> Una **hélice circular** es una curva cuya curvatura y torsión son constantes y no nulas. Determinar la hélice circular que tiene un **orden de contacto** máximo en $(0,0,0)$ con la cúbica de ecuaciones $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$.

SOLUCIÓN:

Resolveremos este ejercicio por dos vías distintas:

Una, integrando el sistema de ecuaciones diferenciales que permite obtener la ecuación de una curva conociendo su curvatura y torsión y, además, unas condiciones iniciales relativas al punto por donde pasa y a los valores de los vectores unitarios tangente, normal y binormal en dicho punto.

Y otra, partiendo del conocimiento de que la ecuación de una hélice circular, situada sobre un cilindro de eje OZ cuyo radio de la sección circular es igual a a, es $x = a\cos u,\ y = a \operatorname{sen} u, z = bu$.

- Empezando por esta segunda vía. La curvatura y torsión de una hélice circular vienen dadas por:

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \tau = \frac{b}{a^2+b^2} \tag{1}$$

Si se quiere encontrar una hélice circular que tenga al menos un contacto de orden tres con la curva del enunciado $\vec{\alpha}(t) = (t, t^2, t^3)$ en el $(0,0,0)$, ambas curvas deben tener en este punto las mismas curvatura y torsión; como se deduce inmediatamente del hecho de que, en parametrizaciones naturales, las derivadas hasta el orden tres de ambas curvas deben coincidir en dicho punto. Por tanto, el valor común de la curvatura y torsión en $(0,0,0)$ es:

$$\kappa_0 = \frac{\|\vec{\alpha}_0' \times \vec{\alpha}_0''\|}{\|\vec{\alpha}_0'\|^3} = \|(1,0,0)\times(0,2,0)\| = 2, \qquad \tau_0 = \frac{[\vec{\alpha}_0'\ \vec{\alpha}_0''\ \vec{\alpha}_0''']}{(\vec{\alpha}_0' \times \vec{\alpha}_0'')^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4} = 3.$$

De las ecuaciones (**??** ([1])), podemos obtener los valores de a y b en función de κ y τ.

$$\frac{\kappa}{a} = \frac{\tau}{b} = \frac{1}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{\kappa^2}{a^2} = \frac{\tau^2}{b^2} = \frac{\kappa^2+\tau^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \frac{\kappa}{a} = \frac{\tau}{b} = \frac{1}{a^2+b^2} = \frac{\kappa^2}{a^2(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\tau^2}{\kappa^2+\tau^2} \Rightarrow$$

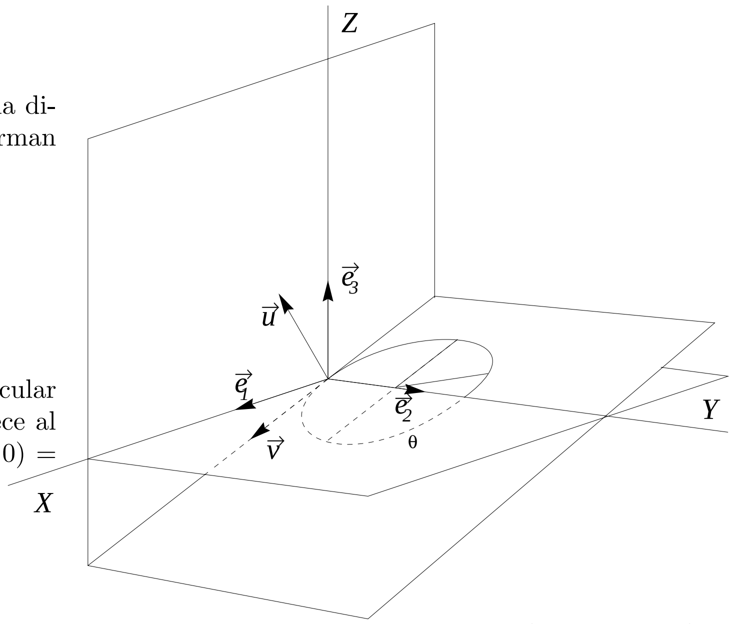
$$a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{2}{13}, \qquad b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{3}{13}.$$

El vector unitario (eje de la hélice), que da la dirección fija con la que los vectores tangentes forman un ángulo constante, es

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(\tau\vec{t}_0 + \kappa\vec{b}_0) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}(\tau\vec{e}_1 + \kappa\vec{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,0,2).$$

La circunferencia de radio a, sección perpendicular al eje del cilindro donde está la hélice, pertenece al plano determinado por los vectores $\vec{e}_2 = (0,1,0) = \vec{n}_0$ y $\vec{v} = \vec{e}_2 \times \vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(2,0,-3)$.



Por lo que la ecuación de la hélice, tomando en dicho plano y en el centro de la circunferencia la referencia ortonormal $\{\vec{E}_1 = -\vec{e}_2, \vec{E}_2 = \vec{v}, \vec{E}_3 = \vec{u}\}$, será:

$$\vec{\beta}(\theta) = a\vec{e}_2 + a(\cos\theta\vec{E}_1 + \operatorname{sen}\theta\vec{E}_2) + b\vec{E}_3$$

$$\vec{\beta}(\theta) = (0, \frac{2}{13}, 0) + \frac{2}{13}\left(\cos\theta(0,-1,0) + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{13}}(2,0,-3)\right) + \frac{3\theta}{13\sqrt{13}}(3,0,2)$$

[1] 23-114

$$\boxed{\vec{\beta}(\theta) = \left(\frac{4\operatorname{sen}\theta + 9\theta}{13\sqrt{13}}, \frac{-2\cos\theta + 2}{13}, \frac{-6\operatorname{sen}\theta + 6\theta}{13\sqrt{13}}\right)}$$

Realmente, lo que se conoce son las ecuaciones de la hélice respecto a la referencia $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\}$ en el punto $(0, 2/13, 0)$:

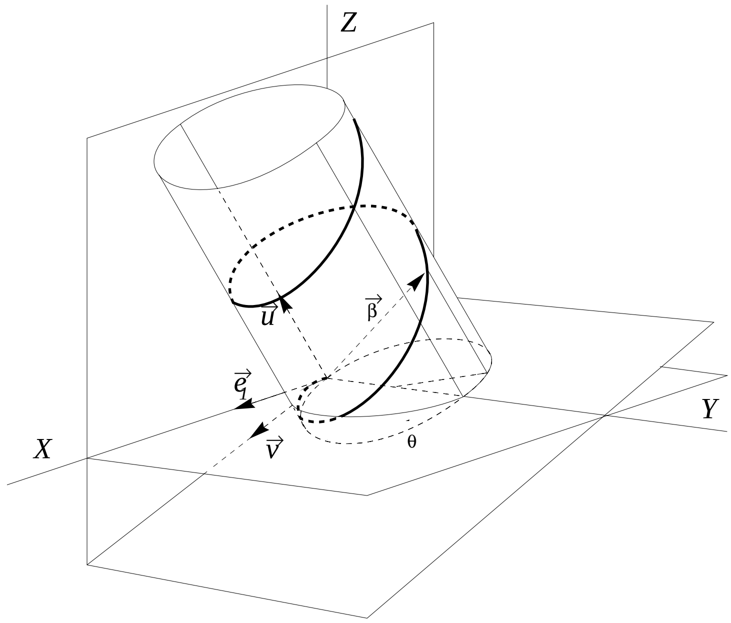
$$x' = \frac{2}{13}\cos\theta, \qquad y' = \frac{2}{13}\operatorname{sen}\theta, \qquad z' = \frac{3}{13}\theta,$$

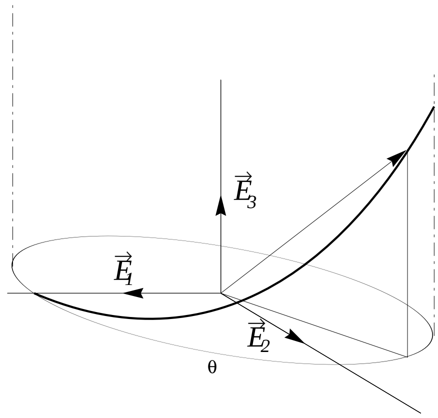
y, mediante la transformación de coordenadas:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/13 \\ 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas de dicha hélice respecto a la referencia canónica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ en el $(0,0,0)$, dada arriba:

$$\vec{\beta}(\theta) = \left(\frac{4\operatorname{sen}\theta}{13\sqrt{13}} + \frac{9\theta}{13\sqrt{13}}, \frac{-2\cos\theta}{13} + \frac{2}{13}, \frac{-6\operatorname{sen}\theta}{13\sqrt{13}} + \frac{6\theta}{13\sqrt{13}}\right)$$





Nota: En los dibujos el radio a de la circunferencia es mayor que el resulta de los cálculos.

• Siguiendo la primera vía que decíamos al principio, se trata de encontrar la única curva (hélice circular) con $\tau = 3$ y $\kappa = 2$, con punto inicial $(0,0,0)$ y triedro de Frenet inicial $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Esto es, resolver el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}l} d\vec{\beta}/ds & = & \vec{t} & \vec{\beta}(0) = (0,0,0) \\ d\vec{t}/ds & = & 2\vec{n} & \vec{t}(0) = (1,0,0) \\ d\vec{n}/ds & = & -2\vec{t} + 3\vec{b} & \vec{n}(0) = (0,1,0) \\ d\vec{b}/ds & = & -3\vec{n} & \vec{b}(0) = (0,0,1) \end{array}$$

$$\frac{d^2n^i}{ds^2} = -2\frac{dt^i}{ds} + 3\frac{db^i}{ds} = -13n^i. \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\frac{d^2n^i}{ds^2} + 13n^i = 0 \quad \Rightarrow \quad n^i = A^i\cos\sqrt{13}s + B^i\operatorname{sen}\sqrt{13}s \qquad (i = 1,2,3)$$

Determinemos esta constantes, imponiéndole las condiciones iniciales:

$$n_0^1 = 0 \Rightarrow A^1 = 0; \qquad \frac{dn^1}{ds}_{|0} = -2t_0^1 + 3b_0^1 = -2 \Rightarrow \sqrt{13}B^1 = -2$$

$$n_0^2 = 1 \Rightarrow A^2 = 1; \qquad \frac{dn^2}{ds}_{|0} = -2t_0^2 + 3b_0^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{13}B^2 = 0$$

$$n_0^3 = 0 \Rightarrow A^3 = 0; \qquad \frac{dn^3}{ds}_{|0} = -2t_0^3 + 3b_0^3 = 3 \Rightarrow \sqrt{13}B^3 = 3$$

$$\vec{n}(s) = \left(-\frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s, \cos \sqrt{13}s, \frac{3}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s \right).$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = 2\vec{n}(s) = \left(-\frac{4}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s, 2\cos \sqrt{13}s, \frac{6}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s \right).$$

$$\begin{aligned}
t^1 &= \frac{4}{13} \cos \sqrt{13}s + C^1; \qquad & t^1_0 = 1 \Rightarrow \frac{4}{13} + C^1 = 1 \\
t^2 &= \frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s + C^2; \qquad & t^2_0 = 0 \Rightarrow C^2 = 0 \\
t^3 &= -\frac{6}{13} \cos \sqrt{13}s + C^3; \qquad & t^3_0 = 0 \Rightarrow -\frac{6}{13} + C^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\vec{t}(s) = \left(\frac{4}{13} \cos \sqrt{13}s + \frac{9}{13}, \frac{2}{\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s, -\frac{6}{13} \cos \sqrt{13}s + \frac{6}{13} \right).$$

Finalmente, integrando $d\vec{\beta}/ds = \vec{t}$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{4}{13\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s + \frac{9s}{13} + D^1; \qquad & x_0 = 0 \Rightarrow D^1 = 0 \\
y &= -\frac{2}{13} \cos \sqrt{13}s + D^2; \qquad & y_0 = 0 \Rightarrow -\frac{2}{13} + D^2 = 0 \\
z &= -\frac{6}{13\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s + \frac{6s}{13} + D^3; \qquad & z_0 = 0 \Rightarrow D^3 = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{\beta}(s) = \left(\frac{4}{13\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s + \frac{9s}{13}, -\frac{2}{13} \cos \sqrt{13}s + \frac{2}{13}, -\frac{6}{13\sqrt{13}} \operatorname{sen} \sqrt{13}s + \frac{6s}{13} \right).}$$