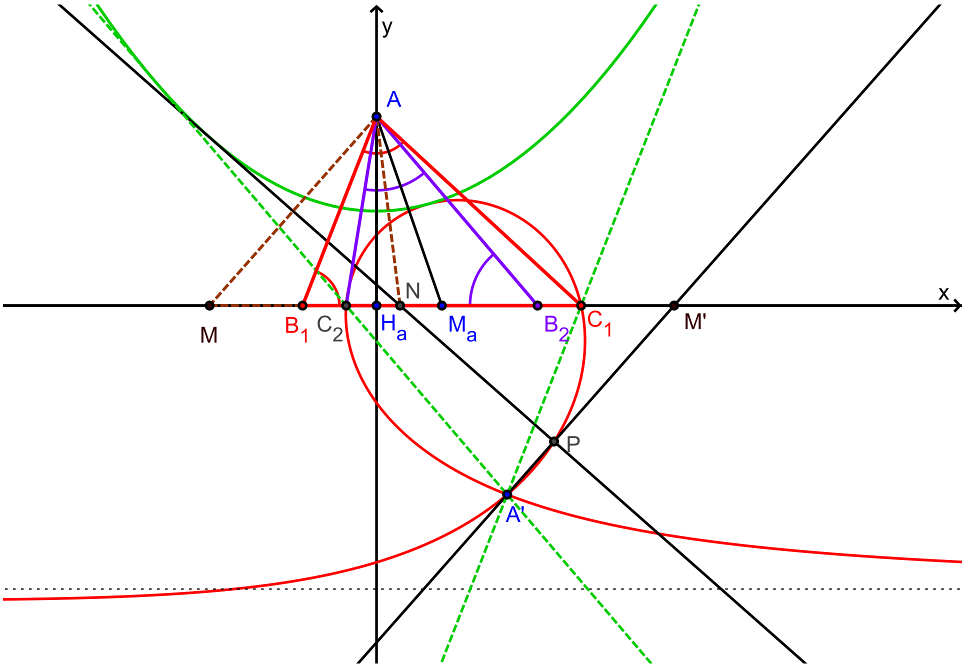
Construir un triángulo sabiendo que es isósceles y conociendo la altura y la mediana desde uno de los vértices de ángulos iguales.

SOLUCIÓN:



(Applet-GeoGebra)

Utilizaremos el método de lugares geométricos para construir un triángulo ABC del que se conocen las longitudes de la altura h_a y la mediana m_a desde el vértice A y que $\hat{A} = \hat{B}$.

En un sistema de coordenadas cartesianas rectangular fijamos el vértice $A(0, 2h)$ $(2h = h_a)$, el pie $H_a(0, 0)$ de la altura desde A y el pie de la mediana $M_a(m, 0)$ desde A $(m^2 = m_a^2 - h_a^2)$.

Tomamos un punto variable $M(2t, 0)$, la mediatriz de AM corta al eje de las "x" en un punto N. El triángulo AMN tiene ángulos iguales en los vértices A y M y la altura desde A es la dada, nos falta encontrar la posición de M para que la mediana AM_a sea también la dada.

Si M_a ha de ser el punto medio del lado opuesto al vértice A y si M' es la reflexión de M en M_a, deberemos encontrar la posición de M para que $N = M'$.

La perpendicular por M' a la mediatriz de AM, corta a ésta en el punto P. El lugar geométrico del punto P, cuando M varía, es una cúbica con punto nodal en la reflexión A' de A en M_a y asíntota, paralela al eje de las "x", $y = 3h_a/2$. Se trata de la podaria del punto A' y la parábola de foco A y directriz H_aM_a, su ecuación es:

$$y^3 + (3h + y)x^2 - 2mxy + 3hy^2 - 8hmx - 4h^3 + 4hm^2 = 0.$$

Esta cúbica corta al eje de las "x" en dos puntos C_1 y C_2 (donde N, M' y P coinciden). Las reflexiones de estos puntos de corte en M_a, dan los otros dos vértices de dos triángulos solución del problema de construcción propuesto.

Las abscisas de los puntos C_1 y C_2 son:

$$\frac{2}{3}\left(2\sqrt{m_a^2 - h_a^2} \pm \sqrt{m_a^2 - \frac{1}{3}h_a^2}\right).$$

Así, tales puntos pueden ser construidos con regla y compás.

Una construcción inmediata de los puntos C_1 y C_2 se hace teniendo en cuenta que son las intersecciones de la recta H_aM_a con las tangentes desde A' a la parábola de foco A y directriz H_aM_a.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2528.pdf