

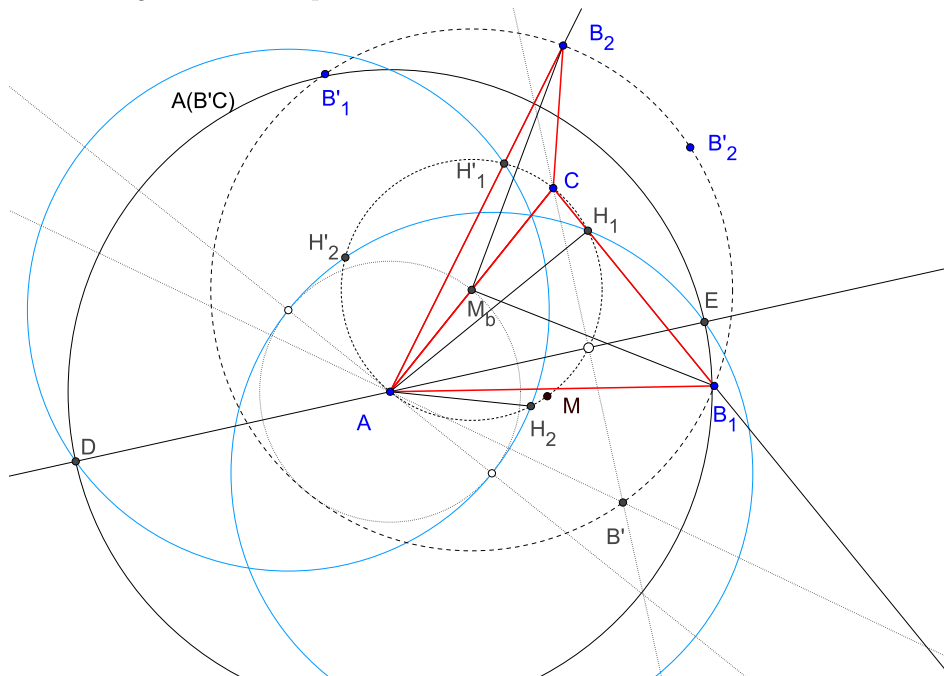
Construir un triángulo ABC , tal que $h_a = a, m_b = b$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **788**.
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Propuesto por Ricardo Barroso, con el siguiente enunciado:

Construir un triángulo ABC , tal que $h_a = a, m_b = b$.



Construcción con GeoGebra

Una construcción algebraica

El cuadrado de la longitud de la altura h_a desde el vértice A de un triángulo ABC es $((b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c))/(4a^2)$. Y el cuadrado de la longitud de la mediana m_b desde el vértice B es $1/4(2a^2 - b^2 + 2c^2)$. Por lo que las longitudes de los lados del triángulo a construir deben satisfacer a las ecuaciones

$$5a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4 = 0, 2a^2 - 5b^2 + 2c^2 = 0.$$

Tomando de partida un segmento AC de longitud b ,

$$a = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 - \sqrt{7})}, \quad c = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(15 + \sqrt{7})}, \quad a = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{7})}, \quad c = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(15 - \sqrt{7})}.$$

Cantidades construibles con regla y compás, conocido un segmento de longitud b .

Una construcción utilizando lugares geométricos.

Sobre un segmento AC de longitud b , se construye un triángulo variable $AB'C$ tal que la mediana $B'Ma$ tenga longitud b . Para construir el triángulo pedido, la posición del vértice B' debe ser tal que los pies de las alturas desde A han de ser los puntos de intersección D y E de la perpendicular por A a $B'C$ con la circunferencia $A(B'C)$, centrada en A y de radio $B'C$. Los lugares geométricos descritos por los puntos D y E son sendas circunferencias con centros en los puntos de intersección de la perpendicular por A a AC y mismo radio igual a b . Estas circunferencias intersecan a la circunferencia de diámetro AC (sobre la que deben estar los pies de las alturas) en cuatro puntos, que son los pies de las alturas desde A a cuatro triángulos solución del problema (simétricos dos a dos).

<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf>
<http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2546.pdf>