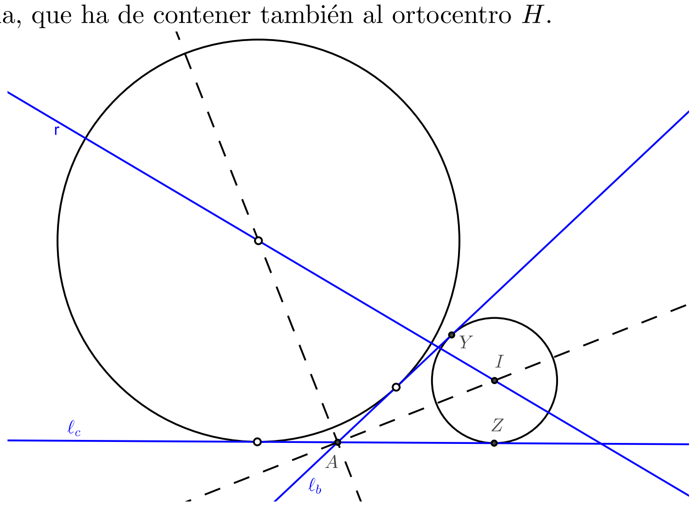
Construir un triángulo conocidas las rectas determinadas por dos de sus lados y la recta que pasa por el incentro y el ortocentro.

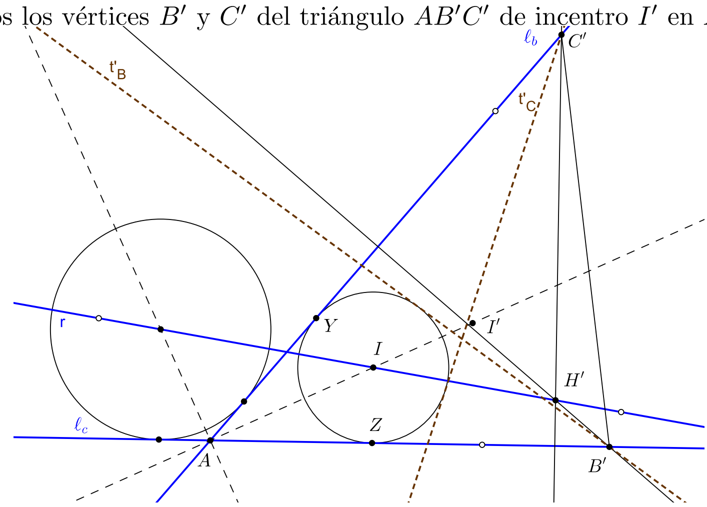
SOLUCIÓN:

Del triángulo ABC a determinar, admitamos que el vértice A sea el punto de intersección de las dos rectas ℓ_b y ℓ_c dadas, que coinciden con lados del triángulo. El incentro I de ABC ha de estar en una de las dos bisectrices de tales rectas y sobre la recta r dada, que ha de contener también al ortocentro H.



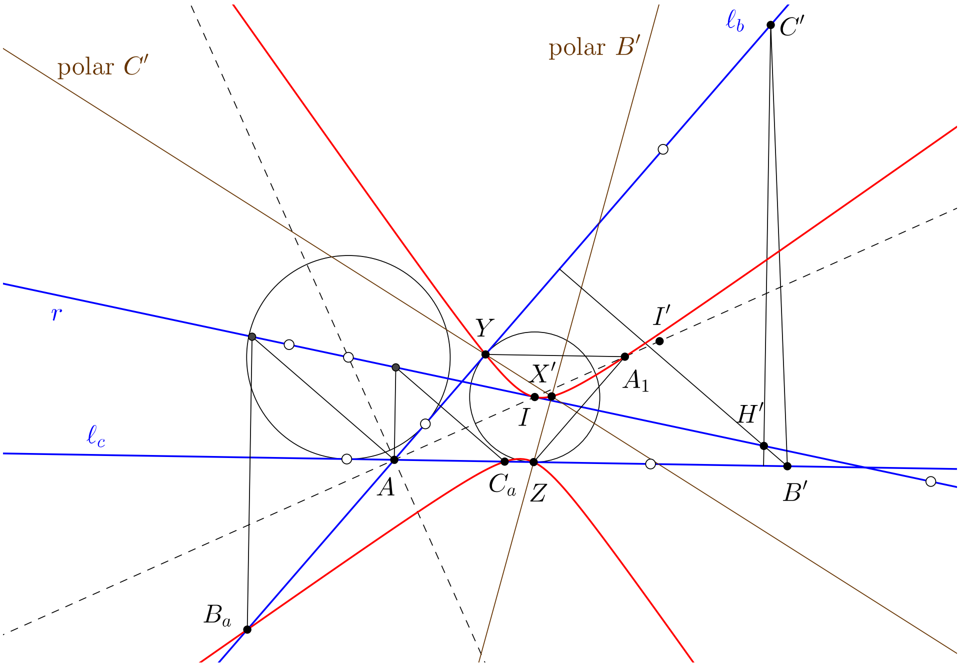
Denotamos por Y y Z las proyecciones ortogonales de I sobre los lados conocidos ℓ_b y ℓ_c, estos son los puntos de contacto de la circunferencia inscrita Γ del triángulo buscado ABC con los lados AC y AB, respectivamente. Nos falta determinar el punto X de contacto Γ con el lado BC.

Tomemos un punto H' variable sobre la recta dada r, que pasa por I. Trazando las perpendiculares por H' a los lados conocidos, construimos los vértices B' y C' del triángulo $AB'C'$ de incentro I' en AI y ortocentro H'.



Para determinar la posición del ortocentro H del triángulo ABC buscado, se debe imponer que las tangentes desde B' y C' a la circunferencia inscrita coincidan. O lo que es lo mismo, las polares de B' y C', respecto a Γ, se han de corta en X, de tangencia de ambas tangentes.

Designemos por X' el punto de intersección de tales polares. Como la correspondencia entre estas polares es un proyectividad entre los haces de rectas con puntos base en Y y Z, el punto X' describe una cónica $\mathcal{H}$ que pasa por estos puntos.



Cuando H' es el punto del infinito, tales polares pasan por el centro de Γ; es decir, I está en la cónica.

Los otros puntos de intersección de $\mathcal{H}$ con los lados dados se obtienen de la forma siguiente:

Cuando H' está sobre la perpendicular por A al lado AB (es decir $C' = A$), la perpendicular por H' al lado AC corta a AB en un punto C_a que está en a $\mathcal{H}$ (la polar de C_a, respecto a Γ, es la tangente en Z a $\mathcal{H}$).
Similarmente se obtiene el otro punto B_a de intersección de $\mathcal{H}$ con el lado AC.

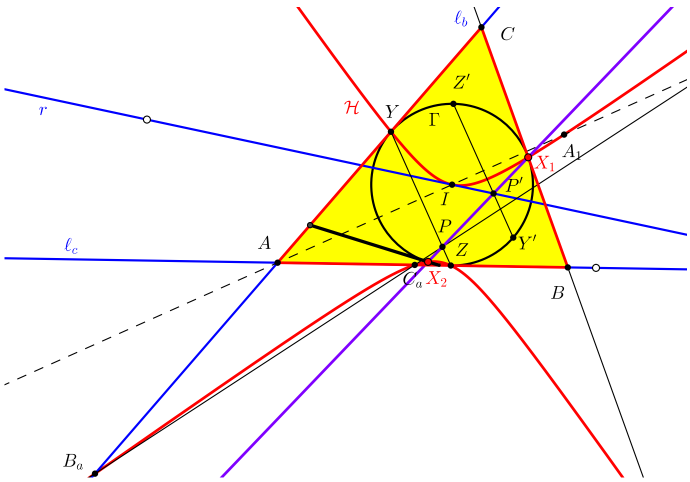
Ya tenemos cinco puntos I, Y, C_a, Z, B_a de $\mathcal{H}$, la cual tiene dos puntos comunes Y y Z con Γ.

Cuando $H' = I$, las polares son paralelas a los lados dados, cortándose en el punto A_1 que completa el paralelogramo de vértices en A, Y, Z. De esto, se deduce que $\mathcal{H}$ es una hipérbola equilátera, ya que estos puntos constituyen una cuadrángulo ortocéntrico.

El problema algebraico de determinar los puntos de intersección de dos cónicas es de cuarto grado y, en general, no se puede construir con regla y compás. La reducción del grado puede hacerse cuando se conocen dos puntos, como es el caso que nos ocupa.
Para la construcción de los otros dos puntos de intersección de la hipérbola $\mathcal{H}$ y Γ, podemos seguir el procedimiento descrito, para dos cónicas cualesquiera, por:
Philoppe Chevanne.- Intersection de deux coniques (http://mathafou.free.fr/themes/conique7.html)

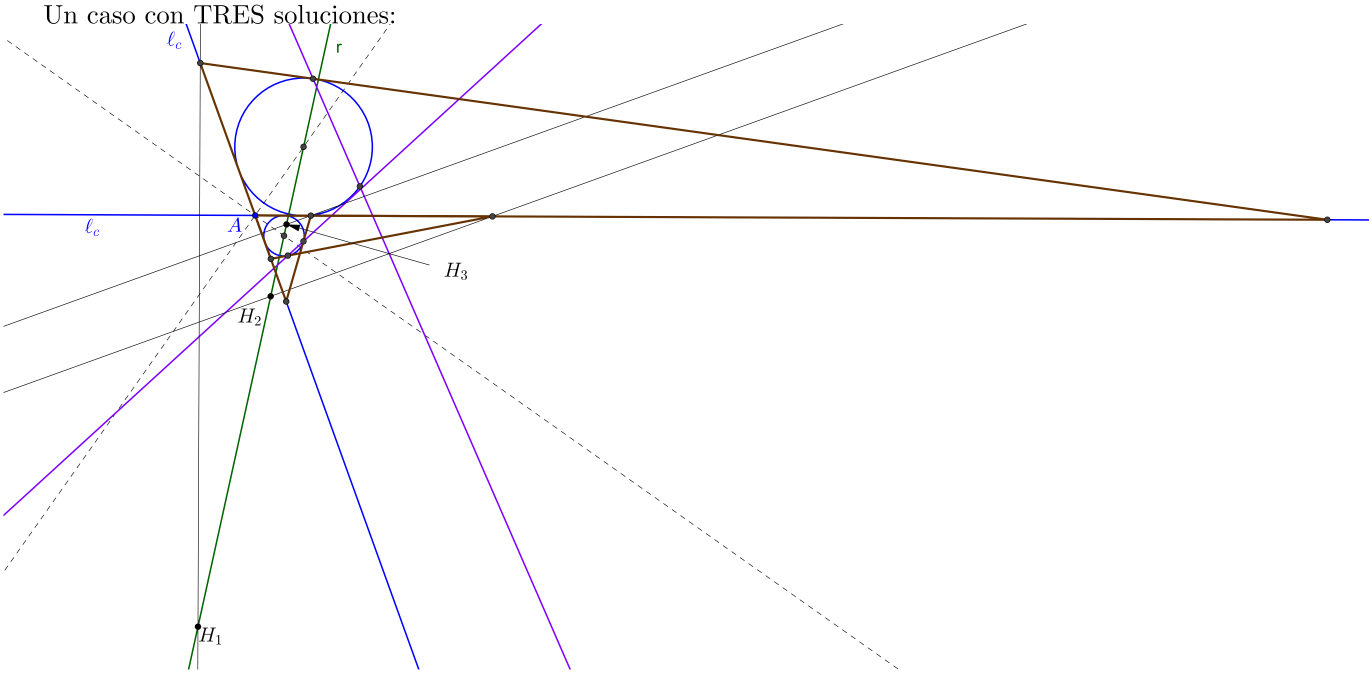
No obstante, al ser una de las cónicas una circunferencia Γ, los dos puntos comunes restantes de Γ y $\mathcal{H}$ están el la recta determinada por los dos puntos, P y P', obtenidos de la forma siguiente:

Sea P el punto de intersección de las rectas B_aC_a e YZ. Si Y' y Z' son las reflexiones de Y y Z en I, tomamos el punto P' de intersección de r con $Y'Z'$.
La recta PP' corta a Γ en los puntos de contacto con el tercer lado que falta por determinar.
De acuerdo con esto, puede ocurrir que **no haya solución**, si PP' no corta a Γ, (circunferencia relativa a la bisectriz de ℓ_b y ℓ_c considerada).
En caso de que PP' y Γ tengan puntos comunes, habrá solución si A e I están en el mismos semiplano respecto a la tangente a Γ en los puntos de intersección con PP'.



El mismo razonamiento se lleva a cabo si el incentro I es tomado en la otra bisectriz de ℓ_b y ℓ_c. Concluimos que el problema propuesto puede tener hasta **CUATRO soluciones**.

Un caso con TRES soluciones:



Construcción dada por Luis González Art of Problem Solving (http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=22469 0&&)

Internal bisector of $\angle(\ell_b, \ell_c)$ cuts r at the incenter I. Construct incircle (I) centered at I and tangent to ℓ_b, ℓ_c.

Animate the third side ℓ_a tangent to $(I) \Longrightarrow B \mapsto C$ is then a homography between ℓ_b and ℓ_c. Since the directions $CH \perp \ell_c$ and $BH \perp \ell_b$ remain fixed, the locus of H is a hyberbola $\mathcal{H}$ with asymptotes perpendicular to ℓ_b, ℓ_c, therefore $H \equiv \mathcal{H} \cap r$, giving rise to at most two solution triangles $\triangle ABC$. These intersections are then the double points of the homography that $\mathcal{H}$ induces on r, that is, construct five points H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 of $\mathcal{H}$ (5 positions of ℓ_a), then H are the double points of the homography $H_1(H_2, H_3, H_4) \mapsto H_5(H_2, H_3, H_4)$ induced on r. Once H is determined, the construction of $\triangle ABC$ is straightforward; ℓ_a is the incirle tangent perpendicular to AH, leaving A, H in the same side.[/quote] N

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2531.pdf