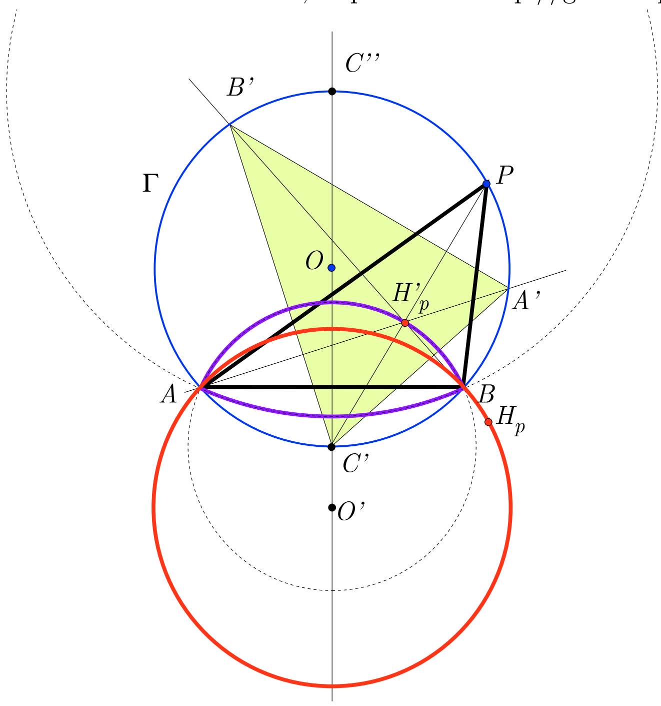
Sea un circunferencia Γ de centro O. Sobre ella se toman dos puntos fijos A y B que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Si un punto P recorre la circunferencia Γ, hallar el lugar geométrico

1) del ortocentro H_p del triángulo $\widehat{ABP}$.

2) del ortocentro H'_p del triángulo $\widehat{A'B'C'}$, siendo A', B' y C' las intersecciones de la circunferencia Γ con las bisectrices internas de los ángulos en A, B y P, respectivamente.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\textbf{409}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona).

Utilizaremos coordenadas baricéntricas homogéneas y los cálculos los haremos con Mathematica, utilizando algunas rutinas incluidas en el cuaderno `Baricentricas.nb`, disponible en http://garciacapitan.auna.com/baricentricas.



1) Tomemos como triángulo de referencia el dado $\widehat{ABC}$ y un punto $P(u, v, w)$ en su circunferencia circunscrita Γ:

$$a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0.$$

El ortocentro del triángulo $\widehat{ABP}$ es

$$H_p\Big(-(S_Bv - S_Cw)(S_Au + S_B(u+w)), -(S_Au - S_Cw)(S_Bv + S_A(v+w)), (S_Au + S_B(u+w))(S_Bv + S_A(v+w))\Big).$$

El cual se obtiene intersecando las perpendiculares desde los vértices A, B y P a los lados opuestos, que tienen como ecuaciones respectivas:

$$(S_Au + S_B(u+w))y + (S_Au - S_Cw)z = 0,$$
$$(S_Bv + S_A(v+w))x + (S_Bv - S_Cw)z = 0,$$
$$(-S_Bv - S_A(v+w))x + (S_Au + S_B(u+w))y + (S_Au - S_Bv)z = 0,$$

donde

$$S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \qquad S_B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}, \qquad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Por ejemplo, la primera es la recta que pasa por $A(1,0,0)$ y por el punto del infinito $(S_Bu - S_Cw, S_Cw - S_Au, S_Au + S_B(u+w))$ de la perpendicular a $wx - uz = 0$ (ecuación de BP).

Eliminando u, v, w se obtiene la ecuación implícita del lugar geométrico descrito por H_p:

$$a^2(S_Ax - S_Cz)(S_By + S_A(y+z)) + (S_By - S_Cz)\left(b^2(S_Ax + S_B(x+z)) + c^2(S_Cz - S_Ax)\right) = 0.$$

O bien,

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - 2S_c z(x+y+z) = 0.}$$

Que es la circunferencia simétrica de Γ, respecto a AB, como se comprueba sustituyendo en la ecuación de la circunferencia circunscrita Γ, $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, las expresiones de la simetría respecto a AB:

$$x' = c^2x + 2S_Bz, \quad y' = c^2y + 2S_Az, \quad z' = -c^2z.$$

2) Para la segunda parte utilizamos el hecho[1] de que las alturas del triángulo $\widehat{A'B'C'}$ son las bisectrices interiores del triángulo $\widehat{ABP}$.

Determinamos las bisectrices de $\widehat{ABP}$ utilizando una de las rutinas, `CuartaRecta`, que define Francisco García Capitán en "Giros con baricéntricas", disponible en
http://www.aloj.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol309garcap/sol309garcap.pdf,
para obtener una recta que forma con otra un ángulo dado, siendo éste el formado por otras dos rectas dadas. La sintaxis es `CuartaRecta[P,r1,r2,r3]`, que determina la recta `r4` que pasa por el punto `P` y que forma con la recta `r3` el mismo ángulo que `r1` forma con `r2`. (Ver también La Gaceta **10** (2007) 2 p. 488).

En nuestro caso la cuarta recta es, por ejemplo, la bisectriz AP que es una recta del haz $AC + \mu AB$ y que forma igual ángulo con las rectas AB y AP.

```
Solve[CuartaRecta[{1,0,0},{0,0,1},{0,1,0}+\[Mu]{0,0,1},
        {0,1,0}+\[Mu] {0,0,1}]== \[Lambda] {0,w,u},{\[Mu],\[Lambda]}]
```

donde `{1,0,0}, {0,0,1}, {0,1,0}, {0,w,u}` son el punto A y las rectas AB, AC y AP, respectivamente.

Esto permite obtener el valor de μ, que determina la recta del haz de punto base A, que es la bisectriz AP y cuya ecuación es

$$cwy + \left(-cv + \sqrt{c^2v^2 + b^2w^2 + (-a^2+b^2+c^2)vw}\right) z = 0.$$

Análogamente, obtenemos que la ecuación de la bisectriz PB es

$$c\left(-cu + \sqrt{c^2u^2 + a^2w^2 + (a^2-b^2+c^2)uw}\right) x + ((-a^2+b^2-c^2)u - a^2w)z = 0.$$

El punto de intersección de estas bisectrices es

$$H'_p\Bigg(w\left((-a^2+b^2-c^2)u - a^2w\right),$$

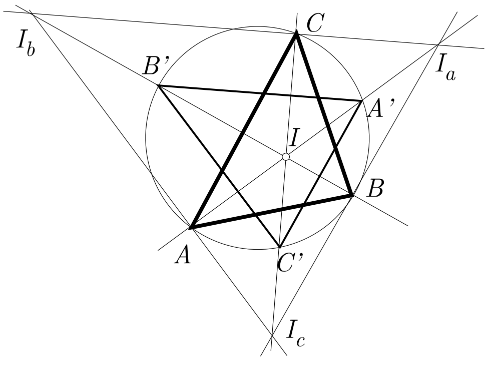
$$-\left(\sqrt{c^2u^2 + a^2w^2 + (a^2-b^2+c^2)uw} - cu\right)\left(cv - \sqrt{c^2v^2 + b^2w^2 + (-a^2+b^2+c^2)vw}\right),$$

$$cw\left(cu - \sqrt{c^2u^2 + a^2w^2 + (a^2-b^2+c^2)uw}\right)\Bigg).$$

Eliminando las u, v y w se obtiene la ecuación implícita del lugar geométrico que describe H'_p:

$$(c^2xy - abxz + b^2xz + a^2yz - abyz - abz^2)(c^2xy + abxz + b^2xz + a^2yz + abyz + abz^2) = 0.$$

[1] El punto medio del incentro $I(a,b,c)$ y el exincentro $I_a(-a,b,c)$, situados en la bisectriz interior del vértice A de un triángulo $\widehat{ABC}$, está en su circunferencia circunscrita.



En efecto, dicho punto medio tiene de coordenadas

$$(-a^2, b(b+c), c(b+c)),$$

que satisfacen a la ecuación $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ de la circunferencia circunscrita.

En consecuencia, el triángulo $\widehat{A'B'C'}$, con vértices en los puntos de corte de las bisectrices interiores de $\widehat{ABC}$ con su circunferencia circunscrita, es el homotético de $\widehat{I_aI_bI_c}$, con vértices en los exincentros de $\widehat{ABC}$, mediante la homotecia de centro en I y razón $1/2$. Luego, sus correspondientes lados son paralelos y, por tanto, la bisectriz AI en A, que es perpendicular a I_bI_c, también los es a $B'C'$. Por consiguiente, las bisectrices interiores de $\widehat{ABC}$ son las alturas de $\widehat{A'B'C'}$.

O bien,

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - abz(x + y + z) = 0, \qquad a^2yz + b^2zx + c^2xy + abz(x + y + z) = 0.}$$

Se trata de dos circunferencias que contienen a los vértices A y B y cuyos centros están en los puntos de intersección de la mediatriz del segmento AB con la circunferencia Γ:

$$(a(a + b), b(a + b), -c^2), \qquad (a(-a + b), (a - b)b, c^2).$$

En realidad, el lugar geométrico de H'_p sólo es la parte de estas circunferencias contenidas en Γ.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2249.pdf