Construir un triángulo del que se conocen los radios de sus circunferencias circunscrita e incrita y además la altura relativa a uno de sus vértices.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **425**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por Vicente Vicario García (profesor del I.E.S. El Sur, Huelva) con el siguiente enunciado:

Demostrar que es posible construir con regla y compás un triángulo ABC conocidos el radio de su circunferencia circunscrita R, el radio de su circunferencia inscrita r y una altura del mismo. Establecer también las condiciones para que sea posible tal construcción y proporcionar alguna.

Vamos a utilizar los dos resultados siguientes:

R1.- La distancia d entre el circuncentro O y el incentro I de un triángulo viene dada por

$$\overline{OI}^2 = d^2 = R(R-2r),$$

donde, R y r son los radios de las circunferencias circunscritas e incritas, respectivamente.

R2.- Sean dos circunferencias Γ y γ, la segunda con centro en un punto A sobre la primera, y tales que se corten (Fig. A). Cuando las tangentes a γ cortan a Γ en dos puntos B y C, el incentro del triángulo $\widehat{ABC}$ está en una circunferencia de centro en el punto A' antipodal de A en Γ. (Applet CabriJava)

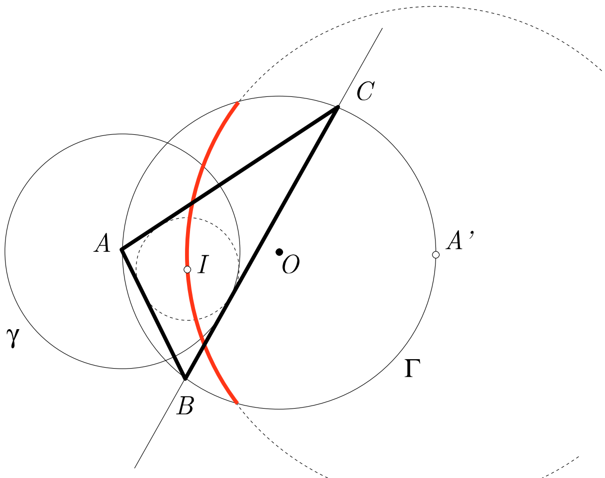

Fig. A

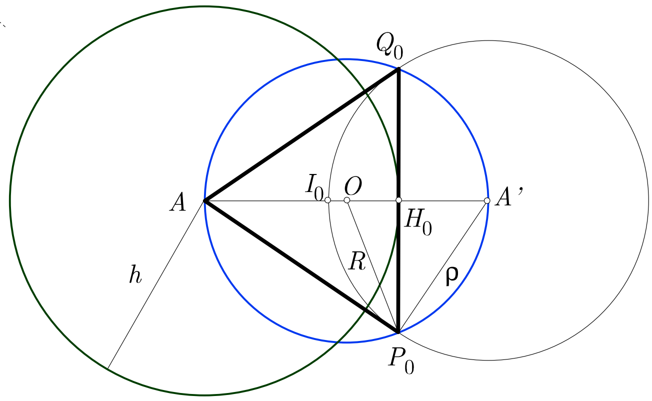

Fig. B

Trazamos una circunferencia $O(R)$, con centro en un punto arbitrario O y de radio R dado (Fig. C); en ella vamos a inscribir el triángulo pedido. Fijamos un punto A, sobre $O(R)$, que va a ser un vértice del triángulo, tal que la altura desde él, h, es un dato dado. Entonces, el pie de la altura desde A, estará en la circunferencia $A(h)$ de centro en A y radio h; y el lado opuesto a A estará en la tangente a $A(h)$ en el pie de la esta altura. Si esta tangente corta a $O(R)$ en dos puntos P y Q (para lo cual es necesario que $h < 2R$), el incentro de $\widehat{APQ}$ estará en una circunferencia $A'(\rho)$ de centro en el punto A' antipodal de A en $O(R)$, por el resultado (*R2.-*).

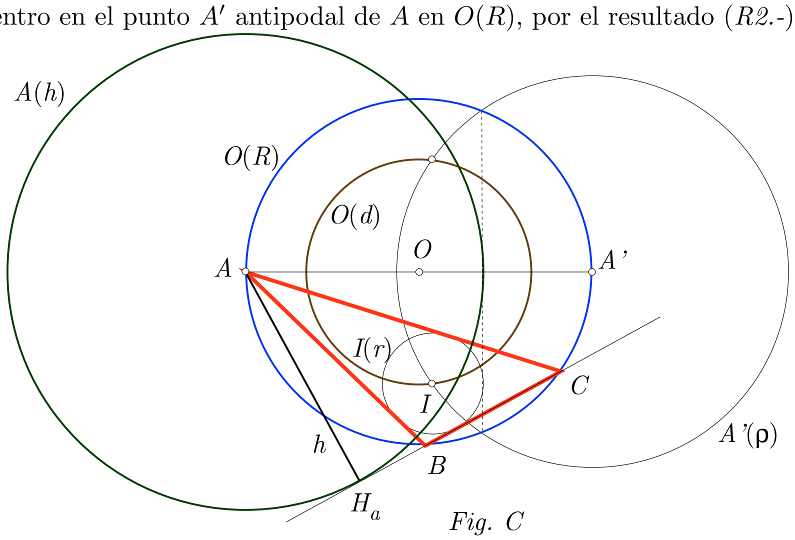

Fig. C

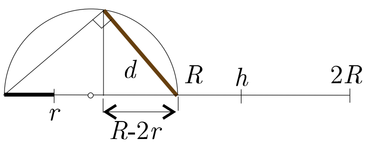

Fig D

Para determinar el radio de $A'(\rho)$, nos bastará con tomar un triángulo $\widehat{APQ}$ particular (Fig B), y determinar su incentro. Tomemos el $\widehat{AP_0Q_0}$, determinado por la tangente a $A(h)$ perpendicular a AO (en el punto H_0 de corte de $A(h)$ con AO). Entonces, su incentro I_0 es la intersección de la recta AO con la circunferencia de centro en A' y que pasa por P_0 y Q_0. [(1)] Se tienen, por tanto, la siguientes relaciones

$$\overline{AH_0} = h, \qquad \overline{OH_0} = |R-h|, \qquad \overline{OP_0} = R, \qquad \overline{A'H_0} = 2R - h.$$

Con lo que en los triángulos rectángulos $\widehat{OH_0P_0}$ y $\widehat{A'H_0P_0}$ se tiene que $\overline{H_0P_0}^2 = h(2R-h)$ y $\overline{A'P_0}^2 = 2R(2R-h)$. Y, por tanto,

$$\rho^2 = 2R(2R-h).$$

Por otra parte, por (*R1.-*), el incentro del triángulo buscado ha de estar en la circunferencia $O(d)$, de centro en O y radio $d = \sqrt{R(R-2r)}$. Luego, el problema de construcción tendrá solución cuando las circunferencia $O(d)$ y $A'(\rho)$ se corten; siendo cada punto de intersección el incentro I de un triángulo buscado. Este triángulo se determina trazando la circunferencia $I(r)$ de centro I y radio dado r y, luego, trazando las tangentes a ella desde A. Donde estas tangentes corten a $O(R)$ están los dos vértices B y C del triángulo $\widehat{ABC}$ pedido: por el porismo de Steiner, BC también es tangente a $I(r)$.

Para que el triángulo $\widehat{ABC}$ pueda construirse es necesario que

$$h < 2R, \qquad 2r < R, \qquad R - \sqrt{R(R-2r)} \leq \sqrt{2R(2R-h)} \leq R + \sqrt{R(R-2r)}.$$

Otros caminos y otras formas de las expresiones de las restriciones para su construcción, se pueden seguir, usando las fórmulas siguientes, relativas a triángulos:

$$a = 2R \operatorname{sen} A, \qquad \operatorname{sen} \frac{A}{2} = \frac{r}{\sqrt{2R(h_a - 2r)}}.$$

Por lo que, a partir de los datos dados h_a, R y r, se puede pasar al problema de construir un triángulo con los siguientes datos:

- a, A, h_a http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2005.pdf
- a, A, r http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2110.pdf
- A, h_a, R http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2059.pdf
- A, R, r http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejct2037.pdf

[(1)] Para justificar esta construcción, así como para la demostración del resultado (*R1.-*) se puede consultar el párrafo §1.3 "Euler's formula and Steiner´s porism" en Paul Yiu.- Introduction to Geometry of the Triangle. pág 10, que está disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps