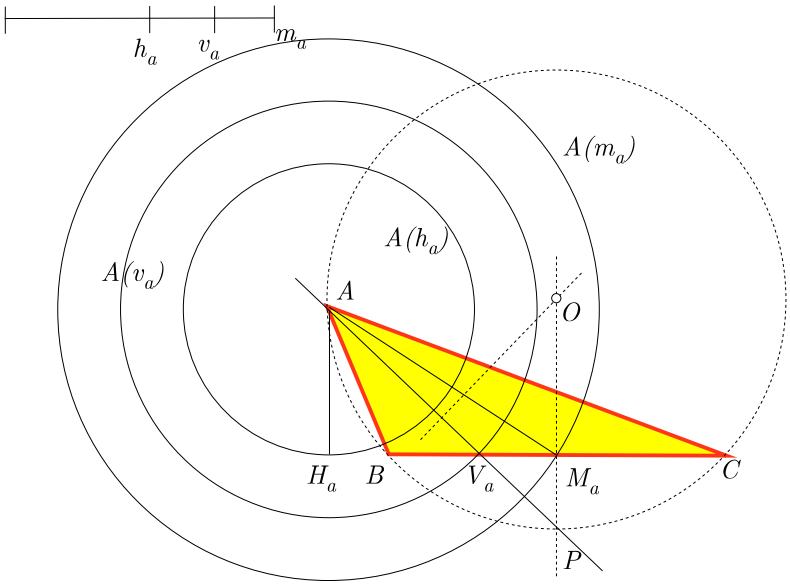
Construir un triángulo del que se conocen la mediana, la altura y la bisectriz desde uno de sus vértices.

SOLUCIÓN:



Supongamos construido el triángulo $\widehat{ABC}$ y sean M_a, H_a y V_a los pies de la mediana, la altura y la bisectriz desde A, de longitudes conocidas m_a, h_a y v_a. Sea P el punto de interseccion de AV_a con la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$. Ya que P es el punto medio del arco BPC y M_a es el punto medio de BC, M_aP es perpendicular a BC y, por consiguiente, es paralela a AH_a. Se concluye que AP (bisectriz de A) queda entre AH_a y M_aP. Finalmente, el pie V_a de la bisectriz desde A queda entre H_a y M_a, Esta es una propiedad que se verifica en todo triángulo.

El centro de la circunferencia circunscrita está en M_aP y sobre la mediatriz de AP. De donde se sigue la siguiente construcción:

Construimos el triángulo rectángulo $\widehat{AH_aM_a}$, del que se conocen un cateto AH_a y la hipotenusa AM_a. Con centro en A se traza la circunferencia de radio v_c. Si no interseca a H_aM_a entre H_a y M_a, la construcción no es posible. En otro caso, se obtiene el punto V_a. La recta AV_a y la perpendicular a H_aM_a en M_a, se cortan en P. La mediatriz de AP corta a M_aP en O. Con radio OP se traza la circunferecia de centro O. La recta H_aM_a corta al circunferecia trazada en los otros dos vértices B y C del triángulo buscado.