Sea una circunferencia Γ de centro O. Sobre ella, se toman dos puntos fijos B y C que son los dos vértices de la base de un triángulo $\widehat{ABC}$ inscrito en Γ. Sea un punto Q variable sobre Γ:

1.- Hallar el lugar geométrico del baricentro G_Q del triángulo $\widehat{BCQ}$.

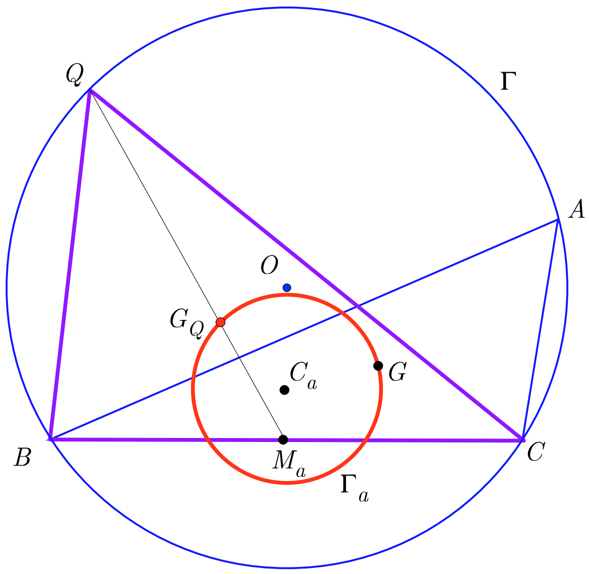
2.- Se trazan, en $\widehat{BCQ}$ la altura desde el vértice B, que corta al lado CQ en el punto D, y la altura desde el vértice C que corta al lado QB en el punto E. Determinamos un punto P, en la recta DE, tal que $PE/PD = k$. Hallar el lugar geométrico de P.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **411**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona).

1.- Recordar que el baricentro de un triángulo se localiza en el punto de trisección de cada mediana, más alejado del vértice. De acuerdo a esto, si M_a es el punto medio del lado BC en el triángulo $\widehat{BCQ}$, su baricentro G_Q será el homólogo de Q en la homotecia de centro M_a y razón $1/3$. Por tanto, el lugar geométrico que describe G_P, cuando Q varía en Γ, es la circunferencia homotética a ésta, mediante la homotecia descrita.

Establezcamos este resultado usando coordenadas. Utilizamos coordenadas baricéntricas homogéneas [(1)] relativas al triángulo dado $\widehat{ABC}$. Tomemos un punto $Q(u:v:w)$ en la circunferencia Γ circunscrita a $\widehat{ABC}$, verificándose entonces que $a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0$. El baricentro G_Q de los puntos $B(0:1:0), C(0:0:1)$ y $Q(u:v:w)$ es

$$G_Q(u : u+2v+w : u+v+2w).$$



Para obtener la ecuación implícita del lugar geométrico que describe G_Q, cuando Q varía en Γ, debemos eliminar u, v y w entre las ecuaciones:

$$x = u, \quad y = u+2v+w, \quad z = u+v+2w, \qquad a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0.$$

$$\Gamma_a : \boxed{c^2xy + b^2xz + a^2yz + (x+y+z)\left(\frac{a^2-3b^2-3c^2}{9}x - \frac{2a^2}{9}y - \frac{2a^2}{9}z\right) = 0.}$$

Se trata de la circunferencia Γ_a homotética de Γ $(a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0)$, mediante la homotecia de centro en el punto medio $M_a(0:1:1)$ de BC y razón $1/3$:

$$x' = x, \qquad y' = x+2y+z, \qquad z' = x+y+2z.$$

Su centro [(2)] es $C_a(a^2S_A : a^2S_A + 2b^2S_B + c^2S_C : a^2S_A + b^2S_B + 2c^2S_C)$, su radio $R/3$ y pasa por el baricentro $G(1:1:1)$ (homotético de A) de $\widehat{ABC}$.

[(1)] Para automatizar los cálculos hechos con MATHEMATICA, utilizamos algunas de las rutinas incluidas en el cuaderno `Baricentricas.nb`, disponible en http://garciacapitan.auna.com/baricentricas.
[(2)] Ulilizamos las notaciones: $S_A = (-a^2+b^2+c^2)/2, S_B = (a^2-b^2+c^2)/2, S_C = (a^2+b^2-c^2)/2$.

2.- Tomemos un punto $Q(a^2t : -b^2t(1+t) : -c^2(1+t))$ en la circunferencia Γ circunscrita al triángulo $\widehat{ABC}$. La perpendicular por B a CQ,

$$(-a^2S_A - b^2S_B(1+t))x + (a^2S_C - a^2b^2(1+t))z = 0,$$

corta a CQ en

$$D\left(-a^2S_C + a^2b^2(1+t) : -b^2(1+t)(-S_C + b^2(1+t)) : -(a^2S_A + b^2S_B(1+t))\right).$$

La perpendicular por C a BQ,

$$(-a^2S_At - c^2S_C(1+t))x + (a^2S_Bt - a^2c^2(1+t))y = 0,$$

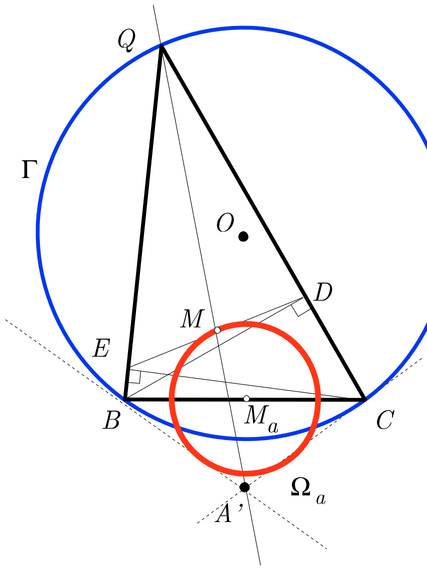
interseca a BQ en

$$E\left(t(-a^2S_Bt + a^2c^2(1+t)) : -t(a^2S_At + c^2S_C(1+t)) : -c^2(1+t)(-S_Bt + c^2(1+t))\right).$$

El punto medio M de DE es

$$M\Big(-a^2b^2S_A\mathbf{t}^2 + b^2(-a^4 + a^2b^2 + 2a^2c^2 + 3b^2c^2 - c^4)\mathbf{t} + 2b^2c^2S_A :$$

$$-4a^2b^2c^2\mathbf{t}^2 + 4b^4c^2\mathbf{t} + 4b^2c^4 : -2a^2c^2S_A\mathbf{t}^2 + 2b^2c^2S_A\mathbf{t} + c^2(-a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 3b^2c^2)\Big).$$



Las rectas QM tienen de ecuación:

$$a^2(c^2(1+t) + t(-a^2 + b^2(1+t)))(a^2c^2y - b^2(c^2(-1+t^2)x + a^2t^2z)) = 0.$$

Las cuales concurren en un mismos punto, que se determina resolviendo las ecuaciones en las variables x, y, z que resultan de igualar a cero los coeficientes del polinomio de segundo grado en t, obtenido de esta ecuación:

$$b^2x + a^2y = 0, \quad b^2x + a^2y = 0, \quad (b^2 - c^2)x + a^2y - a^2z = 0,$$

y se obtiene el punto $A'(-a^2, b^2, c^2)$, que es el punto de intersección de las tangentes en B y C a Γ.

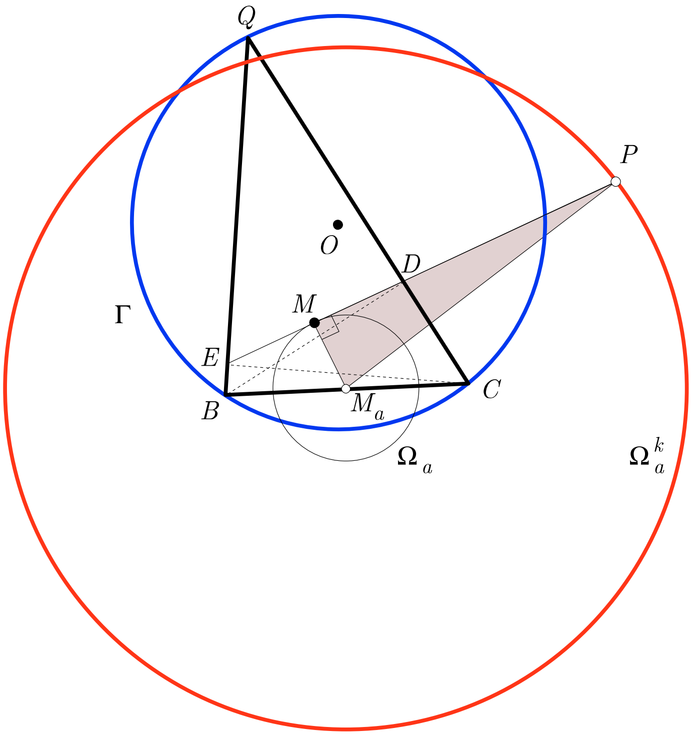
De estos resultados se sigue que

$$\frac{A'M}{A'Q} = \frac{(-a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{4b^2c^2} = \frac{a^2}{4R^2},$$

que no depende del punto Q tomado en Γ, siendo R el radio de Γ.

En consecuencia, el lugar geométrico Ω_a que describe el punto medio M de DE es la circunferencia homotética a Γ, mediante la homotecia de razón $a^2/(4R^2)$ y centro en el vértice del triangulo tangencial correspondiente al lado BC del triangulo $\widehat{ABC}$. Su centro (homotético del circuncentro O) es el punto medio M_a de BC y su radio es $a^2/(4R)$. La homotecia en cuestión tiene por ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
x' &= (a^2b^2 - b^4 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4)x - 2a^2S_Ay - 2a^2S_Az \\
y' &= -2b^2S_Ax + (a^4 - a^2b^2 - 2a^2c^2 - 3b^2c^2 + c^4)y - 2b^2S_Az \\
z' &= -2c^2S_Ax + -2c^2S_Ay + (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^2c^2 - 3b^2c^2)z
\end{aligned}
$$



Para encontrar el lugar geométrico que describe el punto P tal que $PE/PD = k$, observemos primeramente que la longitud [3] del segmento DE permanece constante, cuando Q varía en Γ, y vale $\dfrac{aS_A}{bc}$.

Usando este hecho resulta entonces que, al ser $PE/PD = k$, la longitud del segmento MP es constante igual a $\dfrac{aS_A}{2bc}\left(\dfrac{k+1}{k-1}\right)$. Además, como $M_aM = a^2/(4R)$ y el triángulo $\widehat{M_aMP}$ es rectángulo en M, se tiene entonces que M_aP es constante, por lo que el lugar geométrico de P es una circunferencia Ω_a^k de centro en M_a y radio

$$
\frac{a\sqrt{a^2b^2c^2(k-1)^2 + 4R^2S_A^2(k+1)^2}}{4bcR(k-1)}.
$$

Ecuaciones de las circunferencias Ω_a y Ω_a^k

Las coordenadas del punto medio M de DE, expresadas más arriba, vienen dadas por polinomios de segundo grado en el parámetro t. Por tanto, M describirá una cónica, cuya ecuación implícita se obtiene mediante un método general descrito por Clark Kimberling [4]

Llegándose a que la ecuación de la circunferencia Ω_a es:

$$
\Omega_a : \boxed{c^2xy + b^2xz + a^2yz - \frac{S_A(x+y+z)}{8b^2c^2}\left((-a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + 8b^2c^2)x + 2a^2S_Ay + 2a^2S_Az\right) = 0.}
$$

Y la de la circunferencia Ω_a^k descrita por el punto P, cuya ecuación paramétrica se obtiene teniendo en cuenta que el punto P divide a ED en la razón $-k$,

$$
P\Big(2a^2b^2S_A\mathbf{t}^2 + (b^2a^4 - b^4a^2 - 2b^2c^2a^2 + b^2c^4 - b^4c^2 + 2b^4c^2k)\mathbf{t} - 2c^2b^2S_A :
$$

$$
2a^2b^2c^2(1-k)\mathbf{t}^2 + b^2c^2\left(-b^2 + 3kb^2 + c^2 - a^2 + kc^2 - ka^2\right)\mathbf{t} + b^2c^2(-b^2 - kb^2 - 3c^2 + a^2 + kc^2 + ka^2) :
$$

[3] Para determinar la distancia entre dos puntos, dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, utilizamos la fórmula dada por Paul Yiu en "An Introduction to the Geometry of the Triangle, 2001", pág. 88. Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/geometry.html

[4] Conics Associated with a Cevian Nest (pag. 142). Forum Geometricurum 1(2001) 141-150. Disponible en http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200121.pdf.

$$-2ka^2c^2S_A\mathbf{t}^2+2kb^2c^2S_A\mathbf{t}+c^2(-ka^4+c^2ka^2+2b^2ka^2-2b^2c^2+kb^2c^2-kb^4)\Big).$$

Ω_a^k :

$$\boxed{c^2xy+b^2xz+a^2yz-\frac{S_A(x+y+z)}{2b^2c^2(k-1)^2}\big((2b^2c^2+a^4k-a^2b^2k-a^2c^2k-4b^2c^2k+2b^2c^2k^2)x-a^2S_Aky-a^2S_Akz\big)=0.}$$

Como casos particulares de estas circunferencias Ω_a^k, tenemos:
— $k=-1$: $P=M$ y es la circunferencia Ω_a.
— $k=0$ ó $k=\infty$: Es la circunferencia de diámetro BC,

$$c^2xy+b^2xz+a^2yz-S_A(x+y+z)x=0.$$

— $k=1$: Es la recta del infinito, $x+y+z=0$.

Notas adicionales:

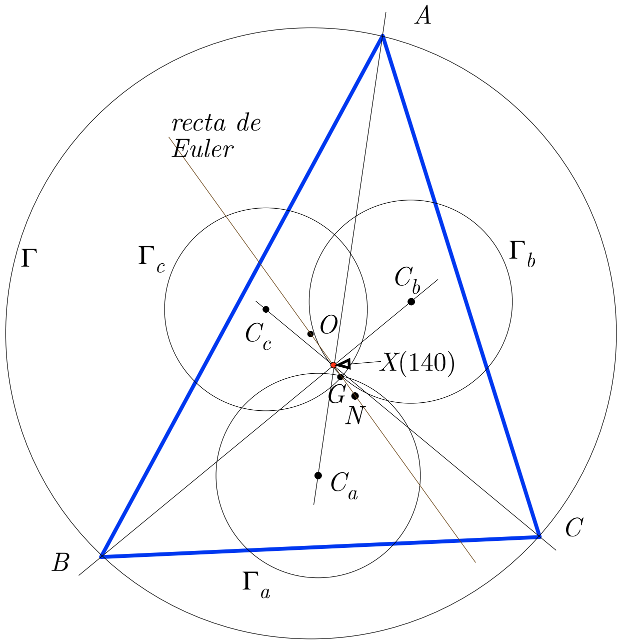
Si en el Apartado 1, en vez de dejar fijos los vértices B y C y variar A, variamos B, dejando fijos C y A, y variamos C, dejando fijos A y B, se obtienen otros dos lugares geométricos, que son circunferencias Γ_b y Γ_b con centros en

$$C_b(2a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C : b^2S_B : a^2S_A+b^2S_B+2c^2S_C), \quad C_c(2a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C : a^2S_A+2b^2S_B+c^2S_C : c^2S_C),$$

resultando que el triángulo $\widehat{C_aC_bC_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en

$$(2a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C :\ a^2S_A+2b^2S_B+c^2S_C :\ a^2S_A+b^2S_B+2c^2S_C),$$

punto medio del circuncentro O y el centro N de la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$, dicho punto es el centro X_{140} en ETC [(5)].



Por otra parte, el otro centro de homotecia, distinto de M_a, de las circunferencias Γ y Γ_a (del lugar geométrico de los baricentros de los triángulos $\widehat{BCQ}$), tiene de coordenadas

$$H_a\big(2a^2(b^2S_B-c^2S_C) : (S_B-S_C)(a^2S_A+3b^2S_B+c^2S_C) : (S_B-S_C)(a^2S_A+b^2S_B+3c^2S_C)\big).$$

Si, como anteriormente, movemos los vértices B y C sobre Γ (en lugar de A), se obtienen otras dos circunferencias Γ_b y Γ_c, lugares geométricos de los baricentros de los triángulos $\widehat{CAQ}$ y $\widehat{ABQ}$. Los centros de homotecia de estas circunferencias y Γ, distintos de los puntos medios $M_b(1:0:1)$ y $M_c(1:1:0)$ de los lados CA y AB, son

$$H_b\big((-S_A+S_C)(3a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C) : 2b^2(-a^2S_A+c^2S_C) : (-S_A+S_C)(a^2S_A+b^2S_B+3c^2S_C)\big),$$

(5) http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/index.html

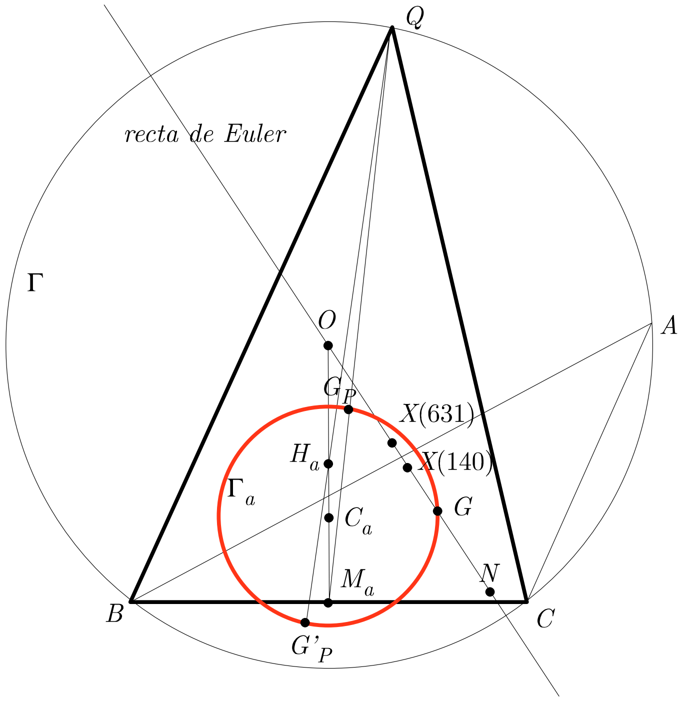
$$H_c\big((S_A-S_B)(3a^2S_A+b^2S_B+c^2S_C):(S_A-S_B)(a^2S_A+3b^2S_B+c^2S_C):2c^2(a^2S_A-b^2S_B)\big).$$

Entonces, el triángulo $\widehat{H_aH_bH_c}$ es perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad

$$(-3a^2S_A-b^2S_B-c^2S_C:\ -a^2S_A-3b^2S_B-c^2S_C:\ -a^2S_A-b^2S_B-3c^2S_C).$$

Se trata del punto X_{631} en ETC, que verifica $\overrightarrow{OX_{361}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OG}$.

(Applet CabriJava)

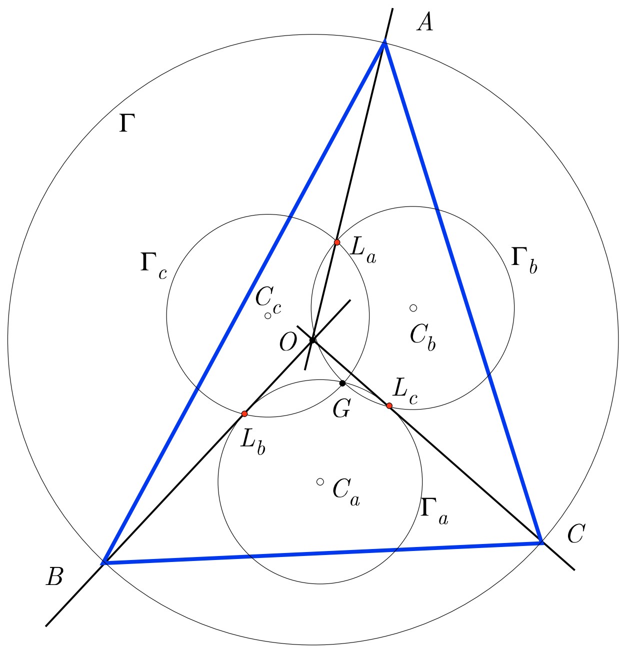


Finalmente, los tres puntos L_a, L_b y L_c (distintos de G) de intersección de las circunferencias Γ_a, Γ_b y Γ_c forman un triángulo $\widehat{L_aL_bL_c}$, perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad el circuncentro O de $\widehat{ABC}$.

$$L_a(4a^2S_A:4b^2S_B:-a^4-b^4+4b^2c^2-3c^4+2a^2b^2+4a^2c^2),$$

$$L_b(-3a^4-b^4+4a^2c^2-c^4+4b^2a^2+2c^2b^2:4b^2S_B:4c^2S_C),$$

$$L_c(4a^2S_A:-a^4+4a^2b^2-3b^4+2a^2c^2+4b^2c^2-c^4:4c^2S_C).$$



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2252.pdf