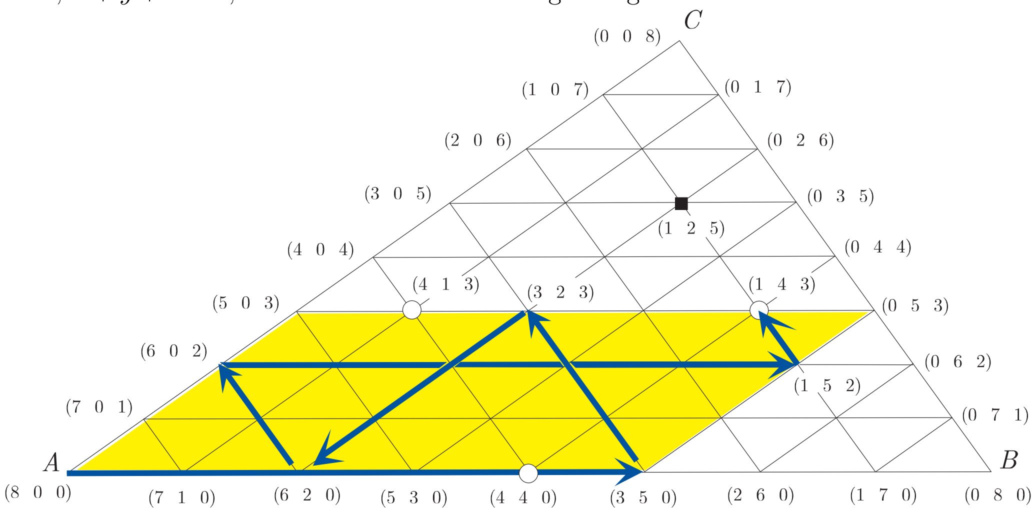
Problema de los tres vasos: "Dados tres vasos A, B, C de capacidades 8, 5 y 3 litros, respectivamente, de los cuales el primero está lleno de agua y los otrosa dos vacios. Se trata de dividir el agua en dos partes iguales vertiendo desde un vaso a los demás, sin utilizar ningún dispositivo de medición (sin, claro está, desperdiciar ni una gota)".

SOLUCIÓN:

Una curiosa aplicación [1] de las coordenadas baricéntricas (coordenadas homogéneas en la referencia proyectiva $\{A, B, C; G\}$, con punto unidad en el baricentro G de $\widehat{ABC}$) es la resolución del problema de los tres vasos.

Las ternas $(x : y : z)$ formadas por números enteros no negativos cuya suma es constante d, pueden ser representadas por los nodos (en el interior de un triángulo $\widehat{ABC}$) de la malla formada dividiendo cada lado en d partes iguales y trazando paralalelas a los lados por cada uno de los puntos de división. Poniéndonos en el caso particular del problema propuesto, es decir, $x + y + z = 8$, se tiene el mallado de la figura siguiente:



Las coordenadas de los vértices son $A(8 : 0 : 0), B(0 : 8 : 0), C(0 : 0 : 8)$ y, por el ejemplo, el punto punto marcado por un pequeño cuadrado tiene de coordenadas $(1 : 2 : 5)$. Dada la capacidad de los vasos, la situación expresada por las coordenadas de este punto no puede presentarse; de hecho, los únicos puntos que podrían representar una distribución de agua en los vasos son los que están en el borde o interior del paralelogramo marcado; el vértice $A(8 : 0 : 0)$ corresponde a la situación inical.

Verter agua de un vaso a otro significa moverse de un nodo a otro a lo largo de una de las líneas de la malla (la cantidad de agua en el vaso restante no cambia). La única forma de medir una cantidad exacta es o bien llenando o vaciando completamente uno de los vasos; es decir, cada terna ha de tener un 0 ó un 8, en la primera, ó un 5, en la segunda, ó un 3, en la tercera. Por tanto, sólo nos podemos mover sobre el borde del paralelogramo marcado.

Inicialmente, el primer vaso está lleno, con lo que partimos del vértice $A(8 : 0 : 0)$; desde éste sólo son posibles dos movimientos: a lo largo de la línea para la que $z = 0$, hasta el nodo $(3 : 5 : 0)$, o a lo largo del lado $y = 0$, hasta el nodo $(5 : 0 : 3)$. Resolver el problema es similar a jugar al billar sobre un tablero triangular. Existen exactamente tres nodos (marcados con un círculo, sobre los lados del paralelogramo) cuyas coordenadas contienen al menos un 4, que son: $(4 : 4 : 0), (4 : 1 : 3), (1 : 4 : 3)$. El problema será resuelto cuando la bola llegue a uno de estos tres puntos. En la figura se muestra un posible recorrido:

$$(8 : 0 : 0) \to (3 : 5 : 0) \to (3 : 2 : 3) \to (6 : 2 : 0) \to (6 : 0 : 2) \to (1 : 5 : 2) \to (1 : 4 : 3).$$

Es decir: primeramente, se llena el segundo vaso desde el primero; se llena el tercero desde el segundo; se vacía el tercero en el primero; se vacía el segundo en el tercero; se llena el segundo desde el primero; y, finalmente, se llena el tercero desde el segundo.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejpc2271.pdf

[1] Alex Bogolmony, http://www.cut-the-knot.org/triangle/glasses.shtml