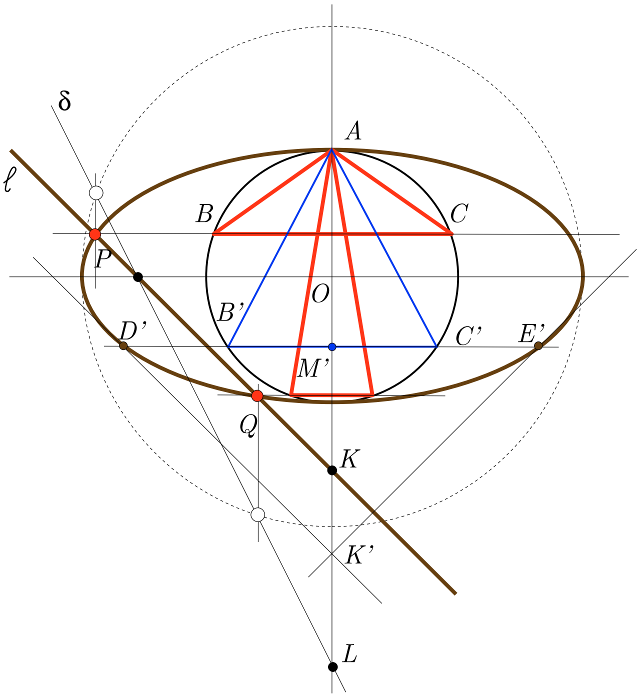
Inscribir en una circunferencia dada, de centro O y radio R, un triángulo isósceles del que se conoce la suma de la base y de la altura.

SOLUCIÓN:
Ver otra solución en: http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr1339.pdf.



Procedemos a determinar la solución utilizando lugares geométricos:

Debemos inscribir un triángulo isósceles $\widehat{ABC}$ ($AB = AC$) en una circunferencia $O(R)$ de centro O y radio R, dados. Por lo que, una vez trazada tal circunferencia, fijamos en ella el vértice A del triángulo a construir. Vamos a tomar en ella un triángulo isósceles variable $\widehat{AB'C'}$ ($AB' = AC'$ y $B'C'$ perpendicular a AO).

Sobre la semirrecta AO ubicamos el punto K tal que $AK = k = a + h_a$, longitud dada, igual a suma de la longitud a del lado opuesto a A más la altura h_a desde este vértice, del triángulo a construir. Además, sobre dicha semirrecta construimos el punto K' tal que $AK' = AM' + B'C'$ (altura más base de $\widehat{AB'C'}$), siendo M' el punto medio del lado $B'C'$.

Debemos variar M' para que K y K' coincidan y, por tanto, $\widehat{AB'C'}$ sea un triángulo pedido.

Sean D' y E' los simétricos de M' respecto a B' y C', respectivamente. Se tiene que $M'D' = M'E' = M'K'$, lo que nos permite cosnstruir K'. Al variar M', los puntos D' y E' describen la elipse de centro en O y semiejes R y $2R$. Además, las rectas $D'K'$ permanecen paralelelas a sí mismas, y lo mismos ocurre con las rectas $E'K'$.

Designamos por P y Q los puntos de corte con la elipse de la recta ℓ por K paralela a las $K'D'$ (da igual que coger la paralela a $K'E'$). Si construimos estos puntos, P y Q, los vértices B y C del triángulo a construir están en la intersección de la circunferencia $O(R)$ con la perpendicular a AO por P o por Q. Habrán dos soluciones si la elipse y ℓ tiene dos puntos comunes, una si son tangentes y no hay solución si no se cortan.

Para demostrar que el lugar geométrico que describen D' y E', al variar M', están en una elipse, basta observar cuales son sus coordenadas respecto a los ejes OA y su perpendicular por O. Como la ecuación de $O(R)$ es $x^2+y^2 = R^2$ y si $M(0,t)$ entonces $D'(-2\sqrt{R^2-t^2}, t)$ y $E'(2\sqrt{R^2-t^2}, t)$. Luego, ambos están en la elipse de ecuación

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{4R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1.$$

Los puntos de corte de esta elipse $\mathcal{E}$ con la recta $\ell : x + y = R - k$ son:

$$\left(\frac{2}{5}\left(-2k + 2R \pm \sqrt{-k^2 + 2Rk + 4R^2}\right), \frac{1}{5}\left(-k + R \pm 2\sqrt{-k^2 + 2Rk + 4R^2}\right)\right),$$

que se pueden construir con regla y compás.

No obstante, se pueden determinar gráficamente estos puntos, teniendo en cuenta la transformación afín (homología, con centro en el punto del infinito de la recta OA y eje la perpendicular a esta recta por o) que lleva la circunferencia principal

$$O(2R): \; x^2 + r^2 = 4r^2 \quad \text{en la elipse } \mathcal{E},$$

$$x' = x, \qquad y' = \frac{R^2}{2R^2} y = \frac{y}{2},$$

y hallando la recta δ, imagen recíproca de la recta ℓ, que será la recta que pasa por el punto (doble) de corte de ℓ con el eje mayor de la elipse y por el simétrico L de O respecto a K. Luego determinamos, los puntos de corte de $O(2R)$ con δ, y las paralelas por éstos a AO cortan a ℓ en los puntos buscados P y Q de intersección de la elipse $\mathcal{E}$ con la recta ℓ.

Finalmente, para analizar cuando hay solución, notemos que hay dos soluciones cuando *ęlta* y $O(R)$ tiene dos puntos comunes; una sóla cuando son tangentes y ninguna si no se cortan. Esto ocurre, respectivamente, si

$$-k^2 + 2Rk + 4R^2 \quad \text{es mayor que cero, igual a cero, o negativo.}$$

O, equivalemente, si $a + h_a = k < (1+\sqrt{5})R$, hay dos triángulos; si $k = (1+\sqrt{5})R$, hay uno; y si $k > (1+\sqrt{5})R$, no hay solución.

Solución de Mariano Nieto. Ingeniero de Minas, de Madrid.
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{385}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol385mnieto.htm

Sea $AN = k$, con un extremo A sobre la circunferencia de radio R y pasando por su centro O.

A partir de N construyamos el triángulo rectángulo en P, $\widehat{NPS}$, tal que $NP = 2PS$. Prolonguemos el lado NS hasta que corte a la circunferencia en los puntos B y D, por los que trazaremos perpendiculares BC y DE a AN. Obtenemos así los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{ADE}$ que cumplen la condición del problema.

En el caso de que la recta NS fuese tangente a la circunferencia tendríamos una única solución y entonces $k = (1+\sqrt{5})R$, siendo en este caso la base del triángulo igual a $1.78R$; es decir, ligeramente superior al lado del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia.