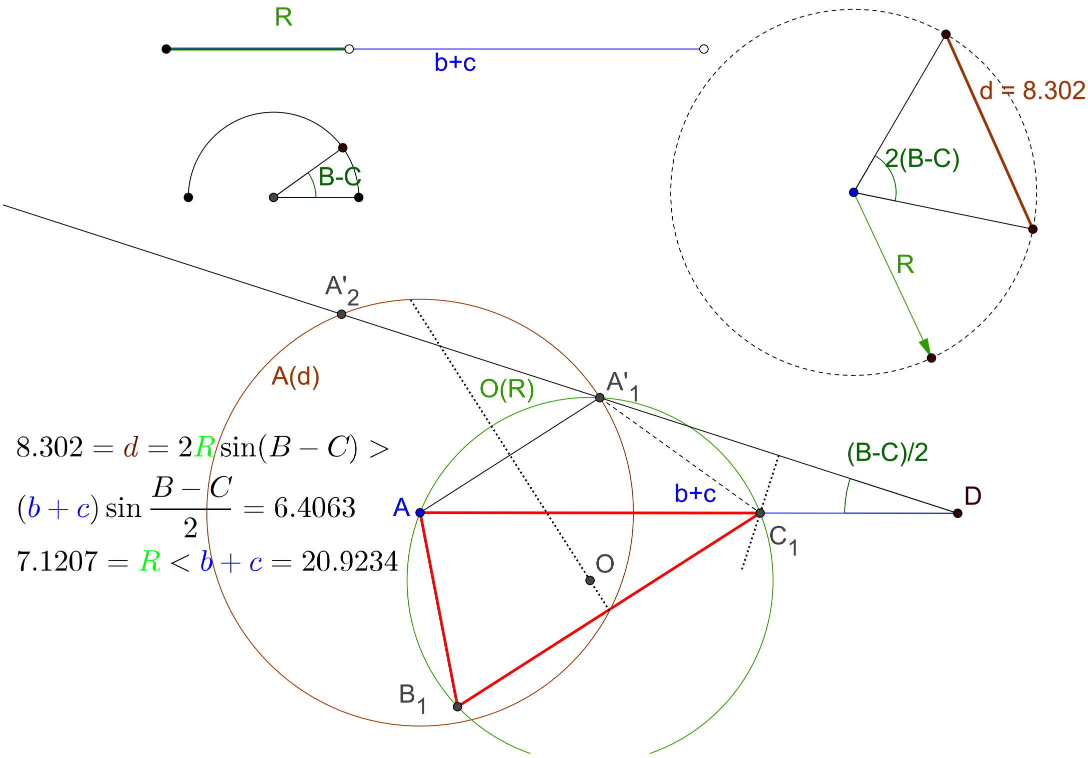
Construir un triángulo ABC conocidos el radio R de la circunferencia circunscrita, $b+c$ y $\hat{B}-\hat{C}$.

SOLUCIÓN:



Hoja dinámica GeoGebra

Supongamos el triángulo ABC construido, inscrito en una circunferencia de radio R.

Sea A' la reflexión del vértice A en la mediatriz de BC. Entonces, $\widehat{ACA'} = \hat{B}-\hat{C}$ (dato conocido) y, por tanto, la magnitud de la cuerda AA' queda determinada: En una circunferencia de radio R, trazamos un ángulo de amplitud $2(\hat{B}-\hat{C})$ y vértice en el centro de la misma. Sus lados intersecan a la circunferencia en dos puntos, que determinan una cuerda de longitud $d = \overline{AA'}$.

Si prolongamos AC hasta el punto D, tal que $CD = AB = CA'$, el triángulo $CA'D$ es isósceles. Por tanto, $\widehat{CDA'} = (\hat{B}-\hat{C})/2$ y $AD = b+c$ (dato conocido).

Del triángulo DAA' conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Puede ser construido:

Trazado el lado AD de longitud $b+c$ dada, sobre el vértice D se traza la semirrecta que forma con DA un ángulo $(\hat{B}-\hat{C})/2$, dado. La circunferencia de centro A y radio d (longitud conocida), corta a la semirrecta en el vértice A'_1 (y A'_2), que faltaba determinar. Para que haya solución se ha de verificar que:

$$d = 2R\,\mathrm{sen}(\hat{B}-\hat{C}) \geq (b+c)\,\mathrm{sen}\,\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2},$$

o bien:

$$4R\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} \geq (b+c).$$

Ahora, para construir el triángulo pedido AB_1C_1, trazamos la mediatriz de DA'_1, que corta a AD en C_1. La reflexión de C_1 en la mediatriz de AA'_a nos da el vértice B_1.

Con el punto A'_2 se obtiene otro triángulo AB_2C_2 congruente con AB_1C_1.

Otra restricción para que la construcción sea posible es que $R < b+c$.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2542.pdf