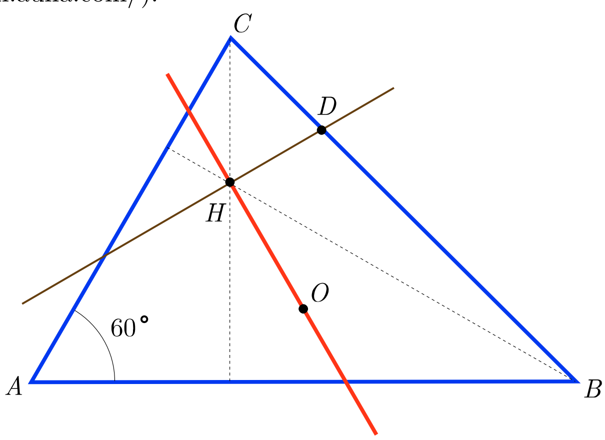
En un triángulo acutángulo $\widehat{ABC}$ el ángulo A vale 60^o. Demostrar que una de las bisectrices del ángulo formado por las dos alturas trazadas desde los vértices B y C pasa por el circuncentro del triángulo.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **419**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por Fancisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero. Priego de Códoba. (Su página personal es: http://garciacapitan.auna.com/).



Si $A = 60^o$, se tiene que

$$\operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos A = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{cotg} A = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad S = 2\Delta = bc \operatorname{sen} A = \frac{\sqrt{3}}{2}bc, \quad S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2} = S \operatorname{cotg} A = \frac{1}{2}bc.$$

Vamos a determinar la bisectriz interior en H del triángulo $\widehat{BCH}$, utilizando el teorema de las bisectrices: "Toda bisectriz interior divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes".

Para utilizar este hecho debemos determinar las longitudes de los segmentos BH y CH. Esto lo podemos hacer usando la fórmula [(1)] de la distancia entre dos puntos $P_1(x_1 : y_1 : z_1)$ y $P_2(x_2 : y_2 : z_2)$ (en coordenadas baricéntricas homogéneas):

$$\overline{P_1P_2}^2 = \frac{1}{(x_1+y_1+z_1)^2(x_2+y_2+z_2)^2}\left(\mathfrak{S}\, S_A((y_2+z_2)x_1 - x_2(y_1+z_1))^2\right).$$

En el caso que nos ocupa, siendo $B(0:1:0), C(0:0:1)$ y $H(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$, el ortocentro de $\widehat{ABC}$, se tiene que

$$\overline{HB} = \frac{bS_B}{S} = b \operatorname{cotg} B, \qquad \overline{HC} = \frac{cS_C}{S} = b \operatorname{cotg} C,$$

que son positivas si $\widehat{ABC}$ es acutángulo.

El punto D en que la bisectriz a $\widehat{BHC}$ corta al lado BC es tal que $BD : DC = HB : HC = bS_B : cS_C$; luego

$$D(0 : cS_C : bS_B).$$

La bisectriz HD tiene por ecuación

$$(b-c)S_Ax - bS_By + cS_Cz = 0.$$

Su perpendicular por H (es decir, la otra bisectriz de las alturas BH y CH) es la recta

$$S_A(bS_B + cS_C)x + bS_B(S_A - bc)y + c(S_A - bc)S_Cz = 0.$$

Para que una de estas rectas contengan al circuncentro $O(a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ se ha de verificar, respectivamente, que se anule una de las relaciones siguientes, obtenidas sustituyendo las coordenadas de O en el primer miembro de sus ecuaciones,

$$\frac{1}{4}(-b+c)(-a-b+c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)(-a^2+b^2+bc+c^2),$$

$$\frac{1}{4}(a-b-c)(a+b-c)^2(a-b+c)^2(b+c)(a+b+c)(-a^2+b^2-bc+c^2).$$

[(1)] Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. pág 88. Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps

El último factor de esta úlima relación, cuando $A = 60^o$, se anula:

$$-a^2 + b^2 - bc + c^2 = 2S_A - bc = bc - bc = 0.$$

Concluimos que una de las bisectrices de las alturas BH y CH pasa por el circuncentro de $\widehat{ABC}$.

Otro camino para revolver el problema, que no necesita tener conocimiento del teorema de las bisectrices:

Llamando H_b y H_c a los pies de las alturas trazadas por B y C, respectivamente, se calcula el punto H'_b simétrico de H_b respecto de la recta OH. Si el enunciado es correcto, entonces este punto deberá estar sobre la recta CH_c.

$$H_b(S_C : 0 : S_A), \qquad H_c(S_B : S_A : 0),$$

$$H'_b\big(S_C(c^4(-S_A + S_B)S_C^4 + b^6S_B^4 + a^6S_A^4 - 2a^2S_A^2(c^2(-S_A + S_B)S_C^2 + b^4S_B^2)) : 2S_AS_C(a^2S_A^2 - c^2S_C^2)^2 :$$
$$S_A(a^4S_A^4(S_B - S_C) + c^6S_C^4 + b^6S_B^4 - 2b^4c^2S_B^2S_C^2 + 2a^2c^2S_A^2S_C^2(-S_B + S_C))\big)$$

Evaluando S_A, S_B y S_C en el determinante formado por las coordenadas de C, H_c y H'_b, resulta:

$$-\frac{1}{64}(a-b-c)^2(b-c)(a+b-c)^2(a-b+c)^2(b+c)(a+b+c)^2(a^2-b^2-c^2)(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2-bc-c^2)(a^2-b^2+bc-c^2),$$

que se anula cuando $A = 60^o$, $A = 120^o$, $A = 90^o$.

Nota adicional:

Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, con $A = 60^o$, todos los tiángulo $\widehat{AB'C'}$, con B' en AB y C' en AC, tienen rectas de Euler paralelas.

En el triángulo de referencia $\widehat{ABC}$ el punto del infinito de la recta de Euler, OH, es

$$\big(a^2S_A^2(S_B+S_C)-S_BS_C(b^2S_B+c^2S_C) : b^2S_B^2(S_A+S_C)-S_AS_C(a^2S_A+c^2S_C) : -(a^2S_A^2S_B)-b^2S_AS_B^2+c^2(S_A+S_B)S_C^2\big)$$

Si $A = 60^o$ ($a^2 = b^2 + c^2 - bc$), sustituyendo S_A, S_B y S_C en funcion de las longitudes de los lados, el punto del infinito de OH es

$$(b - c : -b : c).$$

Tomemos $B'(1 - \lambda : \lambda : 1)$ y $C'(1 - \mu : 0 : \mu)$ en los lados AB y AC, respectivamente. El circuncentro de $\widehat{AB'C'}$ es

$$O'\big(- S_A(S_C(-2 + \lambda) + S_B(-2 + \mu)) - S_BS_C(-2 + \lambda + \mu) : b^2(S_B\lambda + S_A(\lambda - \mu)) : -c^2(S_A(\lambda - \mu) - S_C\mu)\big).$$

El ortocentro de $\widehat{AB'C'}$ es

$$H'\big(S_BS_C + S_A(S_B + S_C - S_B\lambda - S_C\mu) : S_A(S_C\mu + S_A(-\lambda + \mu)) : S_A(S_B\lambda + S_A(\lambda - \mu))\big).$$

Las coordenadas del punto del infinito de la recta de Euler $O'H'$ de $\widehat{AB'C'}$ son

$$\big(- S_BS_C(\lambda + \mu) + S_A(2S_B\lambda - S_C\lambda - S_B\mu + 2S_C\mu) : S_BS_C\lambda + S_A(S_B\lambda + S_C(\lambda - 3\mu)) + 3S_A^2(\lambda - \mu) :$$
$$-3S_A^2(\lambda - \mu) + S_BS_C\mu + S_A(S_C\mu + S_B(-3\lambda + \mu))\big).$$

Sustituyendo S_A, S_B y S_C por sus valores y $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ($A = 60^o$), se obtiene el mismo punto del infinito que el de OH:

$$\left(\frac{3}{2}bc(b - c)(-c\lambda + b\mu) : \frac{3}{2}b^2c(c\lambda - b\mu) : \frac{3}{2}bc^2(-c\lambda + b\mu)\right) = (-b + c : b : -c).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2263.pdf