Encontrar la curvatura y centro de curvatura de la cónica $x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4 = 0$ en el punto $(0, 1)$.

SOLUCIÓN:

Damos tres formas de resolver el problema: la primera, utilizando una haz de cónicas osculatrices; la segunda, mediante la fórmula que da la curvatura de una curva plana; y la tercera, mediante una construcción geométrica, usando una homologia que transforma la cónica en una circunferencia.

• Se trata de calcular la circunferencia con máximo contacto con la cónica en $(0, 1)$.

La tangente en el punto dado $(0, 1)$ es $3x - 5y + 5 = 0$ y una recta arbitraria por $(0, 1)$, tiene por ecuación $mx - y + 1 = 0$.

El haz de cónicas teniendo tres puntos de contacto con la cónica dada en $(0, 1)$ está dado por (cónicas osculatrices)

$$u(x^2 - 2xy + y^2 - x + 3y - 4) + v(3x - 5y + 5)(mx - y + 1) = 0,$$

o bien

$$(u + 3w)x^2 - (2u + 3v + 5w)xy + (u + 5v)y^2 + (-u + 3v + 5w)x + (3u - 10v)y - 4u + 5v = 0,$$

donde $w = mv$. Ésta representa una circunferencia si

$$u + 3w = u + 5v, \qquad 2u + 3v + 5w = 0.$$

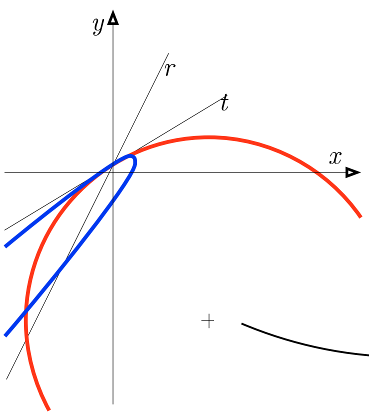
Entonces

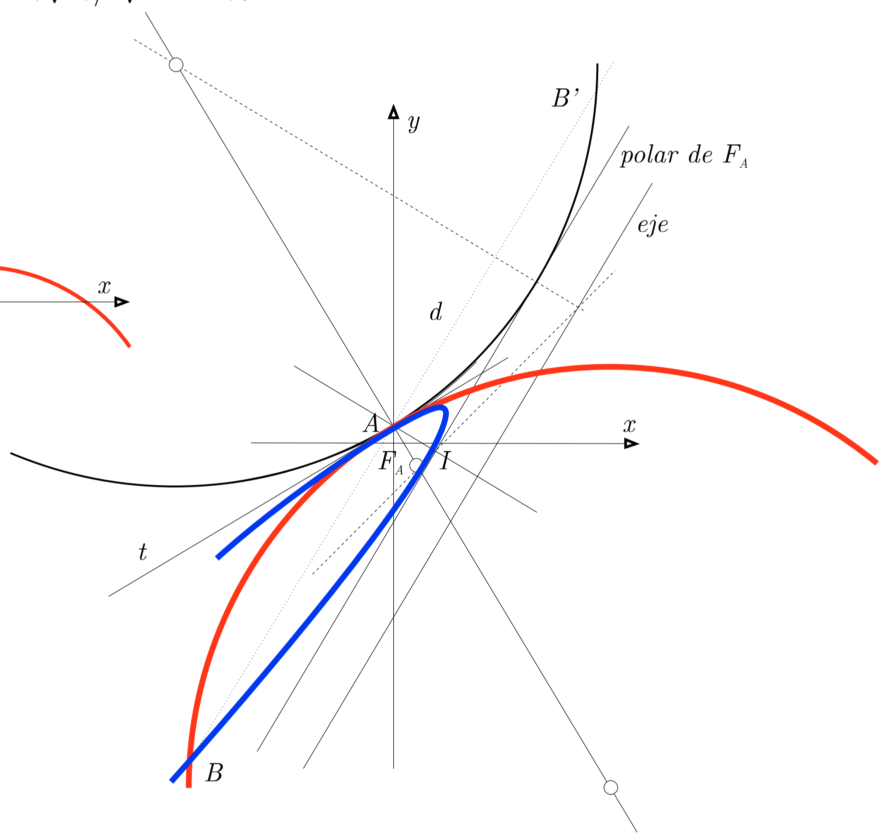
$$v = \frac{-3u}{17}, \qquad w = \frac{-5u}{17}, \qquad m = \frac{5}{3}.$$

La ecuación de la circunferencia de curvatura es, poniendo $u = 17$,

$$2x^2 + 2y^2 - 51x + 81y - 83 = 0.$$

El centro de curvatura es $(a, b) = (51/4, -81/4) \simeq (12.75, -20.25)$ y el radio de curvatura $r = \sqrt{c - a^2 + b^2} = \sqrt{83/2 + (51/4)^2 + (-81/4)^2} = 17\sqrt{17}/2\sqrt{2} \simeq 24.78$.





La gráfica de la izquierda está extraida del Mathematica:

```
f[u_,v_,m_][x_,y_]:=u(x^2-2x*y+y^2-x+3y-4)+v(3x-5y+5)(m*x-y+1)

 ImplicitPlot[{f[1,0,m][x,y]==0,
              f[0,1,2][x,y]==0,
              f[17,-3,5/3][x,y]==0},{x,-15,30}]
```

• Otra forma de resolver este ejercicio es utilizando la fórmula de la curvatura para curvas planas

$$\kappa = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}},$$

derivando implícitamente, respecto de x, en la ecuación de la cónica.

$2x - 2y - 2xy' + 2yy' - 1 + 3y' = 0$, en $(0,1)$: $-3 + 5y' = 0$, $y' = 3/5$.

$2 - 2y' - 2y' - 2xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' + 3y'' = 0$, para $x = 0, y = 1$ e $y' = 3/5$: $y'' = -8/125$.

$$\kappa = \left| \frac{-\dfrac{8}{125}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{9}{25}}\right)^3} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{17\sqrt{17}}.$$

El centro (a,b) de la circunferencia osculatriz se obtiene teniendo en cuenta la relación $r^2 = a^2 + (b-1)^2$ y que debe estar en la perpendicular a la tangente de pendiente $y' = 3/5$ en $(0,1)$: $5a + 3b = 3$. Obteniéndose los valores $(-51/4, 89/4)$ ó $(51/4, -81/4)$. El segundo es el que vale, pues está en el semiplano definido por la tangente determinado por el sentido de la derivada segunda $(125, -8)$.

• Construcción gráfica de la circunferencia osculatriz mediante una homología (gráfica de la derecha):

La cónica (parábola) dada queda determinada por los cinco puntos: $(0,1)$ y $(0,-4)$ de intersección con el eje OY, $(2,-1)$ y $(-3,-1)$ de intersección con la recta $y = -1$, y por el punto $(3,1)$, el otro punto de intersección con la recta $y = 1$.

Utilizaremos una propiedad de un punto de Frégier para transformar la cónica en una circunferencia mediante una homología.

El punto F_A de Frégier relativo al punto A de la cónica, es aquel donde se cortan todas las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A. Dos de estas cuerdas lo determinan:

La perpendicular por $(0,1)$ a la cuerda determinada por los puntos $(0,1)$ y $(0,-4)$ es la cuerda que une los puntos $(0,1)$ y $(3,1)$ de la cónica, así una de las cuerdas que se ven bajo un ángulo recto desde A es la une los puntos $(0,-4)$ y $(3,1)$, que tiene por ecuación

$$-5x + 3y + 12 = 0.$$

La perpendicular a la tangente en $(0,1)$ determina otra cuerda que se ve bajo un ángulo recto desde A; su ecuación es

$$5x + 3y - 3 = 0.$$

El punto de Frégier relativo a A es el de intersección de estas rectas, o sea, $F_A(3/2, -3/2)$.

Utilizaremos el siguiente resultado:

"Sea A un punto de una cónica. La transformada de esta cónica en una homología de centro A es una circunferencia si y sólo si la recta límite (homotética del eje de homología por una homotecia $h_{A,1/2}$) es la polar del punto de Frégier asociado a A, con respecto a la cónica".

Polar del punto de Frégier $(3/2, -3/2)$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad 5x - 3y - 14 = 0.$$

El eje de la homología de centro $A(0,1)$ es la recta homotética de esta polar en la homotecia $h_{A,2}$, de centro A y razón 2.

El homólogo del punto de Frégier F_A es el centro de la circunferencia homóloga de la cónica, pues al conservarse la relación polo y polar mediante una homología, y como la polar de F_A es la recta límite de la homología, que se transforma en la recta del infinito, cuyo polo es el centro de la circunferencia. Éste se determina trazando la recta que une F_A con el punto I de intersección de la recta límite con la perpendicular a ella por A. La recta F_AI corta al eje en un punto; la perpendicular por este punto al eje corta a AF_A en el centro buscado. La tangente a la cónica, por pasar por el centro de la homología A, queda invariante, por tanto, tal circunferencia es tangente a la cónica en A.

Justificaremos ahora que la circunferencia osculatriz en A a la cónica es la simétrica de la circunferencia homóloga respecto a la simétria de centro A:

La recta d paralela al eje de homología por A corta a la cónica en otro punto B. El punto B' homólogo de B es el simétrico de B respecto a A, luego la circunferencia simétrica, respecto a A, de la obtenida, pasa por B. Esta circunferencia es la circunferencia osculatriz en A a la cónica, pues ella pertenece al haz de cónica osculatrices determinado por la cónica dada y por la cónica degenerada en el producto de la tangente t en y la recta d. También, podemos justicar que se trata de la circunferencia osculatriz, observando que los únicos puntos comunes con la cónica son A y B', luego circunferencia y cónica tienen tres puntos comunes confundidos en A.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejcc1924.pdf