El lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas sobre una esfera es una curva esférica.

SOLUCIÓN:
Problema sugerido por Francisco Javier García Capitán.

Hoja dinámica GeoGebra

Dos circunferencias dadas sobre una esfera se pueden proyectar una en otro desde un punto (son secciones de un cono).

Sin pérdida de generalidad, podemos elegir una esfera unidad centrada en el origen de coordenadas $O(0,0,0)$, tomar una de las circunferencias dadas como un paralelo, en un plano perpendicular al eje OZ y el vértice del cono $V(0,b,c)$ en el plano YOZ.

Tomando como parametrización de la esfera:

$$(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \operatorname{sen} v),$$

un punto M del paralelo tiene coordenadas $(\cos u \cos v_0, \sin u \cos v_0, \operatorname{sen} v_0)$.

El vector tangente en M al paralelo es $\vec{v} = (-\sin u \cos v_0, \cos u \cos v_0, 0)$.

El vector perpendicular al plano que contiene a la tangente en M y a la generatriz de cono de vértice $V(0,b,c)$ y que pasa por M es:

$$(\cos u \cos u_0(c - \sin v_0), \cos u_0 \sin u(c - \sin v_0), \cos u_0(\cos^2 u \cos u_0 - b \sin u + \cos u_0 \sin^2 u).$$

Plano que que contiene a la circunferencia pedida:

$$x \cos u(c - \sin v_0) + y \sin u(c - \sin v_0) + z(\cos^2 u \cos v_0 - b \sin u + \cos v_0 \sin^2 u) - c \cos v_0 + b \sin u \sin v_0 = 0.$$

La recta que pasa por el centro O de la esfera y es perpendicular a este palo lo corta en el punto N, que describe el centro de la circunferencia pedida, tangente a las dos circunferencias dadas:

$$\alpha(u) = \left(\frac{2 \cos u(c - \sin v_0)(c \cos v_0 - b \sin u \sin v_0)}{\Phi(u)}, \right.$$

$$\left. -(\frac{2, \sec v_0(c \cos v_0 - b \sin u \sin v_0)(-c \cos v_0 \sin u + \cos v_0 \sin u \sin v_0)}{\Phi(u)}, -\frac{\sec(v_0)\Psi(u)}{4\Phi(u)} \right).$$

donde

$$\Phi(u) = 2 + b^2 + 2c^2 - b^2 \cos 2u - 2b \sin(u - v_0) - 4c \sin v_0 - 2b \sin(u + v_0),$$

y

$$\Psi(u) = (b \cos(u - 3v_0) + b \cos(u - v_0) - 6c \cos v_0 - 2c \cos(3v_0) - b \cos(u + v_0) - b \cos(u + 3v_0) +$$

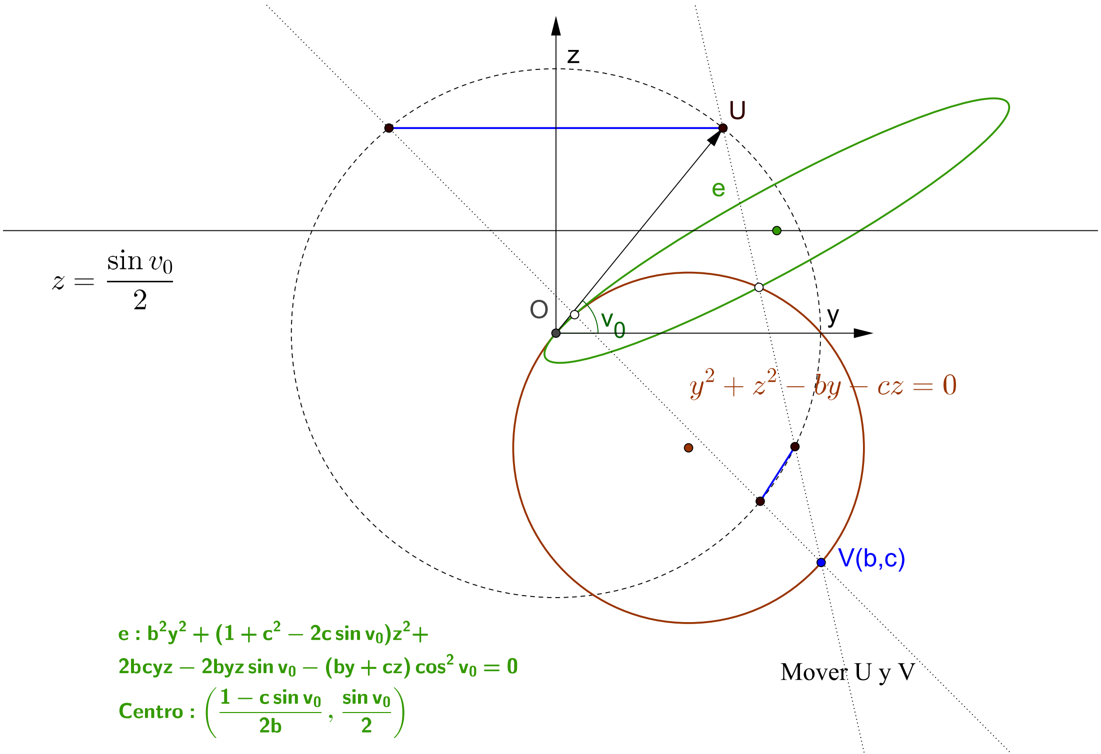
$$4bc \sin u + 2bc \sin(u - 2v_0) - b^2 \sin(2u - 2v_0) - 2b^2 \sin(2v_0) + 2bc \sin(u + 2v_0) + b^2 \sin(2u + 2v_0)).$$

Esta curva es la intersección de la esfera de diámetro OV con un cilindro de generatrices paralelas el eje OX, de ecuaciones respectivas:

$$x^2 + y^2 + z^2 - by - cz = 0,$$

$$b^2 y^2 + (1 + c^2 - 2c \sin v_0) z^2 + 2bcyz - 2byz \sin v_0 - (by + cz) \cos^2 v_0 = 0.$$

Proyección sobre el plano YOZ:



Hoja dinámica GeoGebra

Programa con Mathematica para obtener la ecuación paramétrica e implícita de la curva lugar geométricos de los centros de las circunferencias tangentes a dos dadas sobre la esfera unidad:

```
ptoM = {Cos[u] Cos[v0], Sin[u] Cos[v0], Sin[v0]};
(* Vector tangente en M *)
vtM = D[ptoM, u];
(*Vector perpendicular al plano que contiene a la tangente  en
M y a la recta VM *)
vnM = -Cross[vtM, ptoM - {0, b, c }]// Factor;
(*Plano  que que contiene a la circunferencia  pedida*)
plM = {x, y - b, z - c}.vnM // Factor // Last;
(* Intersección de este plano con la recta
que pasa por el centro de la circunferencia pedida*)
plM /. Thread[{x, y, z} -> t vnM];
Solve[% == 0, t];
(* Centro de la circunferencia *)
ptoN = t vnM /. %[[1]]

(* Esta curva es la intersección de una esfera con un cilindro
 de generatrices paralelas el eje OX:*)

 ptoN/. {Cos[u] -> U, Sin[u] -> V};
 Eliminate[{{X, Y, Z} == %, U^2 + V^2 == 1}, {U, V}]
 {ESFERA,CILINDRO}=Table[%[[i,1]]-%[[i,2]],{i,1,2}]

 (* Un caso particular: *)
 gr = ParametricPlot3D[cu[{2, -1}, \[Pi]/3][u], {u, 0, 2\[Pi]},
 PlotStyle -> Directive[Purple, Thick]];
 ESFERA1 = ESFERA /. {b -> 2, c -> -1, v0 -> \[Pi]/3};
 CILINDRO1 = CILINDRO /. {b -> 2, c -> -1, v0 -> \[Pi]/3};
 grEC = ContourPlot3D[{ESFERA1 == 0, 0 == CILINDRO1}, {X, -1, 1},
 {Y, -1, 1}, {Z, -1, 1}, Mesh -> None, PlotPoints -> 20];
 Show[{gr, grEC }, Boxed -> False, Axes -> False]
```

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejlg2545.pdf