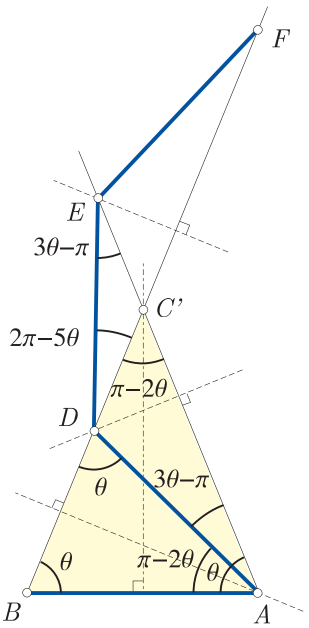
Hallar el ángulo $\widehat{ACB}$ (su valor numérico) sabiendo que $\widehat{ABC}$ es un triángulo isósceles con $AC = BC$ y que los segmentos $AB, AD, DE, EF, FC$ son iguales, con $D$ y $F$ sobre $BC$, con el orden $CFDB$, y $E$ sobre $CA$, con $E$ interior.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **611**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *1.- Hallar el ángulo ACB (su valor numérico) sabiendo que (ABC) isósceles con AC = BC y que los segmentos AB, AD, DE, EF, FC son iguales. con D,y F sobre BC, con el orden CFDB, y E sobre CA, con E interior.*
>
> *Dalcín. M (2009): Un estudio sobre la iniciación al pensamiento deductivo en la formación de profesores de matemática. El caso de la geometría. Seminario de Investigación en Matemática Educativa III Programa de Doctorado, CICATA - IPN, México Montevideo, tutorizado por : Dr. Javier Lezama. (p. 153)*




Tomemos un segmento $AB$, de longitud $c$, y sobre su mediatriz debemos encontrar los puntos $C$, de tal forma que el triángulo $\widehat{ABC}$ cumpla con las condiciones requeridas en el enunciado, salvo que NO impondremos inicialmente que el punto $E$ esté en el segmento $AC$.

Sea $C'$ en la mediatriz de $AB$ y $\theta = \widehat{ABC'} = \widehat{BAC'}$ el ángulo en la base del triángulo isósceles $\widehat{ABC'}$. El punto $D$ debe ser el simétrico de $B$ respecto a la perpendicular desde $A$ a $BC'$ y $\widehat{ADB} = \theta$ (el triángulo $\widehat{BDA}$ es isósceles). Luego, $\widehat{BAD} = \pi - 2\theta$ y $\widehat{DAC'} = \pm(\pi - 3\theta)$.

Sea $E$ el punto simétrico de $A$ respecto a la perpendicular desde $D$ a $AC'$; finalmente, sea $F$ el simétrico de $D$ respecto a la perpendicular desde $E$ a $BC'$ ($AD = DE = EF = AB = c$); con lo que $\rho = BF = 2c\cos\theta + 2c\cos 5\theta$.

Consideremos el punto $X$ en la recta $BC'$ que dista $c$ de $F$, El lugar de $X$ cuando $\theta$ varía (es decir, cuando $C'$ varía en la mediatriz de $AB$) es la curva, dada en coordenadas polares con polo en $B$ y semieje polar $BA$:

$$\rho = c(\pm 1 + \cos\theta + \cos 5\theta).$$

Los vértices $C$ de $\widehat{ABC}$ son los puntos de intersección de esta curva con la mediatriz a $AB$:

$$\rho = \frac{c}{2\cos\theta}.$$

Resolviendo estas ecuaciones (tomando en la primera el signo "+", que es la misma cuando tomamos el "-" y $\theta \to \theta + \pi$), ayudándonos de un programa de cálculo simbólico, obtenemos para el ángulo en el vértice $C$, los seis valores:

$$\boxed{20^\circ, \quad 36^\circ, \quad 60^\circ, \quad 100^\circ, \quad 108^\circ, \quad 140^\circ}$$

Que corresponde, respectivamente, a las soluciones ($\theta = \widehat{ABC}$) de las ecuaciones anteriores:

$$80^\circ, \quad 72^\circ, \quad 60^\circ, \quad 40^\circ, \quad 36^\circ, \quad 20^\circ.$$

De estos valores, el único triángulo isósceles $\widehat{ABC}$, para el cual el punto $E$ esté en el segmento $AC$, es el que tiene ángulo en el vértice $C$ igual a $20^\circ$.

Cuando $\widehat{ACB} = 36^\circ, 108^\circ$ el punto $E$ coincide con $C$; cuando $\widehat{ACB} = 60^\circ$, $D = C$.