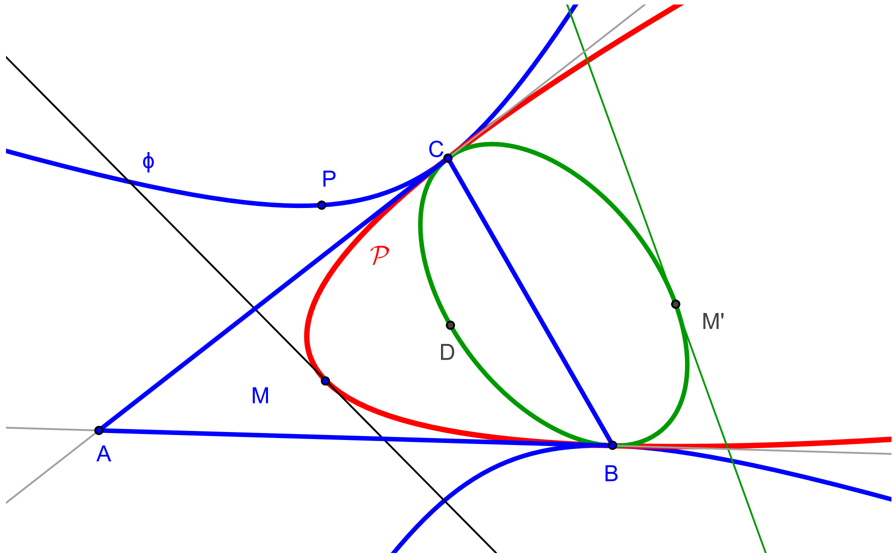
La polar recíproca de la parábola de un haz bitangente, respecto a cada cónica del haz, pasa por el centro de ésta.

SOLUCIÓN:



Tomamos la referencia proyectiva $\{A, B, C; G\}$, donde AB y AC son las tangentes comunes de las cónicas del haz, B y C son los puntos de tangencia y G es el baricentro del triángulo ABC.

Ecuación del haz de cónicas: $yz + \lambda x^2 = 0$.

Centro de una cónica genérica del haz: $D(1 : 2\lambda : 2\lambda)$.

Vamos a encontrar las cónicas del haz tales que su polar recíproca respecto a cualquier otra cónica del haz pase por el centro de ésta.

Sea $yz+\lambda_0 x^2 = 0$ una cónica del haz. La tangente a esta cónica en uno de sus puntos $(p : q : r)$ es $2\lambda_0 px+ry+qz = 0$.

La polar recíproca de esta cónica, respecto a una cónica del haz, es el lugar geométrico del polo de la tangente considerada: $(p\lambda_0 : q\lambda : r\lambda)$.

Eliminando ρ, p, q, r entre las ecuaciones:

$$\rho x = p\lambda_0, \quad \rho y = q\lambda, \quad \rho z = r\lambda, \quad qr + \lambda_0 p^2 = 0,$$

se obtiene $x^2\lambda^2 + yz\lambda_0 = 0$, que es una cónica del haz considerado.

Para que pase por D, $\lambda_0 = -1/4$. Es decir, se obtiene la párabola $x^2 = 4yz$ del haz de cónicas considerado, cuyo punto del infinto es (2:-1:-1).