Determinar la elipse con centro de curvatura $(0,0)$ en el punto $(0,1)$ y que tangente a las rectas $x=1$ e $y=-4$.

SOLUCIÓN:
Debemos determinar la cónica que tiene un contacto de orden tres (osculatriz) con la circunferencia $x^2+y^2=1$ en el punto $(0,1)$ y que es tangente a las rectas $x=1$ e $y=-4$.

La ecuación tangencial de la circunferencia y de los puntos $(0,1)$ (de tangencia triple) y $(1,1)$ (donde concurren dos tangentes) son:

$$-u^2-v^2+1=0, \qquad 1+v=0, \qquad u+v+1=0,$$

respectivamente. El haz tangencial de las cónicas osculatrices es:

$$-u^2-v^2+1+t(1+v)(u+v+1)=0.$$

La cónica del haz que es tangente a $y=-4$, es decir, tal que su ecuación tangencial es satisfecha por $(0,1/4)$, se obtiene para $t=-3/5$; por lo que la ecuación tangencial de la cónica pedida es:

$$2-3u-5u^2-6v-3uv-8v^2=0.$$

Y su ecuación puntual es:

$$151-60x-100x^2-102y+60xy-49y^2=0.$$