Sean un triángulo $\widehat{ABC}$, inscrito en una circunferencia Γ de centro O, y H su ortocentro. El lugar geométrico de los puntos medios de los lados de todos los triángulo inscritos en Γ, con ortocentro H, es la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{418}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por José María Pedret. Ingeniero Naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona), con el siguiente enunciado:

En un plano cualquiera, se dan:

— un círculo Γ de centro O,

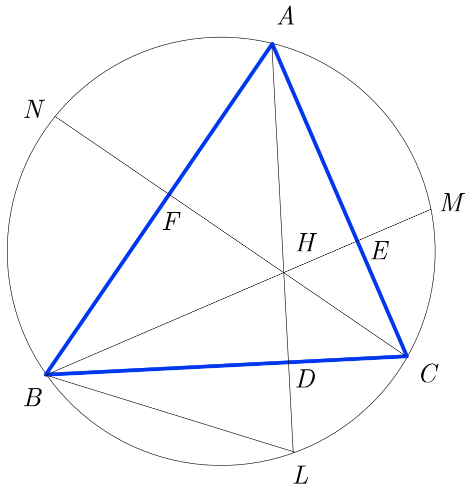
— un punto fijo H.

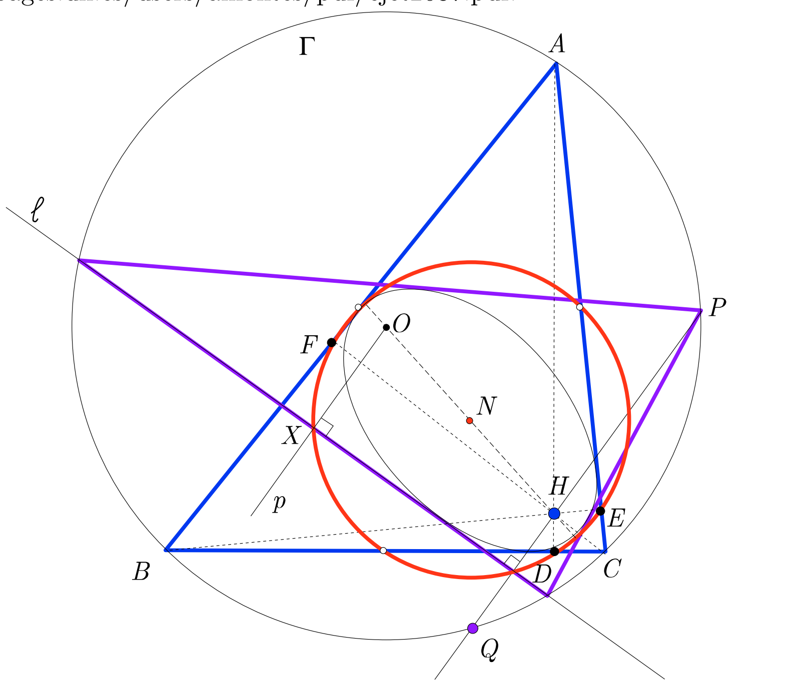
En Γ se inscriben triángulos variables $\widehat{ABC}$, cuyo ortocentro es H.

— Hallar el lugar geométrico del punto medio de uno de los lados del triángulo.

— Caracterizar dicho lugar geométrico.

Este enunciado ha sido ligeramente modificado, ya que puede ocurrir que no se puedan construir ningún triángulo inscrito en una circunferencia dada Γ y que tengan ortocentro en un punto dado en H: No se puede construir si $|PH - PO| < R$, donde P es un punto cualquiera de Γ, O su centro y R su radio. Ver
http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2087.pdf.





Observemos, en primer lugar, que si se prolonga la altura AH de $\widehat{ABC}$ hasta L, en la circunferencia circunscrita Γ, el lado BC es la mediatriz de HL.

En efecto, si D, E y F son los pies de las alturas desde A, B y C (respectivamente), los ángulos $\widehat{CBL}$ y $\widehat{CAL}$, inscritos en Γ, son iguales al abarcar el mismo arco. También, los ángulos $\widehat{CAD}$ y $\widehat{CBE}$ son iguales, pues los lados de uno son perpendiculares a los del otro. Luego, BD es a la vez bisectriz y altura en el triángulo $\widehat{BHL}$; en consecuencia, D es el punto medio del segmento HL y BC es su mediatriz.

La misma propiedad la poseen las otras dos alturas de $\widehat{ABC}$.

Cualquier triángulo inscrito en Γ, con ortocentro en H, va a tener esta propiedad. Luego, para construirlos basta tomar un vértice en un punto genérico P en Γ y su lado opuesto va a ser la mediatriz del segmento HQ, siendo Q el otro punto donde la recta PH corta a Γ.

Sea el punto $P(a^2(t-1) : b^2t : c^2(t-1))$, en coordenadas baricéntricas homogéneas, sobre la circunferencia circunscrita, $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$, al triángulo de referencia $\widehat{ABC}$. Un punto genérico sobre la recta PH $(H(S_BS_C :$

$S_CS_A : S_AS_B$) el ortocentro de $\widehat{ABC}$) tiene por coordenadas

$$\Big(a^2(t-1)t(1-\mu)S^2 + S_BS_C\left((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t\right)\mu :$$

$$b^2t(1-\mu)S^2 + S_AS_C\left((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t\right)\mu :$$

$$S_AS_B\left((t-1)ta^2 - c^2(t-1) + b^2t\right)\mu - c^2S^2(t-1)(1-\mu)\Big),$$

donde

$$S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \quad S_B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}, \qquad S^2 = S_BS_C + S_CS_A + S_AS_B,$$

siendo S el doble del área de $\widehat{ABC}$.

El otro punto Q de intersección de la recta PH con la circunferencia circunscrita tiene las coordenadas

$$Q\Big(S_BS_C\left(a^2S_At + c^2S_C\right)\left(-a^2S_A(t-1) + b^2S_B\right) :$$

$$-S_AS_C\left(-a^2S_A(t-1) + b^2S_B\right)\left(b^2S_Bt + c^2S_C(t-1)\right) :$$

$$S_AS_B\left(a^2S_At + c^2S_C\right)\left(b^2S_Bt + c^2S_C(t-1)\right)\Big)$$

La mediatriz ℓ de HQ es

$$\ell \equiv \quad a^2S_A(t-1)tx + b^2S_Bty - c^2S_C(t-1)z = 0.$$

La recta que pasa por el circuncentro O de $\widehat{ABC}$ y es perpendicular a ℓ, corta a ésta en el punto medio de la cuerda que determina en Γ. Dicha recta perpendicular tiene por ecuación:

$$p \equiv \quad \Big(-c^4(a^2+b^2-c^2) + (-a^4b^2 + 2a^2b^4 - b^6 + a^4c^2 + b^4c^2 + b^2c^4 - c^6)t + a^2(b^2-c^2)(a^2-b^2-c^2)t^2\Big)x +$$

$$\Big(c^4(a^2+b^2-c^2) + (c^2-a^2)(a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2b^2c^2 + c^4)t + a^4(a^2-b^2-c^2)t^2\Big)y +$$

$$\Big(c^2(b^2-a^2)(a^2+b^2-c^2) + (a^6 - a^4b^2 - a^2b^4 + b^6 - 2b^4c^2 - a^2c^4 + b^2c^4)t + a^4(-a^2+b^2+c^2)t^2\Big)z = 0.$$

Estas rectas, ℓ y p, se cortan en

$$X(c^2 + (b^2-c^2)t : c^2 - (a^2+c^2)t + a^2t^2 : (b^2-a^2) + a^2t^2).$$

El lugar geométrico que describe este punto es el pedido, que resulta ser la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$:

$$\boxed{a^2yz + b^2zx + c^2xy - \tfrac{1}{2}(x+y+z)(S_Ax + S_By + S_Cz) = 0,}$$

que pasa por los puntos medios de los lados y por los pies de las alturas de $\widehat{ABC}$.

Nota adicional.- La envolvente de los triángulos inscritos en Γ, con ortocentro en H, es una elipse (cuando H es interior a Γ, es decir, cuando $\widehat{ABC}$ es acutángulo), de focos en O y H; su centro (punto medio de OH) es el centro N de la circunferencia de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. La circunferencia focal (relativa al foco O) de esta elipse es Γ y la circunferencia principal es la de los nueve puntos de $\widehat{ABC}$. Luego, la perpendicular desde O a una tangente a la elipse, corta a dicha tangente en un punto de la circunferencia de los nueve puntos, y dicho punto es el punto medio de la cuerda que la tangente determina en la circunferencia focal de O. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr1880.pdf).