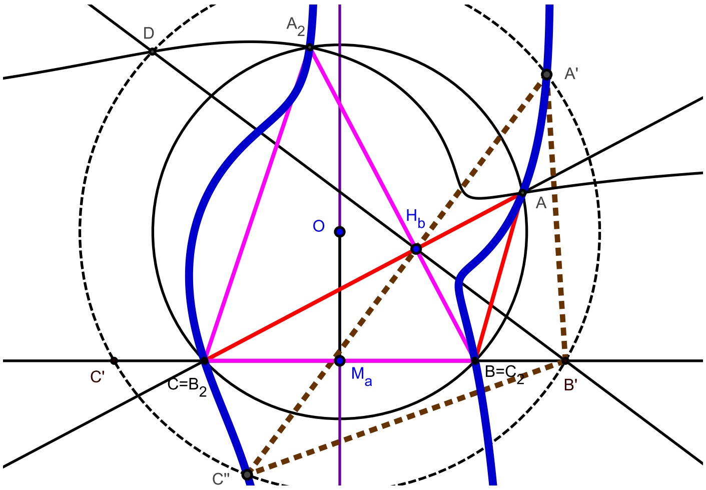
Construir un triángulo conociendo su circuncentro y los pies de la mediana y altura desde dos vértices distintos.

SOLUCIÓN:



(Applet-GeoGebra)

Utilizaremos el método de lugares geométricos para construir un triángulo ABC del que se conocen las posiciones de su circuncentro, el punto medio del lado BC y el pie de la la altura desde el vértice B.

En un sistema de coordenadas cartesianas rectangular fijamos el circuncentro $O(0,0)$, el pie de la mediana $M_a(-m,0)$ desde el vértice A y el pie $H_b(\alpha,\beta)$ de la altura desde el vértice B.

Tomamos un punto variable $B'(t,-m)$ sobre la perpendicular a OM_a por M_a; la perpendicular por H_b a la recta H_bB', corta a la circunferencia de centro O y radio OB' en los puntos A' y C'.

Los vértices B y C del triángulo a construir han de estar sobre la perpendicular a OM_a por M_a y en el lugar geométrico descrito por los puntos A' y C', cuando B' varía.

Este lugar geométrico está descrito por las ecuaciones:

$$\frac{y-\beta}{t-\alpha}=\frac{x-\alpha}{\beta+m}, \qquad x^2+y^2=m^2+t^2.$$

Eliminando t entre esta ecuaciones, resulta la ecuación implícita del lugar de los punto A' y C':

$$\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4+\alpha^2m^2+\beta^2m^2+m^2x^2-2\alpha m^2x+m^2y^2-2\beta m^2y+2\alpha^2\beta m+2\beta^3m-2\alpha\beta mx+2\alpha mxy+$$

$$2\beta my^2-2\alpha^2my-4\beta^2my-x^4+2\alpha x^3-x^2y^2-2\alpha^3x-2\alpha\beta^2x+2\alpha xy^2+2\alpha\beta xy-\alpha^2y^2+\beta^2y^2-2\alpha^2\beta y-2\beta^3y=0.$$

La intersección de esta curva con la recta $y=-m$ nos da cuatro puntos de abscisas:

$$\pm\sqrt{\alpha^2+(m+\beta)^2}, \qquad \alpha\pm\sqrt{-(m+\beta)^2}.$$

Las únicos puntos reales son:

$$B(\sqrt{\alpha^2+(m+\beta)^2},-m), \qquad C(-\sqrt{\alpha^2+(m+\beta)^2},-m)$$

Construidos estos vértices, ya es inmediato construir el vértices A. Existiendo DOS SOLUCIONES.

Obsérvese que los dos vértices A son la intersección del lugar geométrico descrito antes y la cúbica descrita por el punto D, de intersección de la recta H_bB' con la circunferencia de centro O y radio OB', cuando B' varía.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2530.pdf