

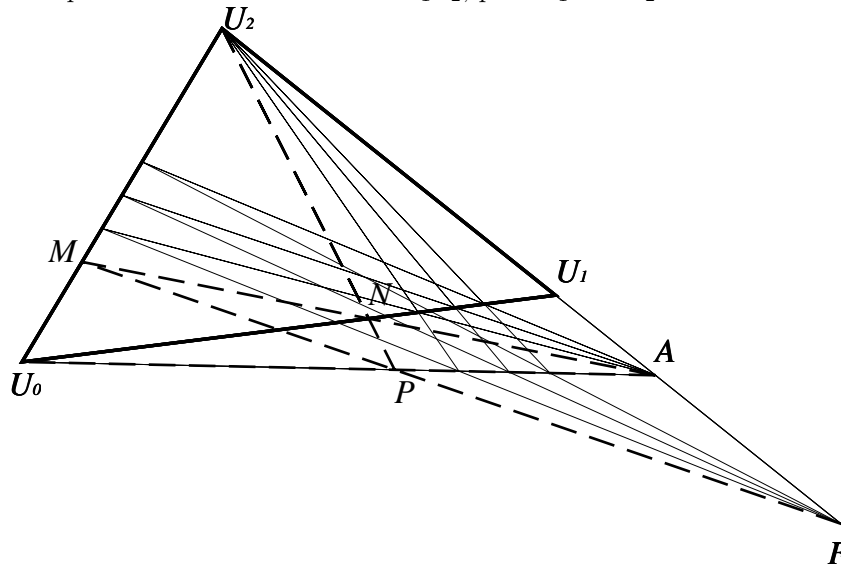
Se considera en el plano proyectivo real un sistema referencia proyectivo $\{U_0, U_1, U_2; U\}$ y el punto $A(0, 1, 1)$ (en la recta U_1U_2). Se traza por A una recta ℓ variable que corta a U_0U_2 en M y a U_0U_1 en N . Sea P el punto de intersección de U_2N y U_0A . Demostrar que la recta MP pasa por un punto fijo cuando ℓ varía.

SOLUCIÓN:

Primer método:

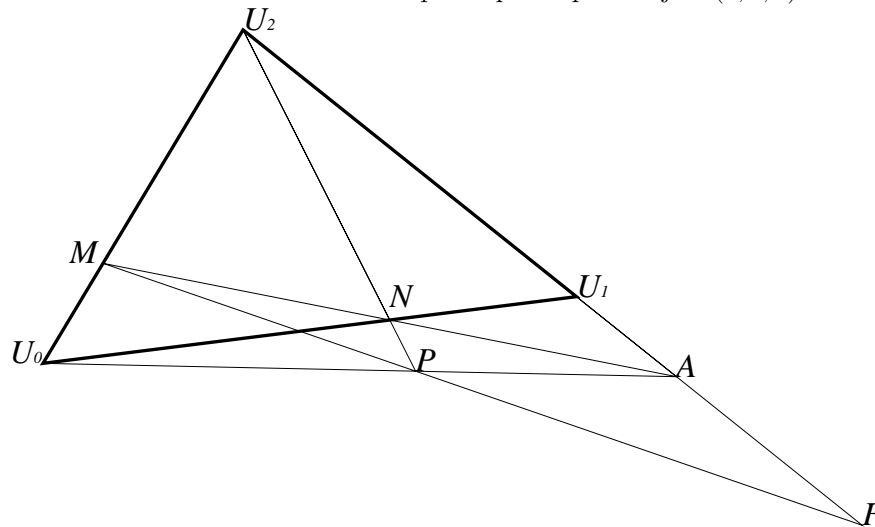
Proyectando desde A , tenemos una proyectividad entre las rectas U_0U_2 y U_0U_1 , $U_0U_2 \xrightarrow{\sigma} U_0U_1$ $M \mapsto N$, y otra entre U_0U_1 y U_0A , proyectando desde U_2 , $U_0U_1 \xrightarrow{\tau} U_0A$ $N \mapsto P$

La composición $\tau\sigma: U_0U_1 \rightarrow U_0A$ es una proyectividad que deja el punto U_0 , intersección de $U_0U_2 \cap U_0A$, fijo. Luego se trata de una perspectividad y, por consiguiente, puntos homólogos M y P , determinan rectas que se cortan en un mismo punto. Dicho punto debe estar en la recta U_1U_2 , pues $U_1 \xrightarrow{\sigma} U_2 \xrightarrow{\tau} A$.



Segundo método (usando coordenadas):

Asignándole coordenadas a los puntos $U_0(1, 0, 0)$, $U_1(0, 1, 0)$, $U_2(0, 0, 1)$, $A(0, 1, 1)$ y $M(1, 0, t)$, tenemos que la ecuación de la recta AM tiene por ecuación $tx^0 + x^1 - x^2 = 0$ y el punto de intersección de las rectas AM y U_0U_1 es $N(1, -t, 0)$. Las ecuaciones de las rectas U_2N y U_0A son, respectivamente, $-tx^0 - x^1 = 0$ y $-x^1 + x^2 = 0$ y su punto de intersección $P = (1, -t, -t)$. Así las rectas MP : $tx^0 + 2x^1 - x^2 = 0$ pasan por el punto fijo $F(0, 1, 2)$.



NOTAS: Si se sabe donde está ubicado el punto U , el punto $A(0, 1, 1)$ es la intersección de U_0U con U_1U_2 .

Los gráficos anteriores están generados directamente en lenguaje PostScript. El código del primero es (Descargalo aquí):

```

%!PS-Adobe-3.0 EPSF-3.0
%%BoundingBox: 188 0 516 214

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% { Reg.: 887 }{ Cód.: 402 } %
% Se considera en el plano proyectivo real un sistema de %
% referencia proyectivo  $\{U_0, U_1, U_2; U\}$  y el punto  $A(0,1,1)$ . %
% Se traza por  $AA$  una recta  $\ell$  variable que corta a  $U_0 U_2$  en %
%  $MM$  y a  $U_0 U_1$  en  $NN$ . Sea  $PP$  el punto de intersección de %
%  $U_2N$  y  $U_0 A$ . Demostrar que la recta  $MP$  pasa por un punto %
% fijo cuando  $\ell$  varía. %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% ----- DATOS -----
/s 2.5 def %escala
/Times-Italic findfont
2 s mul scalefont setfont
%
% ---> ----->
/a -.3 def % Constante para ubicar el punto A (fijo):  $U_1A = a U_1U_2$ 
% aunque otros elementos pueden quedar mal si se varía

% Constantes para las coordenadas de  $U_0, U_1$  y  $U_2$ :
/U01 0 def /U02 0 def
/U11 80 def /U12 10 def
/U21 30 def /U22 50 def

%----- MACROS -----
/det {3 1 roll mul neg 3 1 roll mul add} def
% Determinante de una matriz 2 x 2

% Bucle para pintar varias rectas AM (variando M)
.3 .1 .7 {/t exch def % t parámetro para rectas que pasan por A
gsave

%----- CALCULOS -----
/A1 U11 U21 U11 neg add a mul add def % Punto fijo en  $U_1A = a U_1U_2$ 
/A2 U12 U22 U12 neg add a mul add def

/M1 U01 U21 U01 neg add t mul add def % Punto variable en  $U_0M = tU_0U_2$ 
/M2 U02 U22 U02 neg add t mul add def

% Recta que pasa por  $(a_1, a_2)$  y  $(b_1, b_2)$ 
%
% 
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} |a_2 & 1| & |a_1 & 1| & |a_1 & a_2| \\ | & x + & | & y + & | \\ |b_2 & 1| & |b_1 & 1| & |b_1 & b_2| \end{vmatrix} = 0$$

%
% Recta que pasa por  $(c_1, c_2)$  y  $(d_1, d_2)$ 
%
% 
$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} |c_2 & 1| & |c_1 & 1| & |c_1 & c_2| \\ | & x + & | & y + & | \\ |d_2 & 1| & |d_1 & 1| & |d_1 & d_2| \end{vmatrix} = 0$$

%
% Coordenadas del punto de intersección de estas dos rectas:
%
% 
$$x = \frac{\begin{vmatrix} |a_2 & 1| & |a_1 & 1| \\ |b_2 & 1| & -|b_1 & 1| \\ |c_2 & 1| & |c_1 & 1| \\ |d_2 & 1| & -|d_1 & 1| \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} |a_2 & 1| & |a_1 & 1| \\ |b_2 & 1| & -|b_1 & 1| \\ |c_2 & 1| & |c_1 & 1| \\ |d_2 & 1| & -|d_1 & 1| \end{vmatrix}}$$


```

```

%
% | |a_2 1| |a_1 a_2||
% | |b_2 1| - |b_1 b_2||
% | |
% | |c_2 1| |c_1 c_2||
% | |d_2 1| - |d_1 d_2||
% y= -----
% | |a_2 1| |a_1 1||
% | |b_2 1| - |b_1 1||
% | |
% | |c_2 1| |c_1 1||
% | |d_2 1| - |d_1 1||
%

% Punto N(N1,N2) de intersección de las rectas U_OU_1, AM
/N1
U01 U02 U11 U12 det neg
U01 1 U11 1 det neg
A1 A2 M1 M2 det neg
A1 1 M1 1 det neg det
U02 1 U12 1 det U01 1 U11 1 det neg A2 1 M2 1 det A1 1 M1 1 det neg
det div def

/N2
U02 1 U12 1 det
U01 U02 U11 U12 det neg
A2 1 M2 1 det
A1 A2 M1 M2 det neg det
U02 1 U12 1 det U01 1 U11 1 det neg A2 1 M2 1 det A1 1 M1 1 det neg
det div def

% Punto P(P1,P2) de intersección de las rectas U_2N, U_OA
/P1
U21 U22 N1 N2 det neg
U21 1 N1 1 det neg
A1 A2 U01 U02 det neg
A1 1 U01 1 det neg det
U22 1 N2 1 det U21 1 N1 1 det neg A2 1 U02 1 det A1 1 U01 1 det neg
det div def

/P2
U22 1 N2 1 det
U21 U22 N1 N2 det neg
A2 1 U02 1 det
A1 A2 U01 U02 det neg det
U22 1 N2 1 det U21 1 N1 1 det neg A2 1 U02 1 det A1 1 U01 1 det neg
det div def

% Punto F(F1,F2) de intersección de las rectas MP, U_1U_2
/F1
M1 M2 P1 P2 det neg
M1 1 P1 1 det neg
U21 U22 U11 U12 det neg
U21 1 U11 1 det neg det
M2 1 P2 1 det M1 1 P1 1 det neg U22 1 U12 1 det U21 1 U11 1 det neg
det div def

/F2
M2 1 P2 1 det
M1 M2 P1 P2 det neg
U22 1 U12 1 det
U21 U22 U11 U12 det neg det
M2 1 P2 1 det M1 1 P1 1 det neg U22 1 U12 1 det U21 1 U11 1 det neg
det div def

%----- DIBUJO -----
200 80 translate
.1 setlinewidth

s s scale

U01 U02 moveto U11 U12 lineto U21 U22 lineto closepath % Triángulo
gsave
.5 setlinewidth
stroke
grestore

```

```

%U21 U22 moveto
A1 A2 moveto M1 M2 lineto U21 U22 lineto % Recta AM
      % (añadiéndole trozos a los lados si es necesario)

U21 U22 moveto N1 N2 lineto % Recta U_2N

A1 A2 moveto U01 U02 lineto % Recta AU_1

U21 U22 moveto P1 P2 lineto % Recta U_2P (Encima de U_2N)

%U21 U22 moveto F1 F2 lineto
F1 F2 moveto
  P1 P2 lineto M1 M2 lineto % Recta MF (Pasa por P)

gsave
.3 t eq {
.4 setlinewidth
  [4 2] 0 setdash
  stroke
  }{} ifelse
grestore

.3 t lt {
U21 U22 moveto A1 A2 lineto M1 M2 lineto U21 U22 lineto % Recta AM
      % (añadiéndole trozos a los lados si es necesario)
A1 A2 moveto F1 F2 lineto
stroke}{} ifelse

U01 -2 add U02 -5 add moveto (U) show gsave .5 .5 scale (0) show
grestore
U11 U12 2 add moveto (U) show gsave .5 .5 scale (1) show grestore
U21 U22 moveto (U) show gsave .5 .5 scale (2) show grestore
A1 A2 2 add moveto (A) show
.3 t eq {N1 N2 2 add moveto (N) show %Poner M, N y P sólo una vez
  M1 -5 add M2 moveto (M) show
  P1 P2 -5 add moveto (P) show}{} ifelse
F1 -2 add F2 -6 add moveto (F) show

grestore
}for

showpage

%%Trailer

```