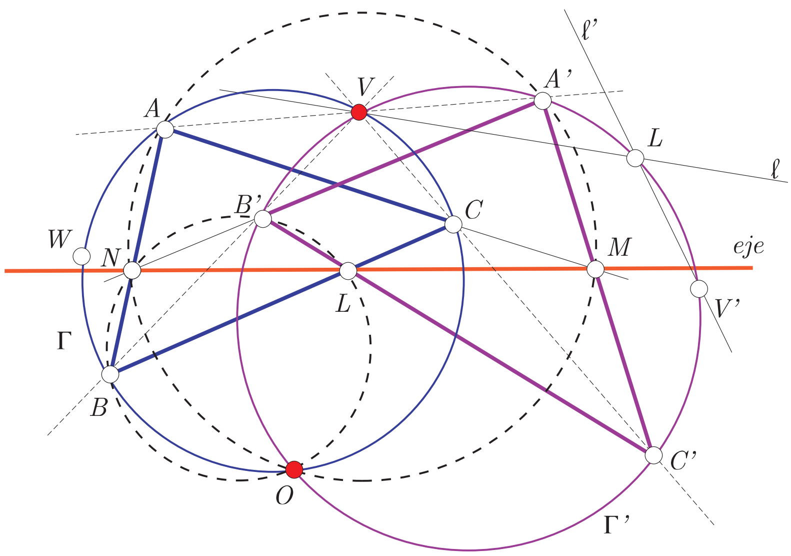
Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **584**
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Con el siguiente enunciado:

> *Cuando dos triángulos son semejantes y homólogos a la vez y los pares de vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología, los centros de semejanza y homología son los puntos de intersección de las circunferencias circunscritas a los dos triángulos.*
>
> *Inglada García-Serrano, V. (1948): Métodos para la resolución de los problemas geométricos. Dossat. Madrid. p.155*



Daremos dos demostraciones distintas: Una determinando en centro de la semejanza y la transformación que ésta induce entre haces de rectas; y otra, utilizando coordenadas complejas.

• PRIMERA SOLUCIÓN

Utilizamos los siguientes resultados:

1. En una semejanza directa que transforma los puntos A y B en A' y B', respectivamente, el centro de semejanza es el segundo punto de intersección de las circunferencias determinadas por los puntos A, A' y P y por los puntos B, B' y P; siendo P el punto de intersección de las rectas AA' y BB'.

   http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejcg1853.pdf

2. En una semejanza en el plano, una recta de un haz y su transformada se cortan en un punto que está en la circunferencia que pasa por los puntos base de ambos haces.

   Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los haces de recta pasan por $(0,0)$ y $(1,0)$, entonces la ecuación de una semejanza que tenga estos punto como homólogos, tiene por ecuaciones:

   $$x' = ax + by + 1, \qquad y' = -bx + ay; \qquad\qquad x = \frac{ax' - by' - a}{a^2 + b^2}, \qquad y = \frac{bx' + ay' - b}{a^2 + b^2}.$$

   Una recta $y = mx$, por $(0,0)$, se transforma en le recta, por $(1,0)$, $(b - am)x + (a + bm)y + am - b = 0$. Eliminando m entre las ecuaciones de estas dos rectas, se obtiene la ecuación de la circunferencia que pasa por $(0,0)$ y $(1,0)$ y de centro en $(1/2, -a/2b)$:

   $$b(x^2 + y^2) - bx + ay = 0.$$

Sean $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ dos triángulos directamente semejantes y homólogos (perspectivos), tal que se correspondan los mismos vértices en la semejanza y en la homología.

Sea N el punto de intersección de los lados AB y $A'B'$; el centro de semejanza que transforma A en A' y B en B' es el punto O (distinto de N) donde se cortan las circunferencia determinadas por el par de ternas $\{A, A', N\}$ y $\{B, B', N\}$.

Al ser los triángulos $\widehat{ABC}$ y$\widehat{A'B'C'}$ perspectivos, el centro de perspectividad (centro de homología) es el punto V de intersección de las rectas AA' y BB'. Por tanto, la recta que contiene a C y C' también ha de pasar por V.

Sea ℓ una recta arbitraria que pasa por V; su imagen, en la semejanza, es una recta ℓ' que pasa por un punto fijo V', cuando ℓ varía. Denotemos por L el punto de intersección de las rectas ℓ y ℓ'. Si D es un punto de ℓ y D', en ℓ', su imagen en la semejanza, los triángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{A'B'D'}$ son perspectivos si D' está en ℓ, es decir, si $D' = L$.

Luego, el vértice C', de nuestro triángulo de partida, debe estar en el lugar geométrico descrito por el punto L, cuando la recta ℓ gira alrededor del centro de perspectividad V. Tal lugar, intersección de rectas de dos haces que se corresponden en la semejanza, es una circunferencia (2) Γ' que pasa por los puntos base V y V'.

Como en la semejanza, la recta VO y su transformada $V'O$ (O es fijo) se cortan en O, éste pertenece a Γ'. Además, la recta VA se transforma en $V'A'$, y como A, A' y V están alineados, también $A' \in \Gamma'$; por la misma razón $B' \in \Gamma'$. Tenemos entonces que la circunferencia circunscrita Γ' al triángulo $\widehat{A'B'C'}$ contiene a los centros de semejanza y homología.

La circunferencia Γ' es la imagen, en la semejanza, de la circunferencia Γ circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$, que contiene a O (fijo en la semejanza). Esta circunferencia también contiene al centro de homología V, pues si $W \in \Gamma$ es el punto que se transforma en V mediante la semejanza, las rectas que pasan por W se transforman en rectas que pasan por V, y ambas se cortan en la circunferencia que contiene a los puntos W, V, A, B y S (por (2)).

• SEGUNDA SOLUCIÓN

Vamos a utilizar coordenadas complejas[(1)] en el plano para resolver este problema.

Un punto P de coordenadas cartesianas (x, y), lo representamos por el número complejo $z = x + iy$, se dice que P es el afijo de z. Recíprocamente, el número complejo $z = x + iy$ representa el punto de coordenadas cartesianas

$$(x, y) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es el complejo conjugado de z.

La razón simple compleja de tres puntos A, B y C afijos de z_1, z_2 y z_3, es el número complejo

$$\rho = (A\,B\,C) = (z_1\,z_2\,z_3) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

Su módulo y argumento vienen dados por ($\rho = |\rho|(\cos\arg(\rho) + i\,\mathrm{sen}\arg(\rho))$:

$$|\rho| = \frac{AB}{AC}, \qquad \arg(\rho) = \widehat{CAB}.$$

Se deduce, de la definición, que la razón simple compleja es real si los tres puntos están alineados; es imaginaria pura si el triángulo $\widehat{ABC}$ es rectángulo, con el ángulo recto en A; y tiene módulo $|\rho| = 1$, si dicho triángulo es isósceles de base BC. Además, dos triángulo $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son semejantes si sólo si sus razones simples complejas $\rho = (A\,B\,C)$ y $\rho' = (A'\,B'\,C')$ son iguales.

La razón doble compleja de una cuaterna de puntos se define por

$$\rho = (A\,B\,C\,D) = (z_1\,z_2\,z_3\,z_4) = \frac{(A\,C\,D)}{(B\,C\,D)} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4},$$

y, por tanto, su módulo y argumento vienen dados por

$$|\rho| = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}, \qquad \arg(\rho) = \widehat{DAC} - \widehat{DBC}.$$

En consecuencia, la razón doble compleja de cuatro puntos es real si éstos están en una circunferencia o están alineados.

Las ecuaciones de una semejanza (directa)

$$\begin{aligned} x' &= a_0^1 + a_1^1 x + a_2^1 y \\ y' &= a_0^2 - a_2^1 x + a_1^1 y \end{aligned}$$

(1) Siguiendo la solución dada por Vicente Inglada en ”Métodos para la resolución de los Problemas Geométricos”.

se expresan en coordenadas complejas como

$$z' = \alpha z + \beta,$$

donde $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, $\alpha = a_1^1 - ia_2^1$ y $\beta = a_0^1 + ia_0^2$.

Con esta introducción, consideremos dos triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ semejantes, con centro de semejanza [(2)] en O y además homólogos mediante una homología de centro en V (los vértices homólogos en la semejanza lo son también en la homología). Tomemos O como origen de coordenadas y asignemos las siguientes coordenadas complejas:

$$O(0),\ A(z_1),\ B(z_2),\ C(z_3),\ A'(\alpha z_1),\ B'(\alpha z_2),\ C'(\alpha z_3),\ V(z_0).$$

Como los vértices homólogos están alineados con el centro de homología V, se tiene que las razones simples complejas siguientes son reales:

$$(z_1\, z_0\, \alpha z_1) = \frac{z_0 - z_1}{z_1(\alpha - 1)}, \qquad (z_2\, z_0\, \alpha z_2) = \frac{z_0 - z_2}{z_2(\alpha - 1)}, \qquad (z_3\, z_0\, \alpha z_3) = \frac{z_0 - z_3}{z_3(\alpha - 1)},$$

y, por tanto, son reales las siguientes razones dobles complejas:

$$\frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2} : \frac{z_1}{z_2} = (z_0\, 0\, z_1\, z_2), \qquad \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_2}{z_3} = (z_0\, 0\, z_2\, z_3).$$

En consecuencia, los puntos $O(0)$ y $V(z_0)$ están en la circunferencia circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$.

Para establecer que ambos centros también están en la circunferencia circunscrita a $\widehat{A'B'C'}$, basta con considerar la semejanza recíproca $z' = \dfrac{1}{\alpha} z$, que lleva $\widehat{A'B'C'}$ en $\widehat{ABC}$, y hacer el mismo razonamiento.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2213.pdf

(2) Supongamos que la semejanza es directa y tomemos dos segmentos homólogos no paralelos; vamos a encontrar centro de semejanza O. Prolonguemos $A'B'$ hasta que corte a AB en N. El segundo punto de intersección de la circunferencia que pasa por N, A y A' y de la que pasa por N, B y B' es el punto O buscado.

En efecto, se tiene que $\widehat{OAN} = \widehat{OB'N}$ y $\widehat{OAN} = \widehat{OA'B'}$ y, por consiguiente, son semejantes los triángulos $\widehat{OAB}$ y $\widehat{OA'B'}$, lo que prueba que O es el punto doble de la semejanza.