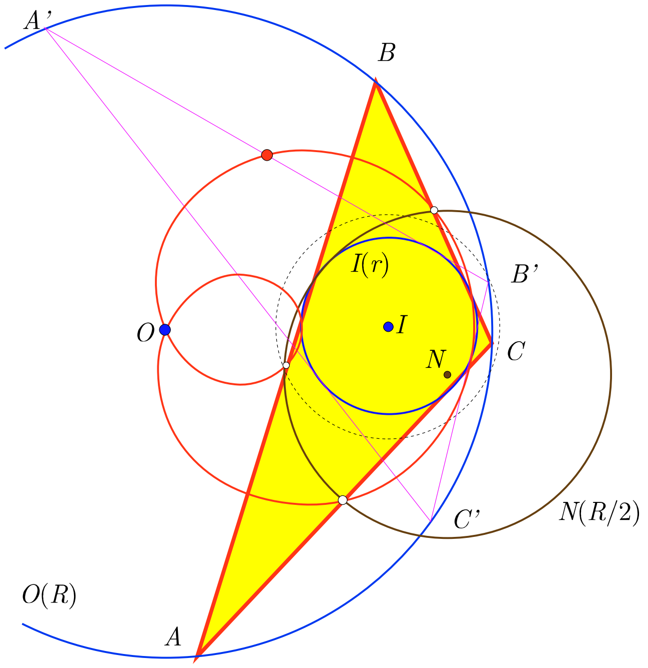
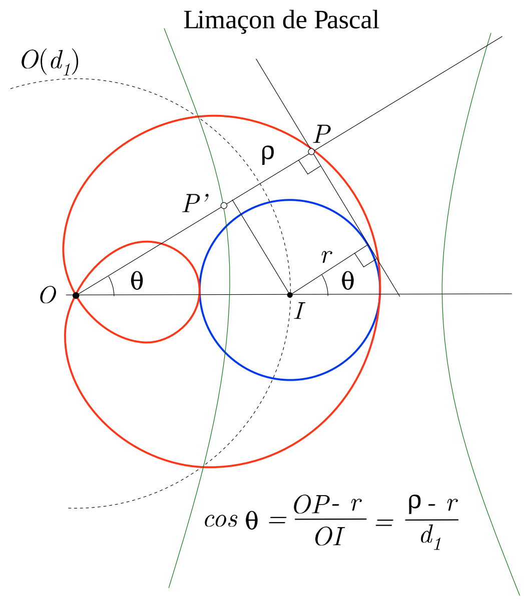
Construir un triángulo del que se conocen (en posición) el circuncentro, el incentro y el centro la circunferencia de los nueve puntos.

SOLUCIÓN:





Utilizaremos las fórmulas relativas a un triángulo para las distancias siguientes:

$$\overline{OI}^2 = d_1^2 = R^2 - 2rR, \qquad \overline{IN} = d_2 = \frac{R}{2} - r,$$

donde, O es el circuncentro, I el incentro, N el centro de la circunferencia de los nueve puntos y R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente.

De aquí se de deduce que los valores de los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, conociendo la posición de los puntos O, I y N, son

$$R = \frac{d_1^2}{2d_2}, \qquad r = \frac{d_1^2 - 4d_2^2}{4d_2}.$$

Por lo que, dados O e I (y conocido, por tanto, d_1), la posición de N en plano está restringida a que se verifique

$$d_2 < \frac{d_1}{2}.$$

Comenzamos trazando las circunferencias $O(R)$ e $I(r)$ de centros O e I y radios R y r, respectivamente. Tratamos de construir un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en $O(R)$, circunscrito a $I(r)$ y tal que su circunferencia de los nueve puntos sea $N(R/2)$.

Por un punto arbitrario A' sobre $O(R)$, como vértice, trazamos un tal triángulo $\widehat{A'B'C'}$, cumpliendo las dos primeras condiciones. Cuando A' varía, los puntos medios de los lados de $\widehat{A'B'C'}$, describen una curva (limaçon de Pascal) con punto doble en O, simétrica respecto a OI y tangente a $I(r)$ en los puntos de corte de ésta con la recta OI (ver más abajo).

Como la circunferencia $N(R/2)$ de los nueve puntos también pasa por los puntos medios de los lados, hallamos éstos intersecando ambas curvas.

Para determinar el triángulo pedido, trazamos por uno de estos puntos medios obtenidos una tangente a $I(r)$ y por cada uno de los dos puntos donde esta tangente corta a $O(R)$, trazamos las otras tangentes a $I(r)$. Estas dos últimas tangentes se cortan sobre $O(R)$ (porismo de Poncelet) y las tres tangentes trazadas constituyen el triángulo pedido.

Limaçon de Pascal: La podaria de la circunferencia $I(r)$ respecto a O. Esta coincide con el lugar geométrico de los puntos medios de los triangulo $\widehat{A'B'C'}$, considerados arriba. En efecto, cualquiera de sus lados es una tangente a $I(r)$ que determina en $O(R)$ una cuerda, cuyo punto medio es el pie de la perpendicular trazada a ella desde el centro O de $O(R)$, o sea, que está en la podaria de $I(r)$ respecto a O.

La ecuación de esta limaçon de Pascal, referida a un sistema de coordenadas polares con polo en O y semieje polar OI, es

$$\rho = r + d_1 \cos\theta.$$

<u>Comentario a la construcción con Cabri II</u>:

Utilizamos la opción que dispone tal paquete para determinar los puntos de intersección de dos cónicas. Este es un problema algebraico de cuarto grado que en general no se puede resolver con regla y compás.

La curva limaçon de Pascal se puede obtener como inversa de una cónica con respecto a uno de sus focos:

Si tomamos por centro de inversión el circuncentro O y como circunferencia de inversión $O(d_1)$ la de radio $OI = d_1$ y centro en O, la inversa de la curva limaçon de Pascal $\rho = a + d_1 \cos\theta$ es la cónica de ecuación

$$\rho = \frac{\frac{d_1^2}{r}}{1 + \frac{d_1}{r}\cos\theta},$$

que tiene un foco en O y de excentricidad $e = d_1/r = \sqrt{R^2 - 2rR}/r$.

Mediante esta misma inversión la circunferencia de los nueve puntos $N(R/2)$ se transforma en otra circunferencia (o en una recta, si O está en $N(R/2)$). A partir de uno de los puntos de intersección de esta dos cónicas inversas obtenemos (hallando el inverso) un punto medio de un lado del triángulo a determinar.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2093.pdf