hacer los cálculos. Primeramente vamos a obtener la ecuación de la cónica $\mathcal{C}_a$ en coordenadas baricéntricas referidas al triángulo $\widehat{ABC}$, teniendo en cuenta que está circunscrita a dicho triángulo y que pasa por los puntos P_a y $\tilde{A}_1$, descrito anteriormente.

Si $P(u:v:w)$, entonces las coordenadas de P_a son $(u+3v+3w:-2v:-2w)$, pues

$$\frac{AP_a}{P_aP}=-\frac{2}{3}, \qquad P_a \equiv 3(u+v+w:0:0)-2(u:v:w).$$

La ecuación de la recta paralela por P_a a $PB \equiv wx-uz=0$, es decir, con el mismo punto impropio $(u:-u-w:w)$, es

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ u & -u-w & w \\ u+3v+3w & -2v & -2w \end{vmatrix} = 0.$$

Como $BB_a:B_aA=3:-1$, $B_a(3:-1:0)$, y por tanto $B_aC \equiv x+3y=0$. Así el punto $\tilde{A}_1$ de $\mathcal{C}_a$, se determina resolviendo estas últimas ecuaciones:

```
Solve[{Det[{{x,y,z},{u,-u-w,w},{u+3v+3w,-2v,-2w}}]==0,x+3y==0},{x,y}]
```

que da

$$\tilde{A}_1(-3(u+3w):u+3w:3w).$$

Para obtener la ecuación de la cónica $\mathcal{C}_a$ circunscrita a $\widehat{ABC}$, $pyz+qzx+rxy=0$, que pasa por P_a y $\tilde{A}_1$, eliminamos p,q y r entre la ecuación general de una cónica circunscrita y las que resultan de particularizar en ella estos dos puntos:

```
Eliminate[{p*y*z+q*z*x+r*x*y==0,3w(u+3w)p-9w(u+3w)q-3(u+3w)^2r==0,
                4v*w*p-2w(u+3v+3w)q-2v(u+3v+3w)r==0},{p,q}]
```

obteniéndose

$$\mathcal{C}_a \equiv (u+3v+3w)yz+vzx+wxy=0.$$

A esta misma ecuación se llega si procedemos a determinar el lugar geométrico de un punto genérico $\tilde{A}$ de $\mathcal{C}_a$, como hemos descrito antes; es decir, tomamos una recta arbitraria ℓ por $P(u:v:w)$ de ecuación $px+qy+rz=0$ y sea δ la recta paralela por $P_a(u+3v+3w:-2v:-2w)$ a ℓ (ambas tienen el mismo punto impropio, $(q-r:r-p:p-q)$):

$$\delta \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ q-r & r-p & p-q \\ -u+v+w & -2v & -2w \end{vmatrix} = 0.$$

Tomemos los puntos $A'=AC\cap\delta$, $C'=AC\cap\ell$ y $B'=A'B\cap\ell$:

$$A'(2qv+r(u+v+3w)-p(u+3(v+w)):0:2(pv-qv+pw-rw)), \qquad C'(r:0:-p),$$

$$B'(q(2qv+r(u+v+3w)-p(u+3v+3w)):(p-r)(-2(qv+rw)+p(u+3(v+w))): \\ 2q(p(v+w)-qv-rw)).$$

Las coordenadas del punto medio M'_a de $B'C'$, se determinan teniendo en cuenta que $B'M'_a = M'_aC'$ y que las sumas de las coordenadas de C' es $r-p$ y las de B' da

$$2q(pv-qv+pw-rw)+q(2qv+r(u+v+3w)-p(u+3(v+w)))+(p-r)(-2(qv+rw)+p(u+3(v+w))).$$

$$M'_a\Big(p(q+r)(u+3(v+w))-2(q^2v+r^2w+qr(u+2v+2w)):$$
$$-(p-r)(-2(qv+rw)+p(u+3(v+w))):2q(qv+rw)+p(q(u+v-w)+2rw)-p^2(u+3(v+w))\Big).$$

El punto fijo $L_a = A'M'_a \cap BC$, por donde ha de pasar la mediana por el vértice A' de $\widehat{A'B'C'}$ es

$$L_a\Big(0:-2qv-r(u+v+3w)+p(u+3(v+w)):pu-qu+3pv-3qv+3pw-qw-2rw\Big).$$

Finalmente, las coordenadas del punto $\tilde{A}$

$$x = -2q^2v(u+3v+w)-2r^2w(u+v+3w)-qr(u^2+4uv+3v^2+4uw+14vw+3w^2)-$$
$$p^2(u+3(v+w))^2+p(u+3(v+w))(q(u+5v+w)+r(u+v+5w)),$$
$$y = (-(qv)-rw+p(v+w))(-2qv-r(u+v+3w)+p(u+3(v+w))),$$
$$z = (pv-qv+pw-rw)(pu-qu+3pv-3qv+3pw-qw-2rw).$$

Eliminando p, q y r entre estas ecuaciones y $pu+qv+rw=0$, se obtiene de nuevo

$$\mathcal{C}_a \equiv (u+3v+3w)yz+vzx+wxy=0.$$

Análogamente, se obtienen las ecuaciones de las cónicas circunscritas $\mathcal{C}_b$ y $\mathcal{C}_c$:

$$\mathcal{C}_b \equiv (v+3w+3u)zx+wxy+uyz=0.$$

$$\mathcal{C}_c \equiv (w+3u+3v)xy+uyz+vzx=0.$$

Si intersecamos dos a dos estas cónicas, además de los puntos comunes A, B, C, tienen los siguientes puntos:

$$A^* = \mathcal{C}_b \cap \mathcal{C}_c\ \big(-u(u+v)(u+w):(u+w)(3u^2+v^2+3vw+w^2+4u(v+w)):$$
$$(u+v)(3u^2+v^2+3vw+w^2+4u(v+w))\big)$$

$$B^* = \mathcal{C}_c \cap \mathcal{C}_a\ \big((v+w)(u^2+4uv+3v^2+3uw+4vw+w^2):$$
$$v(u+v)(v+w):(u+v)(u^2+4uv+3v^2+3uw+4vw+w^2)\big)$$

$$C^* = \mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_b\ \big(-(v+w)(u^2+3uv+v^2+4uw+4vw+3w^2):$$
$$-(u+w)(u^2+3uv+v^2+4uw+4vw+3w^2):w(u+w)(v+w)\big)$$

Las rectas AA^*, BB^* y CC^* tienen como punto común el de coordenadas baricéntricas:

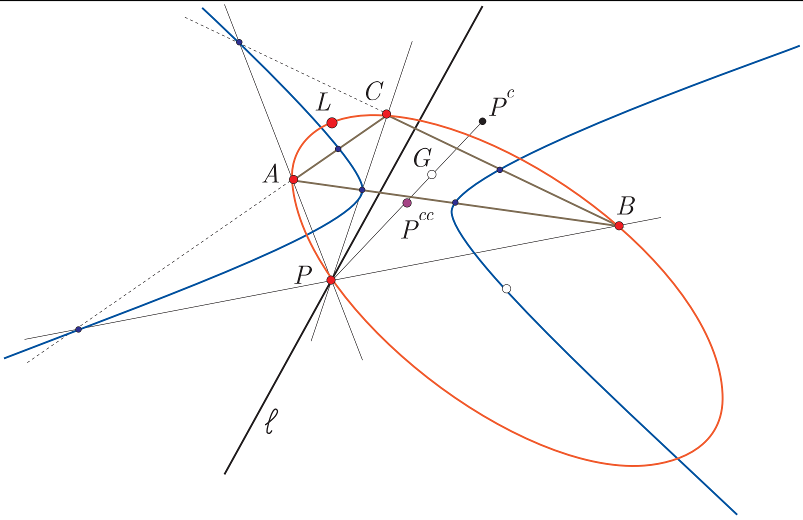
$$(v+w:w+u:u+v),$$

que son las del complemento de $P(u:v:w)$, respecto a $\widehat{ABC}$.

⊛ *Una interpretación geométrica del complemento del complemento*

A parte de que el baricentro de los cuatro puntos A, B, C, P es el complemento del complemento de P con respecto al triángulo $\widehat{ABC}$, está esta otras interpretación geométrica:

> Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto P en su plano, sea L el tripolo de una recta ℓ por P y $\mathcal{C}_\ell$ la cónica circunscrita a $\widehat{ABC}$ y que pasa por P y L. Denotamos por $\mathcal{C}_P$ la cónica lugar geométrico de los centros de las cónicas $\mathcal{C}_\ell$, cuando ℓ varía.
> Entonces, el centro de $\mathcal{C}_P$ es el complemento del complemento de P.



Si ℓ pasa por un vértice su polo es este vértice, por lo que cónica $\mathcal{C}_\ell$ degenera en el producto de un lado por una recta que une el vértice opuesto con P: $\mathcal{C}_P$ pasa por los pies de las cevinas de P.

Si $(u : v : w)$ son las coordenadas baricéntricas de P respecto a $\widehat{ABC}$, las cónicas $\mathcal{C}_\ell$ pertenecen pues al haz de cónicas:

$$\lambda x(wy - vz) + \mu y(wx - uz) = 0.$$

Para determinar los centros de estas cónicas (polos respecto a ellas de la recta del infinito $x + y + z = 0$), debemos resolver las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0 & w(\lambda+\mu) & -\lambda v \\ w(\lambda+\mu) & 0 & -\mu u \\ -\lambda v & -\mu u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$x = -\frac{\mu u - \lambda v + \lambda w + \mu w}{2\lambda(\lambda+\mu)vw}, y = -\frac{-\mu u + \lambda v + \lambda w + \mu w}{2\mu(\lambda+\mu)uw}, z = -\frac{\mu u + \lambda v + \lambda w + \mu w}{2\lambda\mu uv}.$$

Eliminando λ y μ, resulta:

$$vwx^2 + uwy^2 + uvz^2 - w(u+v)xy - v(u+w)xz - u(v+w)yz = 0.$$

Que es una cónica que pasa por los pies de las cevianas de P y del baricentro G (puntos medios de los lados). Su centro es

$$(2u + v + w : u + 2v + w : u + v + 2w),$$

que son las coordenadas del complemento del complemento P^{cc} de P ($PP^{cc} : P^{cc}G = 3 : 1$).

Ejemplos de complemento del complemento de algunos puntos de Clark Kimberling.- The Encyclopedia of Triangle Centers–ETC

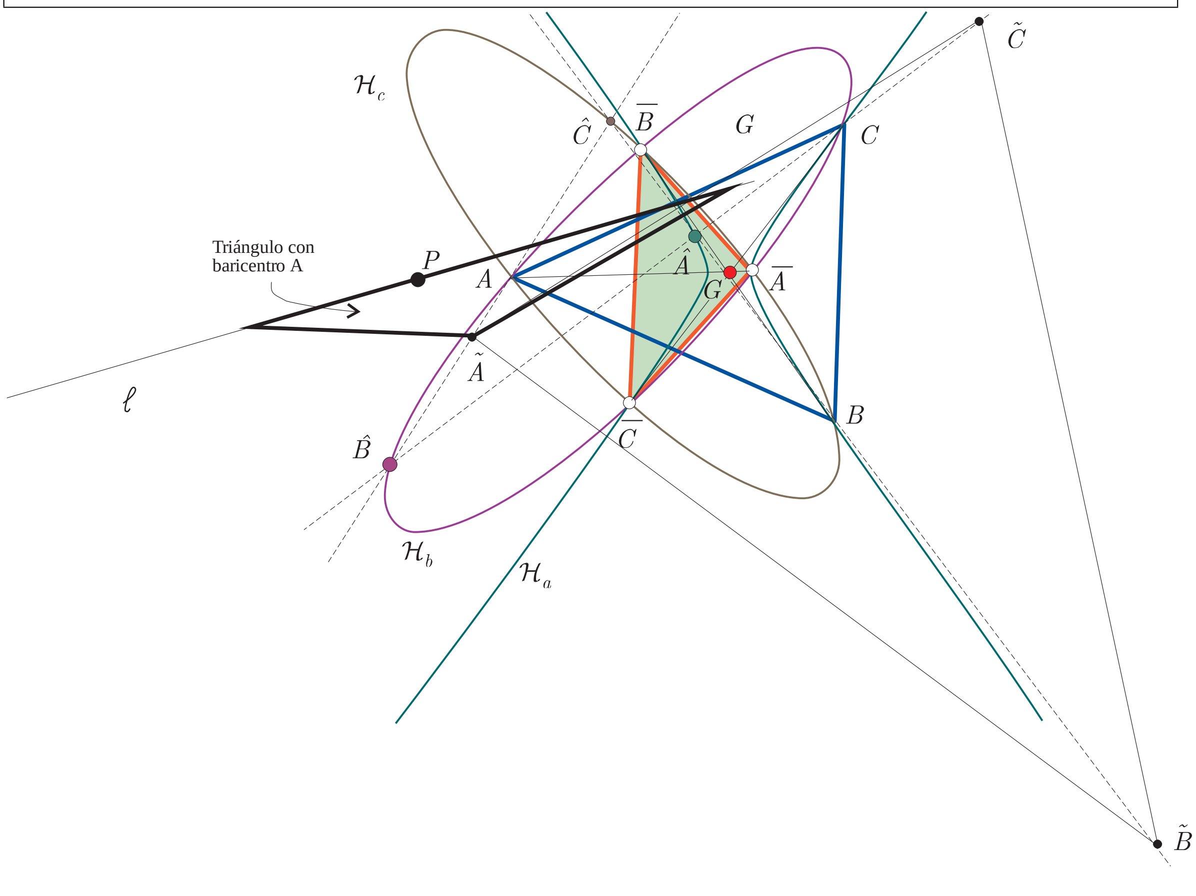
$X_1 \mapsto X_{1125}$, $X_2 \mapsto X_2$, $X_3 \mapsto X_{140}$, $X_4 \mapsto X_5$, $X_7 \mapsto X_{142}$, $X_8 \mapsto X_{10}$, $X_{20} \mapsto X_3$, $X_{69} \mapsto X_{141}$, $X_{144} \mapsto X_9$, $X_{145} \mapsto X_1$, $X_{616} \mapsto X_{118}$, etc.

⊛ ***Adenda***

Con las notaciones de la sección de la página 9, los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}$ no son perspectivos, en general, para una recta ℓ por P. Sin embargo, existen tres posiciones de esta recta para la que dichos triángulos son perspectivos:

Consideremos los puntos $\widehat{A} = B\tilde{B} \cap C\tilde{C}$, $\widehat{B} = C\tilde{C} \cap A\tilde{A}$ y $\widehat{C} = A\tilde{A} \cap B\tilde{B}$. Cada uno de estos puntos genera una cónica, cuando ℓ gira alrededor de P; denotemos estas cónicas por $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, respectivamente. Ocurre entonces que $\mathcal{H}_a$ pasa por los puntos B y C, $\mathcal{H}_b$ pasa por A y C y $\mathcal{H}_c$ pasa por A y B. Además:

> Las cónicas $\mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$ tiene tres puntos comunes $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ y se tiene que los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$ son perspectivos, con centro de perspectividad el baricentro G de $\widehat{ABC}$.



Los puntos $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ (donde coinciden los puntos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$) son centros de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}}$, para posiciones particulares de la recta ℓ.

⊛ ***Referencias***

[1] **Quim Castellsaguer**.- Todo Triángulos Web, Pág. WEB:

`http://www.xtec.es/~qcastell/ttw/ttwesp/portada.html`

[2] **Angel Montesdeoca**.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas. Algunos tópicos, Pág. WEB:

`http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf`

[3] **Paul Yiu**.- Introduction to the Geometry of the Triangle, 2002; Pág. WEB:

`http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html`