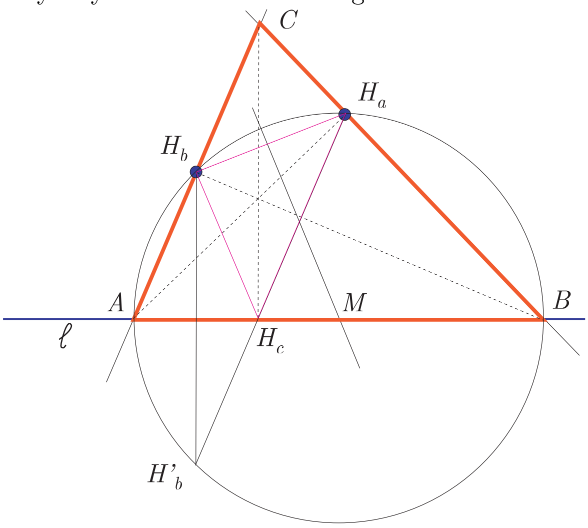
Construir un triángulo dados los pies de dos de sus alturas y la recta que contiene a los vértices desde donde parten dichas alturas.

SOLUCIÓN:

Alexander Bogomolny.- The many ways to construct a triangle.



Supongamos dados los pies H_a y H_b de las alturas desde los vértices A y B, respectivamente. y la recta ℓ que contiene a los vértice A y B.

Los trianngulos $\widehat{AH_aB}$ y $\widehat{AH_bB}$ son rectángulos. Entonces, los puntos H_a y H_b están sobre la circunferencia de diámetro AB. La mediatriz del segmento H_aH_b pasa por el centro M de esta circunferencia. Esto sugiere la siguiente construcción:

Construido el punto M como intersección de la recta dada ℓ con la mediatriz de H_aH_b, se traza la circunferencia de centro M y que pasa por H_a y H_b, la cual corta a ℓ en los puntos A y B. La intersección de las rectas AH_a y BH_b, determinan el vértice A. Con lo que el triángulo $\widehat{ABC}$ pedido queda construido.

Segundo método:

Utilizando la propiedad que dice que las bisectrices del tiángulo órtico $\widehat{H_aH_bH_c}$ de $\widehat{ABC}$ son las alturas de éste, procedemos a hacer la construcción como sigue:

Sea H_b' el simétrico de H_b respecto a ℓ, la recta $H_b'H_a$ corta a ℓ en H_c, pie de la altura desde A. Con lo que trazando las bisectrices del triángulo $\widehat{H_aH_bH_c}$, se obtienen los vértices B y C sobre ℓ y, como antes, se obtiene el vértice C.

(Ver en GeoGebraTube)

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2090.pdf