

Construir un triángulo ABC conociendo la suma de los lados adyacentes al vértice A y los radios de las circunferencias inscrita y exinscrita relativa al vértice A .

SOLUCIÓN:

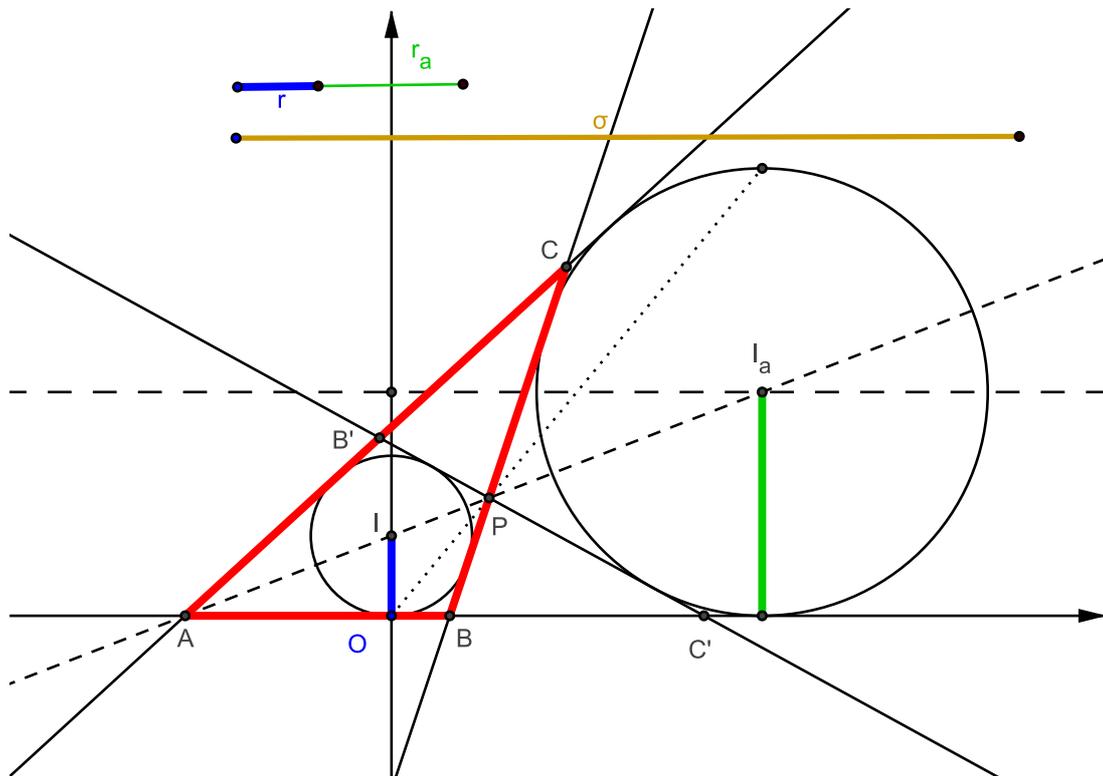
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número 810.
<http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm>

Con el siguiente enunciado:

Construir el triángulo cuyos datos son $r, R_a, (b+c)$. (r , radio de la circunferencia inscrita; y R_a el de la exinscrita del ángulo A)

Santamaría, J. (2017)

Abordamos el problema usando coordenadas cartesianas con el fin de encontrar las coordenadas del vértice A del triángulo a construir, las cuales serán cantidades constructibles con recta y compás.



Hoja dinámica GeoGebra

Consideremos la circunferencia $I(r)$ de radio r , dado, con centro en el punto $I(0, r)$ y tangente al eje de abscisas en el origen O de coordenadas. Tomemos el vértice $A(t, 0)$; los otros vértices B y C , del triángulo a construir, deben estar sobre las tangentes a $I(r)$ desde A (una de ellas es el eje de abscisas).

El centro I_a de la circunferencia exinscrita $I_a(r_a)$ es la intersección de la bisectriz AI con la recta paralela al eje de abscisas a una distancia r_a , dada.

Los pares de tangentes exteriores e interiores a las dos circunferencias $I(r)$ y $I_a(r_a)$ se intersectan en los centros de homotecia exterior A e interior P tal que $I_aP : PI = r_a : r$. Por lo que se tiene que

$$P \left(\frac{t(r-r_a)}{r+r_a}, \frac{2rr_a}{r+r_a} \right).$$

Las dos tangentes exteriores con cada una de las tangentes interiores determinan sendos triángulos ABC y $AB'C'$ (simétricos respecto a AI).

La ecuación conjunta de las tangentes a la circunferencia $I(r)$, $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, desde P viene por:

$$4r^3r_ax^2 + (r^2(r+r_a)^2 - (r-r_a)^2t^2)y^2 - 2r(r-r_a)^2txy - 4r^2(r-r_a)r_atx - 2r(2r^3r_a + (2r-r_a)r_at^2 + r^2(2r_a^2 - t^2))y + 4r^4r_a^2 = 0$$

Los puntos de intersección de estas tangentes con el eje OX tienen abscisas:

$$\frac{t(r - r_a) \pm \sqrt{t^2(r - r_a)^2 - 4r^3r_a}}{2r}$$

La suma de estas abscisas mas $2t$ es $b + c$, que ha de ser igual a la cantidad σ dada. Por los que

$$t = -\frac{r\sigma}{r + r_a}.$$

Esta cantidad es constructible con regla y compás.

CONSTRUCCIÓN

- Trazamos una circunferencia de radio r (dado) con centro en un punto I .
- Trazamos la tangente en un punto O de esta circunferencia.
- Elegimos uno de los puntos (que designamos por A) en los que esta tangente corta a la circunferencia de centro O y radio $\frac{r\sigma}{r+r_a}$, siendo $\sigma = b + c$ una cantidad dada.
- En la semirrecta OI tomamos el punto de intersección con la circunferencia $O(r_a)$, de centro en O y radio r_a (dado), y por este punto trazamos la paralela a la tangente en O , que habíamos trazado.
- Esta paralela corta a la recta AI en el punto I_a ; por lo que ya podemos trazar la circunferencia $I_a(r_a)$.
- Construimos el punto P que divide al segmento II_a en la razón r_a/r .
- Finalmente, las tangentes desde P a $I(r)$ determinan con las tangentes desde A dos triángulos congruentes, que dan la solución al problema planteado.