Curvas paramétricas

Angel Montesdeoca

Jueves 8 de Mayo del 2008

1 a) Decir cuáles de las curvas siguientes son regulares:

$i)\ \vec{\alpha}(t) = (\cos t, 1 - \cos t - \operatorname{sen} t, -\operatorname{sen} t) \quad ii)\ \vec{\beta}(t) = (2\operatorname{sen} 2t, 2\operatorname{sen} 2t \operatorname{tag} t, 0) \quad iii)\ \vec{\gamma}(t) = (\cos t, \cos 2t, \operatorname{sen} t)$

b) Hallar la tangente a cada una de ellas en $t = \pi/4$. / Applet CabriJava

2 Una hélice circular es una curva cuya curvatura y torsión son constantes y no nulas. Determinar la hélice circular que tiene un orden de contacto máximo en $(0,0,0)$ con la cúbica de ecuaciones $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$.

3 Calcular la longitud del arco de la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$ que se encuentra dentro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x = 0$. (⟳)

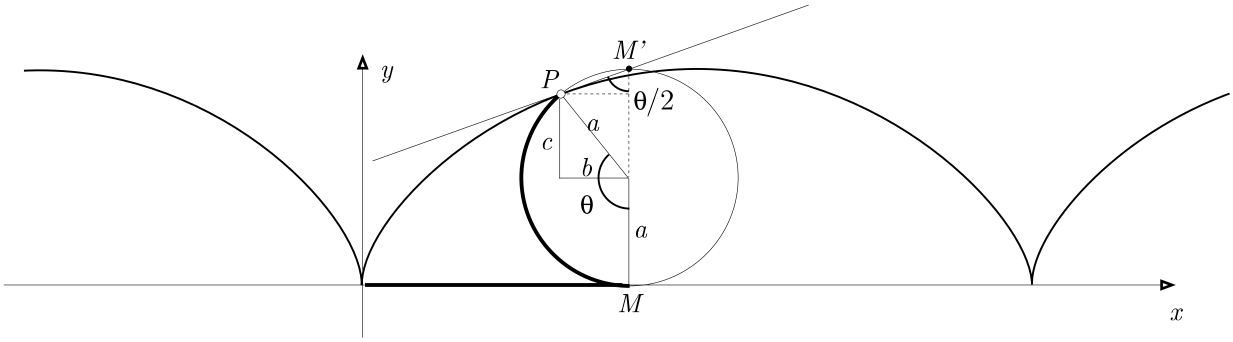
La cardioide es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sin deslizar sobre otra del mismo radio.

/ Applet CabriJava

4 Una cicloide es una curva plana, trayectoria de un punto fijo en una circunferencia, que rueda, sin deslizarse, sobre una recta. Establecer que una representación paramétrica de la cicloide es $\vec{\alpha}(\theta) = (a(\theta - \operatorname{sen}\theta), a(1 - \cos\theta))$.

Parametrizarla con el parámetro arco y determinar sus puntos singulares.

Probar que la recta tangente a la cicloide por un punto P regular viene determinada por los puntos P y M', siendo M' el punto diametralmente opuesto al punto M de contacto de la circunferencia con la recta donde rueda).



/ Applet CabriJava

5 Sea la representación paramétrica de la hélice circular $\vec{\alpha}(t) = (a\cos t, a\operatorname{sen} t, bt) \quad 0 < t < \pi$. Encontrar un cambio de parámetro que nos de, a partir de ésta, la representación:

$$\vec{\beta}(u) = \left(a\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2au}{1+u^2}, 2b \operatorname{arctg}\ u\right) \qquad 0 < u < \infty$$

Establecer que estas dos representaciones son equivalentes.

6 Dada la curva $\mathcal{C}$ de ecuaciones implícitas $x^2 + y^2 = x,\ \operatorname{tag} z = y/x$, obtener una parametrización (tomando como parámetro $t = y/x$).

Comprobar que $x = \cos^2 u, y = \operatorname{sen} u \cos u, z = u$ es también una parametrización de $\mathcal{C}$. Hallar la relación entre los parámetros t y u.

Calcular la longitud de arco s correspondiente al intervalos $[0,t]$. Obtener $s = s(t)$ y $t = t(s)$.

Dar representaciones paramétricas con parámetro arco s, utilizando las relaciones obtenidas en los apartados anteriores.

7 Hallar la longitud de arco de la curva: $x = 2a(1 + \cos t), \quad y = 2a(1 + \operatorname{sen} t), \quad z = a\sqrt{5}t$, comprendido entre los puntos correspondientes a $t = 0$ y $t = 2\pi$.

8 Trayectoria que seguirá un perro al perseguir a un gato que corre en línea recta.

La curva llamada tractriz tiene la propiedad de que la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia y el punto de cruce con el eje Oy es constante, a.

Probar que la curva

$$\vec{\alpha}(t) = \left(a \operatorname{sen} t, \pm a\left(\cos t + ln\left(\operatorname{tag}(\frac{t}{2})\right)\right)\right), \qquad 0 < t \leq \frac{\pi}{2}$$

es una tractriz. ¿Cuál es el significado geométrico del parámetro t?

/ Applet CabriJava

9 Consideremos la espiral logarítmica $\vec{\alpha}(t) = (e^t \operatorname{sen} t, e^t \cos t, 0)$. Probar que el ángulo entre $\vec{\alpha}(t)$ y $\vec{\alpha}\,'(t)$ es constante.

10 Los extremos de un segmento de longitud fija c, se deslizan por los ejes coordenados. Desde el origen de coordenadas se traza una perpendicular a dicho segmento, que lo corta en el punto P. Parametrizar la trayectoria descrita por el punto M (esta trayectoria se llama rosa de los cuatro pétalos). / Applet CabriJava