Construir un triángulo rectángulo con el baricentro en la circunferencia inscrita.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **683**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Quincena del 1 al 15 de mayo de 2013

—— - ——

Vamos a construir el triángulo $\widehat{ABC}$, rectángulo en el vértice B y en el que suponemos dado la longitud a del lado BC (sin que con esto el problema pierda generalidad; incluso podemos tomar la cantidad a como unidad de medida).

La circunferencia inscrita $I(r)$ en un triángulo $\widehat{ABC}$ tiene por ecuación baricéntrica:

$$a^2yz + b^2zx + c^2xy - \frac{1}{4}(x+y+z)((b+c-a)^2x + (c+a-b)^2y + (a+b-c)^2z) = 0.$$

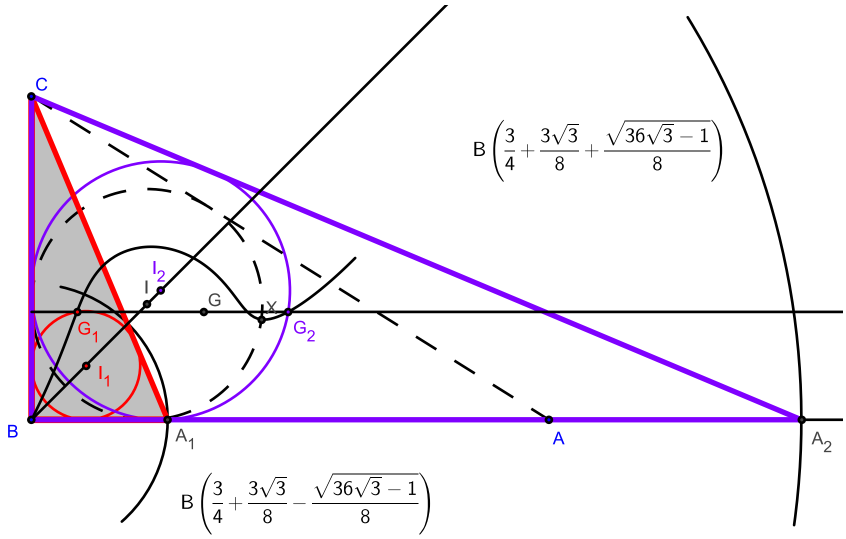
Si sustituimos en esta ecuación las coordenadas del baricentro $G(1:1:1)$ e imponemos que $b^2 = a^2 + c^2$, resulta que debemos resolver el sistema de ecuaciones, en las variables b y c:

$$3ab + 3ac + 3bc - 5a^2 - 5c^2 = 0, \qquad b^2 = a^2 + c^2.$$

Tomando $a = 1$ (nueva unidad de medida), resulta que:

$$c = \frac{1}{8}\left(6 + 3\sqrt{3} \pm \sqrt{36\sqrt{3} - 1}\right).$$

Longitudes que pueden ser construidas con regla y compás. Por lo que existen dos triángulos rectángulos, conocido un cateto y tal que su baricentro esté sobre la circunferencia inscrita.



Appet GeoGebra

Problemas similares:

- Construir un triángulo isósceles con el baricentro sobre la circunferencia inscrita.

Al sustituir las coordenadas del baricentro $G(1:1:1)$ en la ecuación de la circunferencia inscrita y poner $b=c$ (triángulo isósceles), resulta:

$$(a-2b)(5a-2b)=0.$$

La única solución posible es que $b=c=5a/2$.

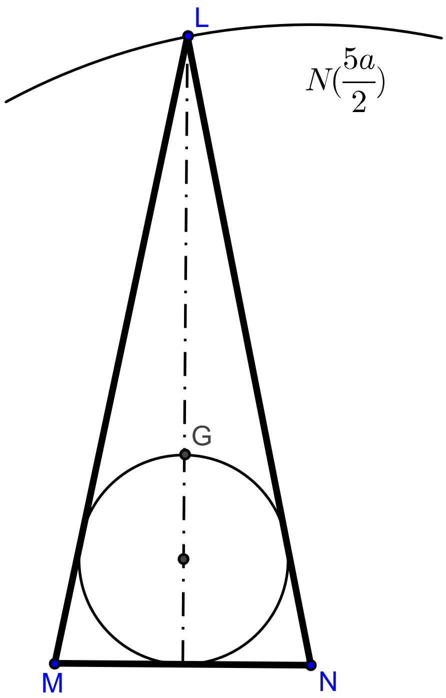
- Construir un triángulo isósceles con el circuncentro sobre la circunferencia inscrita.

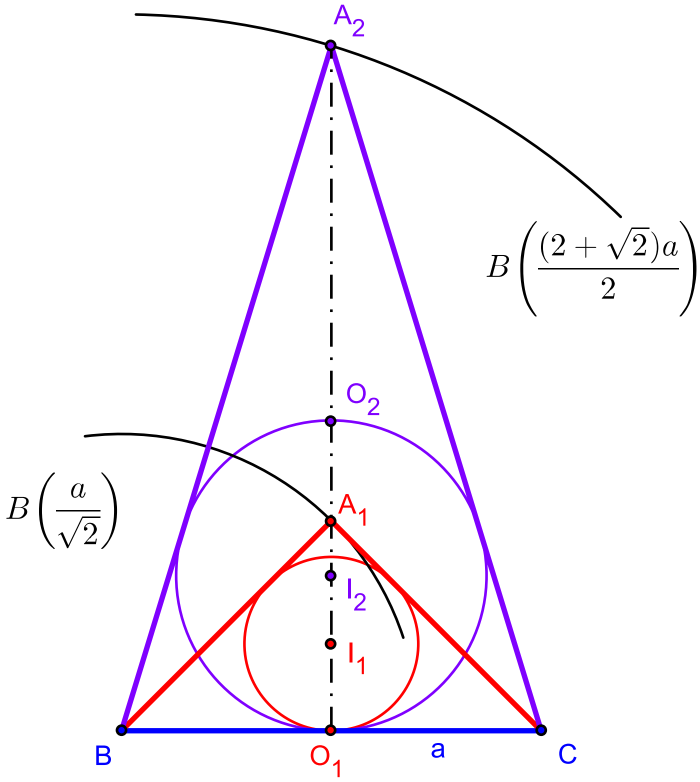
Al sustituir las coordenadas del circuncentro $G(a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^3))$ en la ecuación de la circunferencia inscrita y poner $b=c$ (triángulo isósceles), resulta:

$$a^4(a-2b)(a+2b)(a^2-2b^2)(a^2-4ab+2b^2)=0.$$

Las únicas solución válidas para $b=c$ son:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{(2+\sqrt{2})a}{2}.$$





http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2519.pdf