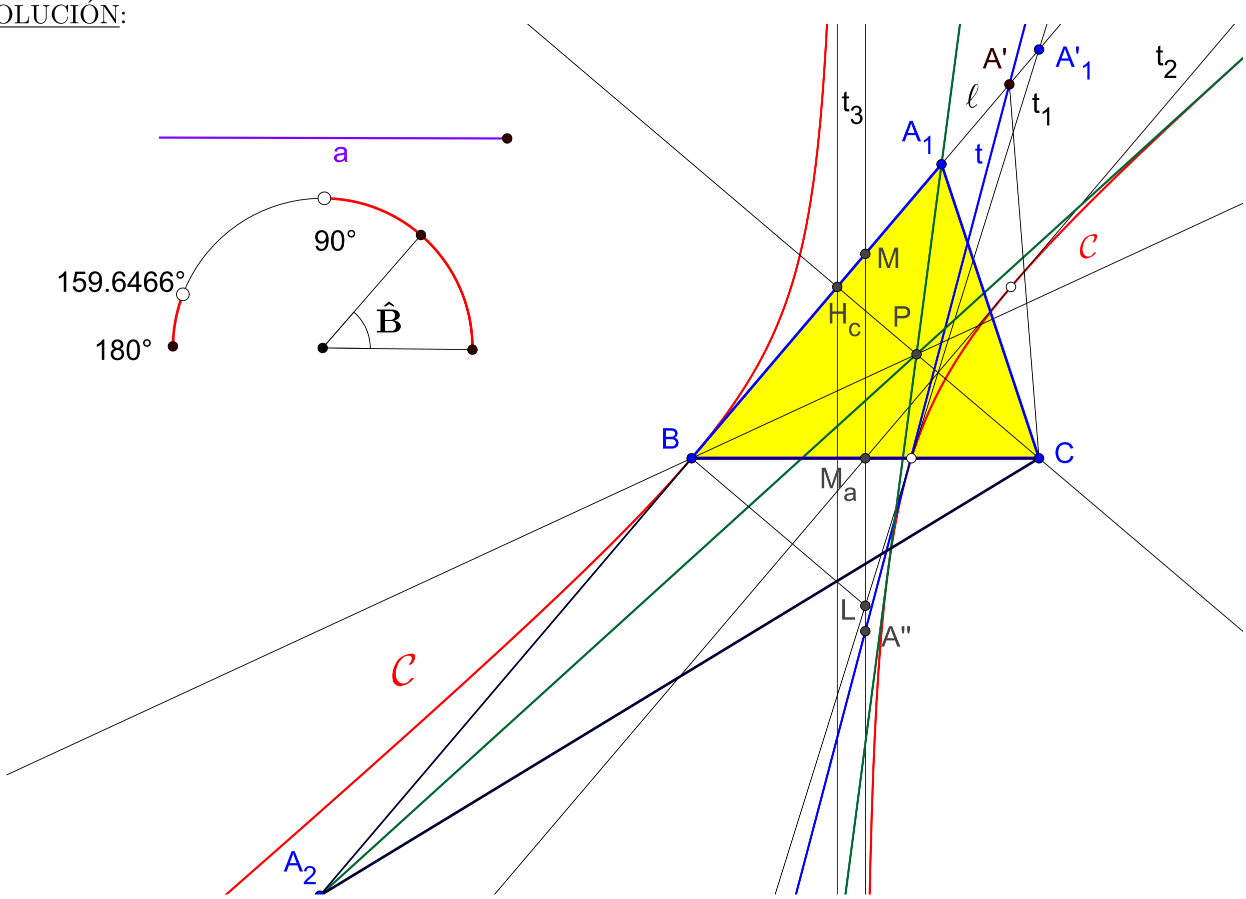
Construir un triángulo dados un lado, un ángulo adyacente y tal que la bisectriz interior del ángulo dado, la altura desde el otro extremo y la simediana por el vértice opuesto sean concurrentes. Es decir:

Construir un triángulo ABC si se dan los siguientes datos
1) la longitud a del lados BC
2) el ángulo en B
3) la bisectriz interior en B, la altura desde C y la simediana por A son concurrentes.

SOLUCIÓN:



Descargar fichero GeoGebra

Problema propuesto por Antreas Hatzipolakis en Anopolis #1897
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Anopolis/conversations/messages/1897
Con el siguiente enunciado:

> To construct triangle ABC if are given:
> 1. the length h_a of the altitude from A
> 2. the angle C
> 3. The property:
>
> the altitude from A, the symmedian from B and the interior bisector of the angle C are concurrent.

De estos datos surge que la longitud del lado AC es conocida $b = h_a/\operatorname{sen} C$. Por lo que para resolver el problema propuesto por Antreas Hatzipolakis, basta con hacer la construcción propuesta en este ejercicio.

- Se traza el segmento BC de longitud dada a.
- Se traza por B la recta ℓ que forma con BC un ángulo dado $\hat{B}$.
- Tomamos un punto A' sobre la recta ℓ y trazamos la simediana t por este punto en el triángulo $A'BC$. Esta simediana es la recta que une A' con el punto de intersección A'' de las tangentes en B y C a la circunferencia circunscrita al triángulo $A'BC$; o bien, la reflexión de la mediana $A'M_a$ respecto a la bisectriz en A'.

Tendremos que buscar la posición del punto A' para que la simediana t pase por el punto P de intersección de la bisectriz interior en B y la altura desde C.

Ya que la correspondencia $A' \longmapsto A''$, entre la recta ℓ y la mediatriz de BC, es una proyectividad (3), las simedianas

$t = A'A''$ envuelven una cónica $\mathcal{C}$, tangente a estas dos rectas. Cada tangente a $\mathcal{C}$ desde P es una simediana del triángulo buscado ABC en el vértice A, de intersección de dicha tangente con ℓ.

La cónica $\mathcal{C}$ puede construirse conociendo cinco tangentes (de las cuales ya conocemos dos), las cuales surgen de posiciones particulares del punto A' en ℓ. Tomemos los tres siguientes:

1) Sea A'_1 la reflexión de B en el punto de intersección M de ℓ con la mediatriz de BC. Entonces, BA'_1 es un diámetro de la circunferencia circunscrita a A'_1BC. La simediana t_1 es la recta que pasa por A'_1 y por el punto de intersección L de la mediatriz de BC con la perpendicular en B a ℓ.

2) Cuando A' es el punto del infinito de ℓ, la tangente t_2 es la paralela a ℓ por el punto medio M_a de BC.

3) Cuando $A' = H_c$, pie de la altura desde C, la circunferencia circunscrita a H_cBC tiene diámetro BC; por lo que, la simediana t_3 es la perpendicular a BC por H_c.

Existirá solución, a este problema de construcción, cuando **las tangentes desde P a la cónica $\mathcal{C}$ sean reales y además cuando estas tangentes corten a la semirrecta con origen en B y contenida en ℓ, que forme un ángulo $\hat{B}$ con BC.**

$$\boxed{\textbf{Sólo existe solución cuando } 0 < \hat{A} < \pi/2.}$$

La justificación analítica de esta afirmación la podemos hacer usando coordenadas baricéntricas, tomando A_0BC como triángulo de referencia, siendo A_0 un punto cualquiera en la recta ℓ. Las longitudes de los lados opuestos a cada vértice de este triángulo las designamos con las letras a (valor conocido por el enunciado), b y c, respectivamente.

Tratamos de encontrar los puntos $A(t : 1 - t : 0)$ en el lado BA_0 tales que, en el triángulo ABC, la bisectriz en B, la altura por C y la simediana por A, sean concurrentes:
Bisectriz en B: $cx - az = 0$.
Altura por B: $(a^2 - b^2 - c^2)x + (a^2 - b^2 + c^2)y = 0$.
Simediana por A_0: $c^2(-1 + t)tx + c^2t^2y + (a^2(-1 + t) - (b^2 + c^2(-1 + t))t)z = 0$.
Estas tres rectas son concurrentes si solo si:

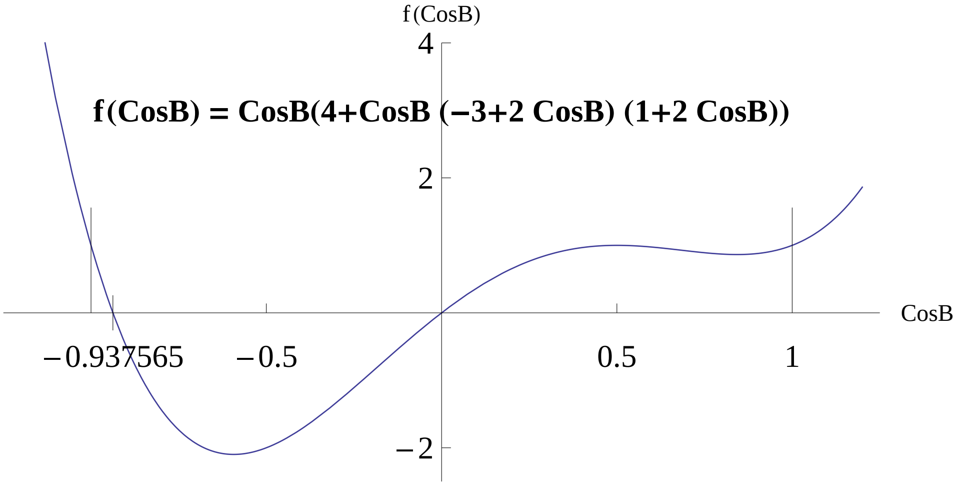
$$(a - b - c)(a + b - c)c^2t^2 - (a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - ac + c^2)t + a^2(a^2 - b^2 + c^2) = 0. \tag{1}$$

Para que exista solución real de esta ecuación de segundo grado en t, se debe verificar que su discriminate:

$$(a^2 - b^2 + c^2) \tag{2}$$
$$(a^6 - 3a^4b^2 + 3a^2b^4 - b^6 - 2a^5c + 4a^3b^2c - 2ab^4c - 3a^2b^2c^2 + 3b^4c^2 + 4a^3c^3 + 4ab^2c^3 - 3b^2c^4 - 2ac^5 + c^6) > 0.$$

Que equivale, usando la relación $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$, a que:

$$4a^4c^4 \cos B(4 - 3\cos B - 4\cos^2 B + 4\cos^3 B) > 0.$$

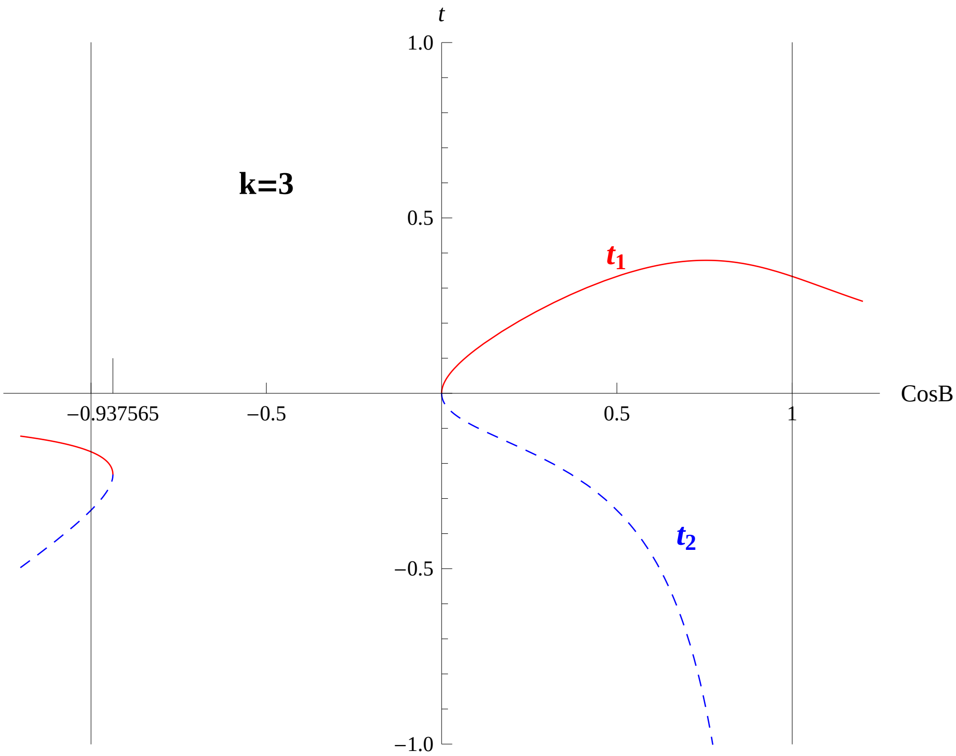


Luego, existe tangentes reales desde P a $\mathcal{C}$ si:

$$0 < \hat{B} < \pi/2 \qquad \text{ó} \qquad \arccos(\frac{1}{6}\left(2 - \frac{13}{\sqrt[3]{73 - 6\sqrt{87}}} - \sqrt[3]{73 - 6\sqrt{87}}\right)) < \hat{B} < \pi.$$

Las soluciones de la ecuación (1), poniendo $c = ka$, son:

$$t_1, t_2 = \frac{\cos B - 2\cos^2 B \pm \sqrt{\cos B(4 - 3\cos B - 4\cos^2 B + 4\cos^3 B)}}{2(1 - \cos B)k}.$$



Para que los puntos de coordenadas $(t_1 : 1 - t_1 : 0)$ o $(t_2 : 1 - t_2 : 0)$ estén en la semirrecta con origen en B y contenida en ℓ, que forme un ángulo $\hat{B}$ con BC, los valores de t_1 o t_2 han de ser positivos. Se concluye que solamente se puede construir el triángulo ABC pedido si $\boxed{0 < \hat{A} < \pi/2}$.

Otra manera de encontrar la condición analítica para que la construcción sea posibles, es determinando la ecuación de la cónica envolvente de las rectas $A'A''$.

La correspondencia:

$$A'(t; 1 - t : 0) \longmapsto A''(-a^2 : b^2 + c^2(-1 + t) : c^2 t), \tag{3}$$

es una proyectividad.

La envolvente de las rectas:

$$A'A'' :\ -c^2(-1 + t)tx - c^2t^2y + (-a^2(-1 + t) + (b^2 + c^2(-1 + t))t)z = 0,$$

es la hipérbola:

$$\mathcal{C} : c^4x^2 + (a - b - c)(a + b - c)(a - b + c)(a + b + c)z^2 + 4a^2c^2yz + 2c^2(a^2 + b^2 - c^2)zx = 0.$$

La polar del punto $P(a(a^2 - b^2 + c^2) : a(-a^2 + b^2 + c^2) : c(a^2 - b^2 + c^2))$, de intersección de la bisectriz interior en B y la altura desde C, respecto a $\mathcal{C}$, corta ésta si y solo si se verifica la condición (2).

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2534.pdf