Dados un triángulo $\widehat{ABC}$ y los puntos cualesquiera O, A', B', C' en su plano, entonces, denotando por $\wedge$ el producto exterior, se tiene:

AA', BB', CC' son concurrentes si y sólo si existen tres vectores (no todos nulos) $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}$ paralelos a AA', BB', CC', respectivamente, tales que $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$ y $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{338}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/prosinres.htm

Quincena del 16 al 30 de Septiembre de 2006.

Propuesto por José Carlos Chavez Sandoval, estudiante peruano de Matemática Pura en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

Pedoe, D. (1.988) Geometry: A Comprehensive Course, Dover, New York, 1988 §10.2 pag. 49.

Con el siguiente enunciado:

Dado el triangulo ABC y los puntos cualesquiera O, A', B', C'.

Entonces AA', BB', CC' son concurrentes si y solo si existen tres vectores (no todos nulos) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ paralelos a AA', BB', CC', respectivamente, tales que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ y $\overrightarrow{OA} \times \vec{u} + \overrightarrow{OB} \times \vec{v} + \overrightarrow{OC} \times \vec{w} = \vec{0}$

Nota:$\times$ es el producto vectorial.

En este planteamiento se interpreta el producto $\times$ como producto vectorial, aunque parece más conveniente, con el fin de referirse sólo a vectores del plano, interpretarlo como producto exterior. No obstante, para el caso particular que nos ocupa (un plano en el espacio ordinario) tomar uno u otro no es determinante.

Producto exterior

Previamente damos una pequeña introducción sobre producto exterior, ciñéndonos al caso de un espacio vectorial real de dimensión dos. (Para casos más generales se puede ver:

http://webpages.ull.es/users/amontes/apuntes/geomvari.ps, §2.1 Tensores sobre espacios vectoriales reales).

En el plano ordinario, el conjunto de vectores que parten de un punto, constituyen un espacio vectorial E, real de dimensión dos, relativo a las operaciones ordinarias de suma de vectores y producto de un número real por un vector.

A partir de este espacio vectorial E vamos a construir un espacio vectorial real, que denotamos por $\bigwedge^2 E$ y al que llamaremos producto exterior de E por E.

Consideremos el conjunto Γ de todas las combinaciones lineales formales de elementos del producto cartesiano $E \times E$, es decir, las expresiones de la forma:

$$a = \sum_{i \in I} \alpha^i (u_i, v_i),$$

donde $(u_i, v_i) \in E \times E$ y $\alpha^i \in \mathbb{R}$, son nulos salvo para un número finito de índices.

Observemos que si $a, b \in \Gamma$, se puede siempre tratar de modificar sus expresiones añadiéndole, si es preciso, elementos (u, v) con coeficientes nulos, y suponerlos de la forma

$$a = \sum_{i=1}^{r} \alpha^i (u_i, v_i) \qquad b = \sum_{i=1}^{r} \beta^i (u_i, v_i).$$

Se define sobre Γ una estructura de espacio vectorial, poniendo

$$a + b = \sum_{i=1}^{r} (\alpha^i + \beta^i)(u_i, v_i), \qquad \lambda a = \sum_{i=1}^{r} (\lambda \alpha^i)(u_i, v_i).$$

Así, Γ es el espacio vectorial generado por $E \times F$.

Consideremos ahora el subespacio Γ_0 de Γ engendrado por los elementos de la forma

$$(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v), \quad (u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2), \quad (\lambda u, v) - \lambda(u, v), \quad (u, \lambda v) - \lambda(u, v), \quad (u, u),$$

con $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in E;\ \lambda \in I\!R$.

Al espacio vectorial cociente Γ/Γ_0 le denotamos por $\bigwedge^2 E$. La clase de $\bigwedge^2 E$ que contiene al elemento (u, v) de Γ se denota por $u \wedge v$. De como está generado el subespacio Γ_0, sugen las siguientes propiedades del producto exterior:

$$\begin{aligned}
(u_1 + u_2) \wedge v &= u_1 \wedge v + u_2 \wedge v, \\
u \wedge (v_1 + v_2) &= u \wedge v_1 + u \wedge v_2, \\
\lambda(u \wedge v) &= (\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v), \\
u \wedge u &= 0, \\
u \wedge v &= -v \wedge u.
\end{aligned}$$

La última propiedad es consecuencia de las anteriores, pues basta tener presente que $(u + v) \wedge (u + v) = 0$.

Probemos lo siguente:

$$u \text{ y } v \text{ son linealmente independiantes si y sólo si } u \wedge v \neq 0.$$

Si $\{u, v\}$ son dependientes, existe un $\lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda u$. Entonces $u \wedge v = \lambda u \wedge u = 0$.

Para la otra implicación[(1)], debemos recurrir a intepretar E como $(E^*)^*$ (donde $*$ denota el dual), así, un vector $u \in E$ se puede tomar como una aplicación lineal $u : E^* \longrightarrow I\!R$ y el producto $u \wedge v$ como la aplicación bilineal $u \wedge v : E^* \times E^* \longrightarrow I\!R$, definida por

$$(u \wedge v)(\alpha, \beta) = u(\alpha)v(\beta) - u(\beta)v(\alpha).$$

Entonces, si u y v son independientes, ellos forman una base de E y si $\{u^*, v^*\}$ su base dual en E^*, se tiene que

$$(u \wedge v)(u^*, v^*) = u(u^*)v(v^*) - u(v^*)v(u^*) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

De este resultado se sigue que la dimensión de $\bigwedge^2 E$ es uno, ya que si $\{e_1, e_2\}$ es una base de E, para un par de vectores u y v de E, se puede poner

$$u = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad v = y_1 e_1 + y_2 e_2, \quad u \wedge v = (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_1 \wedge e_2.$$

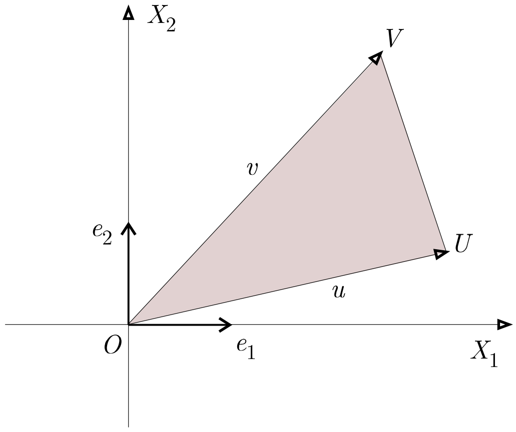
Entonces $e_1 \wedge e_2$ es un vector no nulo de $\bigwedge^2 E$ y cualquier otro vector $\displaystyle\sum_{i \in I} \alpha^i u_i \wedge v_i$, de este espacio, se puede poner en combinación lineal de él.

Interpretación geométrica del producto exterior de vectores del plano ordinario

Si tomanos un sistema de coordenadas asociado a una base ortonormal orientada $\{e_1, e_2\}$, la expresión $x_1 y_2 - x_2 y_1$, resultante de expresar el producto exterior de dos vectores $u = x_1 e_1 + x_2 e_2$ y $v = y_1 e_1 + y_2 e_2$ en funcion de $e_1 \wedge e_2$, es igual al doble del área del triángulo formado por el origen de coordenadas y los puntos $U(x_1, x_2)$ y $V(y_1, y_2)$ y tomando la orientación del triángulo según la orientación de $\{e_1, e_2\}$.

En el caso que nos ocupa (punto y vectores en el plano ordinario), podemos considerar éste como un plano del espacio ordinario y así el producto vectorial $u \times v$ de dos vectores del plano es un vector del espacio, perpendicular al plano cuyo módulo es el doble del área del triángulo cuyos lados están formados por los dos vectores u y v.

El área de $\widehat{OUV}$ es $\dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$.



(1) Dan Pedoe no se complica (pág. 45): "Since we do not wish the vector space $\bigwedge^2 E$ to consist of only te zero vector, we assume that $\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} \neq 0$, for $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ a base of the vectorial space E."

Coordenadas baricéntricas en el plano ordinario.

Dados tres puntos P_0, P_1, P_2 en el plano, para todo punto P, podemos poner

$$\overrightarrow{P_0P} = x_1\overrightarrow{P_0P_1} + x_2\overrightarrow{P_0P_2},$$

es decir, (x_1, x_2) son las coordenadas de P en la referencia afín $\{P_0; \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$.

Para cualquier otro punto Q_0, se tiene:

$$\overrightarrow{Q_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{Q_0P_0} + x_1\overrightarrow{P_0P_1} + x_2\overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{Q_0P_0} + x_1(\overrightarrow{Q_0P_1} - \overrightarrow{Q_0P_0}) + x_2(\overrightarrow{Q_0P_2} - \overrightarrow{Q_0P_0}) =$$

$$= (1 - x_1 - x_2)\overrightarrow{Q_0P_0} + x_1\overrightarrow{Q_0P_1} + x_2\overrightarrow{Q_0P_2} = u_0\overrightarrow{Q_0P_0} + u_1\overrightarrow{Q_0P_1} + u_2\overrightarrow{Q_0P_2},$$

donde

$$u_0 = 1 - x_1 - x_2, \quad u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \qquad u_0 + u_1 + u_2 = 1.$$

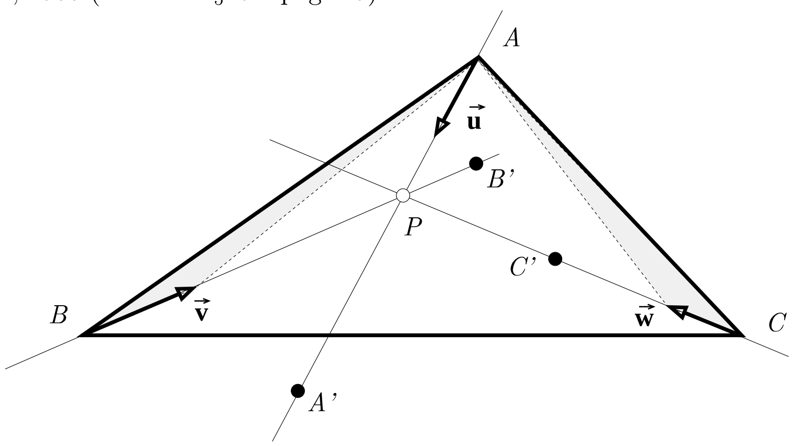
Esto significa que P es el baricentro de $\{P_0, P_1, P_2\}$ afectados de las masas u_0, u_1, u_2; estos escalares no dependen mas que de P y de los puntos $\{P_0, P_1, P_2\}$ tomados; es decir, son independientes del punto Q_0.

Con lo que, identificando P con el vector que determina, respecto a un origen prefijado, podemos escribir

$$P = u_0P_0 + u_1P_1 + u_2P_2, \qquad u_0 + u_1 + u_2 = 1.$$

A la terna (u_0, u_1, u_2) se le denomina coordenadas baricéntricas de P respecto a $\{P_0, P_1, P_2\}$.

Pasemos ahora a la resolución del problema tal como aparece en **Dan Pedoe**.- Geometry: A Comprehensive Course, Dover, New York, 1988 (Theorem §10.2 pag. 49).



Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' concurren en P, entonces se puede poner

$$P = xA + yB + zC, \quad (\text{ó } \ x\overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{BP} + z\overrightarrow{CP} = \vec{0}) \quad \text{con} \quad x + y + z = 1.$$

Tomando los vectores $\vec{\mathbf{u}} = x\overrightarrow{AP}, \vec{\mathbf{v}} = y\overrightarrow{BP}$ y $\vec{\mathbf{w}} = z\overrightarrow{CP}$, se tiene $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}$.

Por otra parte

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = x\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{BP} + z\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{CP} =$$

$$x\overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) + y\overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) + z\overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}) = (x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}) \wedge \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OP} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}.$$

Que son las realaciones buscadas.

Recíprocamente, supongamos la existencia de $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$, paralelos respectivamente a las rectas AA', BB' y CC', y cumpliéndose:

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}.$$

Sea P el punto de intersección de las rectas AA' y BB'. Ya que $\vec{\mathbf{u}}$ es paralelo a la recta AP y $\vec{\mathbf{v}}$ a la recta BP, existen escalares x y y tales que $\vec{\mathbf{u}} = x\overrightarrow{AP}, \vec{\mathbf{v}} = y\overrightarrow{BP}$.

De $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{\mathbf{u}} + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{\mathbf{v}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}$, se sigue

$$x(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) \wedge \overrightarrow{AP} + y(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PB}) \wedge \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}.$$

$$x\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{AP} + y\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}.$$

$$\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}. \Rightarrow -\overrightarrow{OP} \wedge \vec{\mathbf{w}} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E} \Rightarrow \overrightarrow{CP} \wedge \vec{\mathbf{w}} = \vec{0}_{\bigwedge^2 E}.$$

Luego $\overrightarrow{CP}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son dependientes y como $\vec{\mathbf{w}}$ es paralelo a la recta recta CC', ésta contiene al punto P. Se concluye que las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes en P.

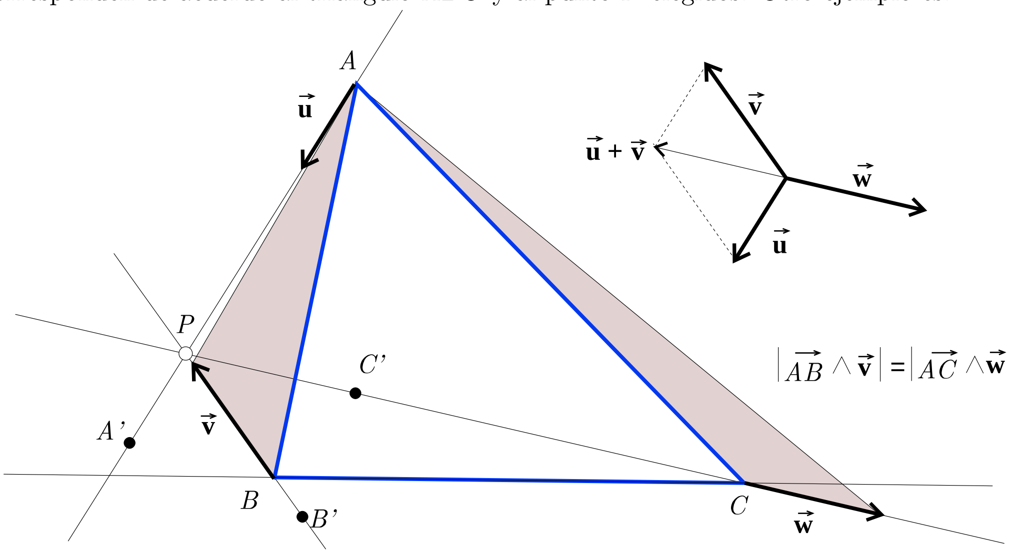
Notas:

— Utilizando la interpretación geométrica del propucto exterior, comentada más arriba, y si tomamos como O el vértice A de $\widehat{ABC}$, los triángulos (sombreados en la figura) determinados, uno por el lado AB y el vector $\vec{\mathbf{v}}$ y otro por el lado AC y el vector $\vec{\mathbf{w}}$, tienen áreas iguales.

— Los escalares x y y, obtenidos en la demostración de la suficiencia para que $AA', BB'CC'$ sean concurentes, junto con el escalar z tal que $\vec{\mathbf{w}} = z\overrightarrow{CP}$, determinan las coordenadas baricéntricas del punto P de concurrencia:

$$\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}, \frac{z}{x+y+z}\right).$$

— En el dibujo presentado al principio de la demostración, las longitudes de los vectores $\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ son las que exactamente corresponden de acuerdo al triángulo $\widehat{ABC}$ y al punto P elegidos. Otro ejemplo es:



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2241.pdf