Consideremos el plano $\pi \equiv x - 2y - z = 1$ y la recta $r \equiv x - 1 = 2 - y, z = 2x - 2$. Hallar:

1. Ecuación de la recta perpendicular a r contenida en π y en coplanaria con r.
2. Ecuación de la recta proyección ortogonal de r sobre el plano π.
3. Angulo que forma la recta r con su proyección ortogonal.
4. Punto simétrico del $(0, 2, -1)$ respecto a la recta r.

SOLUCIÓN:
1) El punto de intersección de π y r se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$x - 2y - z = 1, \qquad x - 1 = 2 - y, \quad z == 2x - 2.$$

Obteniéndose el punto de coordenadas $(5, -2, 8)$.

Vector perpendicular al plano $(1, -2, -1)$. Vector director de la recta $(1, 1, 0) \times (2, 0, -1) = (-1, 1, -2)$.
Vector director de la recta pedida: $(1, -2, -1) \times (-1, 1, -2) = (5, 3, -1)$ y como pasa por $(5, -2, 8)$ su ecuación es:

$$x + 5z = 45, \qquad y + 3z = 22.$$

2) El plano perpendicular a π que contiene a r:

$$(5, 3, -1) \cdot (x - 5, y + 2, z - 8) = 0 \quad \Rightarrow 5x + 3y - z = 11.$$

Vector director de la recta proyección es el producto vectorial:

$$(5, 3, -1) \times (1, -2, -1) = (-5, 4, -13).$$

Y como pasa por $(5, -2, 8)$, sus ecuaciones son:

$$13x - 5z = 25, \qquad 13y + 4z = 6.$$

3)

$$\cos\theta = \frac{(-1, 1, -2) \cdot (-5, 4, -13)}{\sqrt{(-1, 1, -2) \cdot (-1, 1, -2)}\sqrt{-5, 4, -13) \cdot (-5, 4, -13)}} = \frac{\sqrt{35}}{4} \Rightarrow \theta \simeq 9.59407°.$$

4) Plano perpendicular por $(0, 2, -1)$ a la recta r: $x - y + 2z + 4 = 0$.
El punto de intersección de la recta r con el plano perpendicular por $(0, 2, -1)$ es $(1/2, 5/2, -1)$, solución de las ecuaciones::

$$-2 - x + y - 2(1 + z) == 0, x - 1 == 2 - y, z == 2x - 2.$$

El punto simétrico de $(0, 2, -1)$ respecto a r es:

$$2\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -1\right) - (0, 2, -1) = (1, 3, -1).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejga1192.pdf