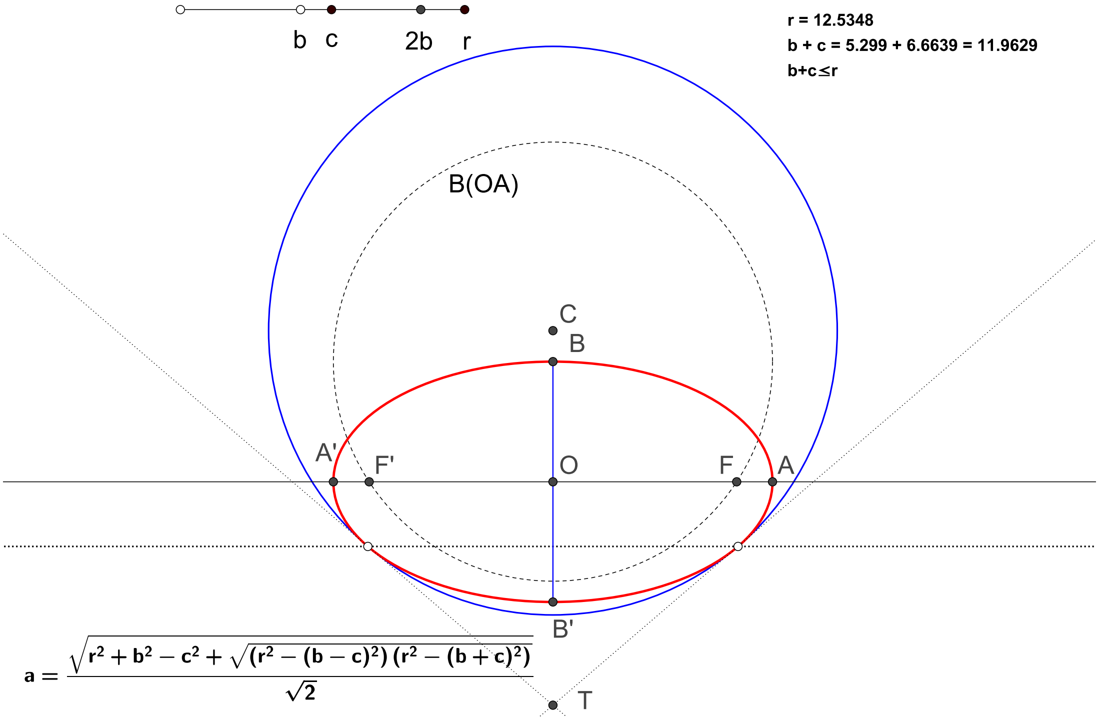
Dada una circunferencia y, dentro de ella un segmento alineado con el centro de ella, trazar una elipse cuyo eje menor es dicho segmento, tal que sea tangente interior en dos puntos a la circunferencia.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto pot Antonio Briones en el Forum GeoGebra



Descargar archivo GeoGebra

Datos del problema:
Circunferencia de radio r.
Segmento de longitud $2b$.
Distancia entre los centros de la circunferencia y elipse: c.

Denotamos por O y C los centros de la elipse y circunferencia, respectivamente; por B y B' los extremos del eje menor de la elipse.

Los cuatro puntos O, B, B' y C los ubicamos en eje de ordenadas de una referencia cartesiana rectangular con origen en O.

Sea $C(c, 0)$ el centro de la circunferencia dada (se puede suponer que $c > 0$), cuya ecuación será $x^2+(y-c)^2-r^2 = 0$.

La ecuación de una elipse de semieje menor BB' es:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

donde $(t, 0)$ es un vértice en el eje focal y b es la longitud del semieje menor.

Para encontrar la elipse solución, bitangente con la circunferencia dada, tomamos el haz de cónicas determinado por ambas:

$$\frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda(x^2 + (y-c)^2 - r^2) = 0.$$

Las cónicas degeneradas del haz corresponden a las soluciones del polinómico característico:

$$\left(b^2 + \lambda\right)\left(a^4b^2 + t^2b^2\lambda - t^2c^2\lambda + t^2\lambda r^2 + \lambda^2 r^2\right) = 0.$$

La cónica degenera correspondiente a $\lambda = -b^2$ es:

$$-t^2b^2 - b^2c^2 + b^2r^2 + 2b^2cy + (t^2 - b^2)y^2 = 0,$$

que es una recta doble (paralela al eje focal de la elipse) si solo si:

$$t^4 - t^2(b^2 - c^2 + r^2)t^2 + b^2r^2 = 0.$$

De donde obtenemos como longitud del semieje mayor de la elipse solución:

$$a = \frac{\sqrt{r^2 + b^2 - c^2 + \sqrt{(r^2 - (b-c)^2)\,(r^2 - (b+c)^2)}}}{\sqrt{2}}.$$

Magnitud que puede ser construida con regla y compás.

Construido el vértice $A(a,0)$ los focos F y F' de la elipse son la intersección de la recta OA con la circunferencia de centro $B(0,b)$ y radio OA.

La otra cónica degenerada del haz, para el valor de A calculado, consta de las tangentes comunes de elipse y circunferencia.

Su punto de corte es:

$$T\left(0, \frac{c\left(b^4 - 2b^2c^2 + c^4 - 2c^2r^2 + r^4 + \sqrt{(r^2-(b-c)^2)\,(r^2-(b+c)^2)}\,\left(b^2 - c^2 + r^2\right)\right)}{b^4 - 2b^2c^2 - b^2r^2 + c^4 - c^2r^2 + (b^2 - c^2)\sqrt{(r^2-(b-c)^2)\,(r^2-(b+c)^2)}}\right)$$