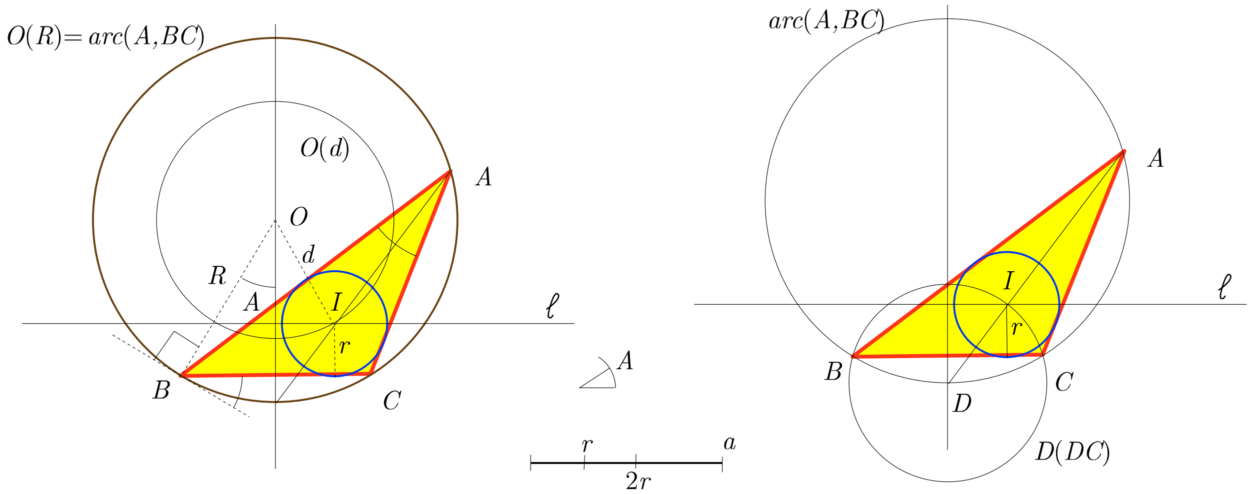
Construir un triángulo conocidos un lado, el ángulo opuesto y el radio de la circunferencia inscrita.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **401**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado

> *Construir un triángulo dado : Un lado a, el inradio r, y la medida del ángulo A opuesto al lado a.*
> *Hiebert, J (1986): Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. London. (p. 245)*



Trazado el el segmento BC de longitud dada a, construimos el arco capaz de ángulo dado A sobre BC, su centro será el circuncentro del triángulo $\widehat{ABC}$ a determinar.

De las fórmulas

$$a = 2R \operatorname{sen} A, \qquad d^2 = R^2 - 2rR,$$

podemos determinar el radio R de la circunferencia circunscrita y la distancia d entre el circuncentro O y el incentro I, ya que se da el radio r de la circunferencia inscrita.

La intersección de la circunferencia $O(d)$ de centro en O y radio d, con la recta ℓ paralela a BC a una distancia r, nos da el incentro. Las tangentes a $I(r)$ desde B y C se cortan en un punto A sobre $O(R)$ (porismo de Poncelet), que es el vértice A del triángulo buscado $\widehat{ABC}$.

Ver los casos de resolución de triángulos, conociendo a, R, r y A, R, r para las restricciones entre los datos dados, para que la construcción sea posible.

Solución de Fursenko:

Construimos el arco capaz $arc(A, BC)$ sobre $BC = a$, trazamos la paralela ℓ a BC a una distancia r. Sea D el punto donde la mediatriz a BC corta al arco capaz $arc(\pi - A, BC)$ del suplementario de A sobre BC. Uno de los puntos de corte de ℓ con la circunferencia de centro D y radio DC es I. La recta DI corta al arco capaz $arc(A, BC)$ en el vértice A del triángulo buscado.

Para el triángulo $\widehat{ABC}$ pueda ser construido ha de existir entre los datos las siguientes restricciones:

$$a > 2r, \qquad \operatorname{sen} A < \frac{8ra(a^2 - 4r^2)}{(a^2 + 4r^2)^2}.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2110.pdf