Circunferencia osculatriz a la curva $\rho = e^{\theta}$ en $\theta = 0$.

SOLUCIÓN:
Consideremos una circunferencia arbitraria

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$$

y le imponemos que tenga un contacto de orden dos con la curva $\vec{\alpha}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, en $t = 0$.

$$f(t) = (e^t \cos t - a)^2 + (e^t \sin t - b)^2 - r^2, \quad f(0) = (1-a)^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

$$f'(t) = 2\,e^t\,\left(e^t - (a+b)\,\cos(t) + (a-b)\,\sin(t)\right), \quad f'(0) = 2(1-a-b) = 0.$$

$$f''(t) = 4\,e^t\,\left(e^t - b\,\cos(t) + a\,\sin(t)\right), \quad f''(0) = 4(1-b) = 0.$$

De donde se obtiene $b = 1$, $a = 0$ y $r = \sqrt{2}$. La circunferencia oscualtriz pedida es:

$$\boxed{x^2 + (y-1)^2 = 2}$$