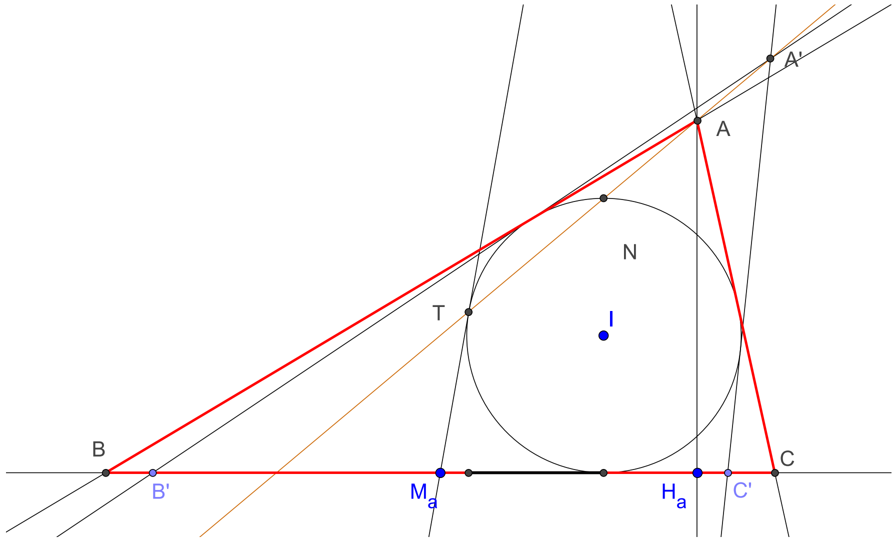
Construir un triángulo conocidos, en posición, el incentro y los pies de la mediana y la altura desde uno de sus vértices.

SOLUCIÓN:



Hoja dinámica GeoGebra

Vamos a construir un triángulo ABC, del que se conoce su incentro I y los pies H_a y M_a de la altura y mediana desde el vértice A. Sea Γ la circunferencia inscrita, con centro en I y tangente a la recta M_aH_a. Sean T el punto de tangencia de la tangente desde M_a a Γ (distinta de M_aH_a) y N el punto de contacto de la tangente a Γ paralela a M_aH_a.

La recta TN corta a la perpendicular en H_a a M_aH_a en A. Las tangentes a Γ desde A cortan a la recta M_aH_a en los vértices B y C del triángulo ABC pedido.

Damos un estudio analítico, a fin de establecer las condiciones de ubicación de los puntos I, H_a y M_a para que exista solución.

Si el triángulo a construir fuera isósceles, es decir $H_a = M_a$, claramente hay infinitas soluciones.

En un sistema de coordenadas cartesinas rectangular, sean $I(0,r), H_a(h,0)$ y $M_a(m,0)$, con $r > 0$ y $m < 0$. La circunferencia inscrita $\Gamma = I(r)$ al triángulo a construir tiene ecuación:

$$x^2 - 2ry + y^2 = 0.$$

Las tangentes desde $B'(\xi,0)$ y $C'(2m-\xi,0)$, simétrico de B' respecto a M_a, son

$$r^2(-y) - 2\xi^2 r + 2\xi rx + \xi^2 y = 0, \quad 8m^2r - 4m^2y - 8m\xi r - 4mrx + 4m\xi y + r^2y + 2\xi^2 r + 2\xi rx - \xi^2 y = 0,$$

que se intersecan en

$$A'\left(\frac{2mr^2z}{2m\xi - \xi^2 + r^2}, -\frac{2z\left(\xi^2 r - 2m\xi r\right)}{2m\xi - \xi^2 + r^2}\right)$$

El lugar geométrico decrito por A', cuando B' varía, es la recta de escuación:

$$rx + my - 2mr = 0,$$

que pasa por T y $N(0,2r)$ puntos de contacto de las tangentes a Γ desde M_a y paralela a H_aM_a.

La tangente desde M_a es:

$$2mrx + (m^2 - r^2)y - 2m^2 r = 0,$$

y el punto de tangencia es

$$T\left(\frac{2mr^2}{m^2+r^2}, \frac{2m^2r}{m^2+r^2}\right).$$

La recta NT corta a la perpendicular, $x=h$, en H_a a H_aM_a en:

$$A\left(h, \frac{r(2m-h)}{m}\right).$$

La ecuación conjunta de las tangentes a Γ desde A es:

$$h^2r^4-4hmr^4+4m^2r^4+2h^2mr^2x-4hm^2r^2x-h^2r^2x^2+2hmr^2x^2+2h^2m^2ry+2hmr^3y$$

$$-4m^2r^3y-2h^2mrxy+2hm^2rxy-h^2m^2y^2+m^2r^2y^2=0.$$

Las cuales cortan a la recta H_aM_a en los vértice B y C:

$$\left(\frac{hm\pm\sqrt{h\left(h\left(m^2+r^2\right)-2mr^2\right)}}{h}, 0\right).$$

Se concluye (siendo $r>0$ y $m<0$) que para $h>0$ existe solución; para $2mr^2/(m^2+r^2)<h<0$ no existe solución (H_a sobre la proyección del segmento NT sobre la recta H_aM_a); y para $h<2mr^2/(m^2+r^2)$, la circunferencia Γ es exinscrita a ABC.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/trresolu.pdf
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2558.pdf