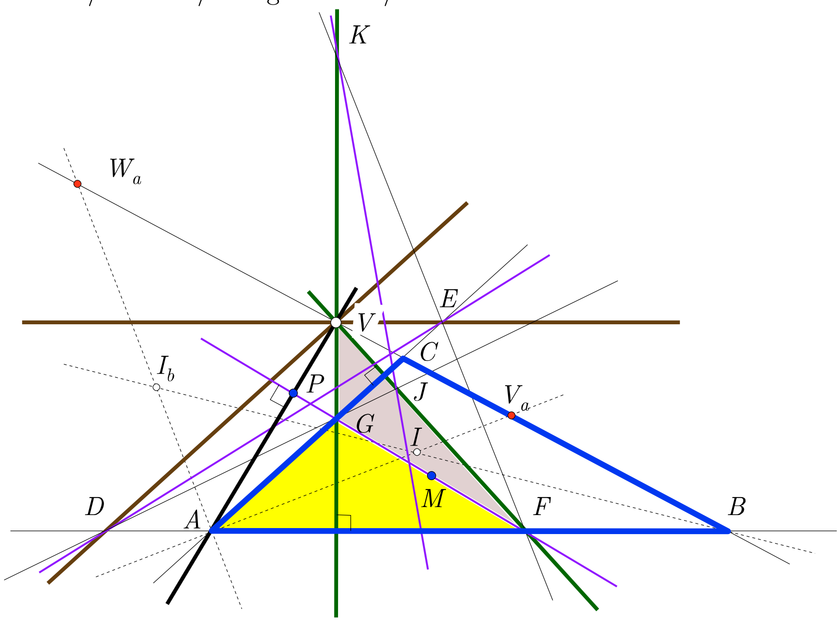
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo no rectángulo en A y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La paralelas a AC y AB por por V cortan a AB y AC en D y E, respectivamente. La perpendicular a AB por V corta en G a AC. La perpendicular a AC por V corta en F a AB. Además consideramos los puntos de intersección $J = GD \cap VF$ y $K = EF \cap VG$.

a) Demostrar que cada uno de los siguientes enunciados es cierto si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A.

DE es paralela a FG.
FG es paralela a JK.
DG, EF y AV son concurrentes.
El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles.

b) V es el ortocentro de $\widehat{AFG}$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **398**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm



Lo resolveremos utilizando coordenadas baricéntrias[1] relativas al triángulo dado $\widehat{ABC}$, respecto a las cuales, los vértices son:

$$A(1,0,0), \qquad B(0,1,0), \qquad C(0,0,1);$$

las ecuaciones de los lados y de la recta del infinito son[2]:

$$BC: \ x=0, \quad CA: \ y=0, \quad AB: \ z=0, \qquad \ell_\infty: \ x+y+z=0.$$

El incentro I y los exincentros[3] I_a, I_b e I_c:

$$I(a,b,c), \qquad I_a(-a,b,c), \qquad I_b(a,-b,c), \qquad I_c(a,b,-c),$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los vértices A, B y C, respectivamente.

Las ecuaciones de las bisectrices, interna y externa, por el vértice A son:

$$AI: \ cy - bz = 0, \qquad AI_b: \ cy + bz = 0,$$

y los puntos de intersección de éstas con el lado BC:

$$V_a(0,b,c), \quad W_a(0,-b,c).$$

(1) Una buena referencia para el uso de coordenadas baricéntrias, en problemas relativos a triángulos, es: Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps
Nos referimos a esta obra, por ejemplo, con la cita: Paul Yiu, pág ### (para un hecho contenido en tal página).
(2) Paul Yiu, pág. 46
(3) Paul Yiu, pág. 26

Si una recta ℓ tiene punto del infinito (f, g, h), las coordenadas del punto del infinito de una recta perpendicular a ℓ son[4]:

$$(gS_B - hS_C,\ hS_C - fS_A,\ fS_A - gS_B),$$

donde

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}, \qquad \text{(notación de Conway)}$$

con lo que $S_B + S_C = a^2$, $S_C + S_A = b^2$ y $S_A + S_B = c^2$.

Sea $V(0, 1, t)$ un punto en el lado BC, distinto de B y C. La recta paralela por V al lado AB pasa por el punto del infinito $(1, -1, 0)$ de éste, por lo que su ecuación es $tx + ty - z = 0$, y $E(1, 0, t)$ es el punto de intersección de dicha paralela con el lado AC. Así mismo, el punto de intersección de la paralela a AC por V es $D(t, 1, 0)$.

Las perpendiculares a AB (con punto del infinito $(1, -1, 0)$) y a AC (con punto del infinito $(1, 0, -1)$) por V tienen por ecuaciones, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ -S_B & -S_A & S_A + S_B \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & t \\ S_C & -S_C - S_A & S_A \end{vmatrix} = 0.$$

El punto de intersección G de la primera con el lado AC y F de la segunda con el lado AB son

$$F(-tS_C,\ S_A + S_A t + S_C t,\ 0), \qquad G(-S_B,\ 0,\ S_A + S_B + tS_A).$$

• a1) Para que las rectas DE y FG sean paralelas, sus puntos del infinito han de coincidir:

$$\lambda(1 - t,\ -1,\ t) = (S_B - S_C t,\ S_A + S_A t + S_C t,\ -S_A - S_B - S_A t).$$

Esto ocurre cuando

$$t = \pm\frac{\sqrt{S_A + S_B}}{\sqrt{S_A + S_C}} = \pm\frac{c}{b}, \qquad \lambda = \frac{a^2 - (b \pm c)^2}{2},$$

o sea, cuando $V(0, 1, t)$ coincide con $V_a(0, b, c)$ o $W_a(0, -b, c)$, es decir, cuando AV es una de las bisectrices en A.

Con lo que queda probada la primera equivalencia del apartado a).

• a2) La intersección de las rectas DG y VF da el punto J:

$$DG:\ (S_A + S_B + S_A t)x - (S_A + S_B + S_A t)ty + S_B z = 0, \quad VF:\ (S_A t + S_A t^2 + S_C t^2)x + S_C t^2 y - S_C tz = 0,$$

$$J\Big(S_A S_C t,\ S_B S_C + S_A(S_B + S_C),\ (S_A + S_C)(S_A + S_B + S_A t)t\Big).$$

La intersección de las rectas EF y VG nos da el punto K:

$$EF:\ (S_A t + S_A t^2 + S_C t^2)x + S_C t^2 y - (S_A + S_A t + S_C t)z = 0, \quad VG:\ (S_A + S_B + S_A t)x - S_B ty + SBz = 0,$$

$$K\Big(S_A S_B t,\ (S_A + S_B)(S_A + S_A t + S_C t),\ (S_A S_B + S_A S_C + S_B S_C)t^2\Big).$$

Para que las rectas FG y JK sean paralelas es necesario y suficiente que tengan el mismo punto el infinito.

Como las coordenadas del punto del infinito de la recta JK se obtiene multiplicando la suma de las coordenadas de K por las coordenadas de J y restándole las coordenadas de K multiplicadas por la suma de las coordenadas de J, debemos resolver las ecuaciones:

$$-(S_A t(1+t)(S_A^2(-S_C + S_B t) + S_B S_C(S_B - S_C t) + S_A(S_B^2 - S_C^2 t))) = \lambda(S_B - S_C t)$$

$$-(S_A t(1+t)(S_B S_C^2 t + S_A^3(1+t) + S_A S_C(S_C t + 2S_B(1+t)) + S_A^2(2S_C(1+t) + S_B(2+t)))) = \lambda(S_A + S_A t + S_C t)$$

$$S_A t(1+t)(S_B^2 S_C + S_A^3(1+t) + S_A^2(S_C + 2S_C t + 2S_B(1+t)) + S_A S_B(S_B + 2S_C(1+t))) = \lambda(-S_A - S_B - S_A t).$$

Con lo que de nuevo se obtiene que FG y JK son paralelalas si y sólo si $t = \pm c/b$, es decir, si y sólo si AV es una de las bisectrices en A.

Queda así establecida el segundo enunciado del apartado a).

• a3) Para establecer el tercer acerto del apartado a), consideramos las ecuaciones de las rectas:

$$AV:\ ty - z = 0, \qquad DG:\ (S_A + S_B + S_A t)x - (S_A + S_B + S_A t)ty + S_B z = 0,$$

[4] Paul Yiu, pág. 55

$$EF:\ -(S_A+S_At+S_Ct)tx-S_Ct^2y+(S_A+S_At+S_Ct)z=0.$$

Para que sean concurrentes ha de ser cero el determinante formado por los coeficientes de las tres:

$$\begin{vmatrix} 0 & t & -1 \\ (S_A+S_B+S_At) & -(S_A+S_B+S_At)t & S_B \\ -(S_A+S_At+S_Ct)t & -S_Ct^2 & (S_A+S_At+S_Ct) \end{vmatrix}=0, \qquad t=\pm\frac{\sqrt{S_A+S_B}}{\sqrt{S_A+S_C}}=\pm\frac{c}{b}.$$

De nuevo V ha de coincidir con V_a o con W_a.

• a4) Probemos ahora que el triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles sólo cuando AV es una de las bisectrices en A (último estamento del apartado a).

En primer lugar, demostremos que AV siempre es perpendicular a FG, cuando V varía en el lado BC de $\widehat{ABC}$. Para ello, recordemos la siguiente caraterización[(5)] de rectas perpendiculares, en coordenadas baricéntricas:
"*Dos rectas con puntos del infinito* (f,g,h) *y* (f',g',h') *son perpendiculares si y sólo si*

$$S_Aff'+S_Bgg'+S_Chh'=0."$$

En nuestro caso, el punto del infinito de la recta FG es $(S_B-S_Ct,\ S_A+S_At+S_Ct,\ -S_A-S_B-S_At)$ y el de la recta AV es $(1+t,-1,-t)$, luego, AV y FG son perpendiculares, pues:

$$S_A(1+t)(S_B-S_Ct)+S_B(-1)(S_A+S_At+S_Ct)+S_B(-t)(-S_A-S_B-S_At)=0.$$

Como consecuencia, AV y GV son dos alturas del triángulo $\widehat{AFG}$; es decir, V es su ortocentro. Queda así establecido el apartado b).

Para que $\widehat{VFG}$ sea isósceles, la perpendicular por V a su base FG, que es AV, ha de pasar por el punto medio M de FG. El punto medio de FG es $M(-S_B-S_Ct,\ S_A+S_At+S_Ct, S_A+S_B+S_At)$, e imponiendo que esté en la recta $AV:\ ty-z=0$ se tiene que

$$t=\pm\frac{c}{b}.$$

Con lo que el problema queda resuelto. Si el ángulo en A es recto o V coincide con uno de los vértices B o C, las paralelas y las perpendiculares a los catetos por V coinciden dos a dos, y no tiene sentido el planteamiento del mismo.

Observaciones adicionales.-

— Para demostrar la afirmación cuarta del apartado a):

"El triángulo $\widehat{VFG}$ es isósceles si y sólo si AV es una de las bisectrices del ángulo A",

debemos demostrar que el punto medio

$$M(-S_B-S_Ct,\ S_A+S_At+S_Ct, S_A+S_B+S_At)$$

de FG ha de coincidir con el punto de intersección P de las rectas AV y FG.

Cuando V varía sobre el lado BC el punto M describe una recta y P una cúbica de ecuaciones paramétricas respectivas:

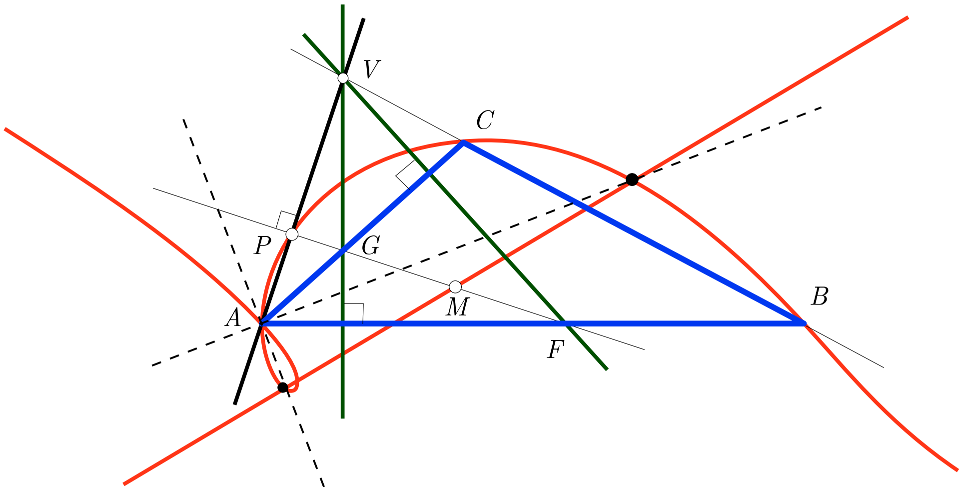
$$\begin{array}{ll} x=-S_B-S_Ct & \qquad x=-(S_BS_C+S_A(S_B+S_C))t(1+t) \\ y=S_A+S_At+S_Ct & \qquad y=(S_A+S_B+S_At)(S_A+S_At+S_Ct) \\ z=S_A+S_B+S_At & \qquad z=t(S_A+S_B+S_At)(S_A+S_At+S_Ct) \end{array}$$

Para determinar los puntos comunes a estas curvas, debemos encontrar los valores de t para que sus coordenadas coincidan, $\{P\}=\lambda\{M\}$, obteniéndose que

$$t=\pm\frac{c}{b}, \qquad \lambda=\pm\frac{c(-a^2\pm(b+c)^2)}{2b}.$$

lo que equivale a que el punto AV sea una de las bisectrices en A. Las rectas que unen el vértice A con los de intersección de recta y cúbica (obtenidas como lugares geométricos) cortan al lado BC en los puntos que satifacen la condición impuesta.

[(5)] Paul Yiu. pág. 55



El tercer punto de intersección de la recta (lugar geométrico de M) con la cúbica (lugar geométrico de P) no corresponde a un mismo valor de t.

— Para plantear el problema cíclicamente a todos los vértices del triángulo $\widehat{ABC}$, cambiamos la notación de la forma siguiente:

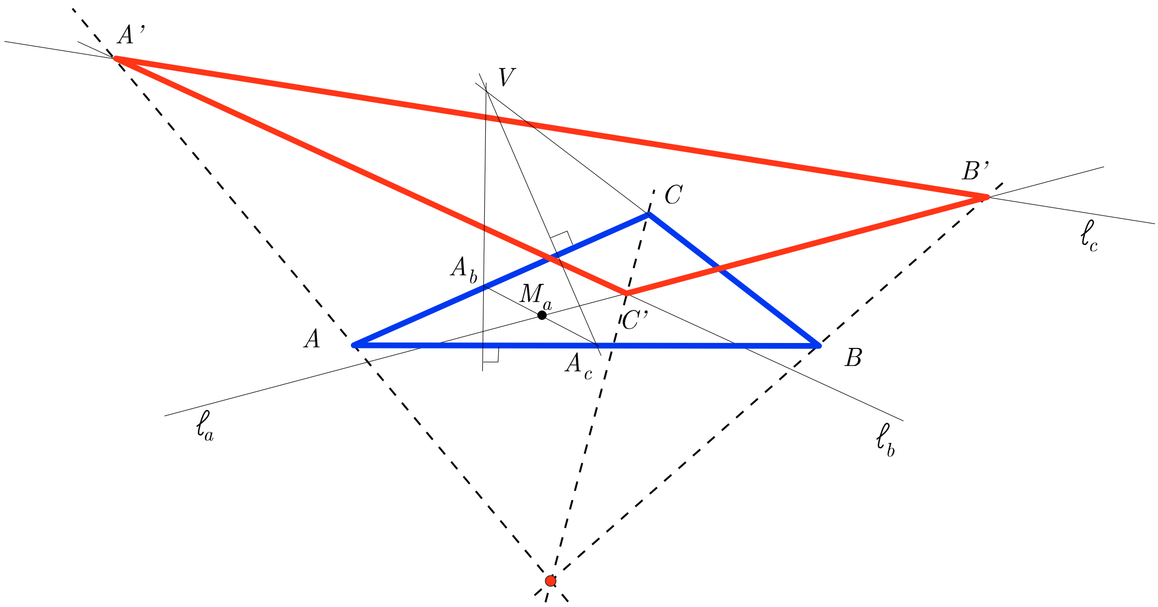
Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo acutángulo y V un punto situado sobre la recta BC, distinto de los vértices. La perpendicular a AB por V corta en A_b a AC. La perpendicular a AC por V corta en A_c a AB. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_a de A_bA_c, cuando V varía en el lado BC, es una recta ℓ_a.

Si ahora el punto V es un punto de la recta AC, la perpendicular a AB por V corta a BC en B_a y la perpendicular a BC por V corta a AB en B_c. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_b de B_aB_c, cuando V varía en el lado AC, es una recta ℓ_b.

Finalmente, si el punto V es un punto de la recta AB, la perpendicular a BC por V corta a AC en C_b y la perpendicular a AC por V corta a BC en C_a. Entonces el lugar geométrico del punto medio M_c de C_aC_b, cuando V varía en el lado AB, es una recta ℓ_c.

Las ecuaciones paramétricas de estas rectas,descritas por M_a, M_b y M_c, son:

$$\ell_a : \begin{cases} x = -S_B - S_C t \\ y = S_A + S_A t + S_C t \\ z = S_A + S_B + S_A t \end{cases} \qquad \ell_b : \begin{cases} x = S_B + S_B t + S_C t \\ y = -S_A - S_C t \\ z = S_A + S_B + S_B t \end{cases} \qquad \ell_c : \begin{cases} x = -S_C - S_B t - S_C t \\ y = -S_A - S_C - S_C t \\ z = S_A + S_B t \end{cases}$$



Ocurre entonces que las tres rectas ℓ_a, ℓ_b y ℓ_c determinan un triángulo $\widehat{A'B'C'}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$ con centro de perspectividad en el punto de coordenadas baricéntricas

$$\left(S_A^4S_B^4 + S_A^4S_C^4 - S_B^4S_C^4 - 2S_A^4S_B^2S_C^2, \quad S_B^4S_C^4 + S_B^4S_A^4 - S_C^4S_A^4 - 2S_B^4S_C^2S_A^2, \quad S_C^4S_A^4 + S_C^4S_B^4 - S_A^4S_B^4 - 2S_C^4S_C^2S_B^2\right).$$

Se trata de un punto denominado "triangle center" en "The Encyclopedia of Triangle Centers (ETC)" de Clark Kimberling[6], ya que la primera componente de sus coordenadas

$$f(a,b,c) = S_A^4 S_B^4 + S_A^4 S_C^4 - S_B^4 S_C^4 - 2S_A^2 S_B^2 S_C^4,$$

es una función homogénea de las longitudes de los lados de $\widehat{ABC}$ y verifica que tal punto se expresa por

$$\Big(f(a,b,c), \quad f(b,c,a), \quad f(c,a,b) \Big).$$

Y además, se verifica que $f(a,b,c) = f(a,c,b)$.

Si evaluamos las coordenadas del centro de perspectividad de los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ en un triángulo de lados $a = 6cm$, $b = 9cm$ y $c = 12cm$, la distancia de dicho punto al lado menor BC es[7]

$$9.8010047378cm.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2224.pdf

[6] http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html

[7] No figura en la Enciclopedia ETC, pero es el conjugado isogonal del X(1498)