Si el lado a de un triángulo $\widehat{ABC}$ es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, es decir,

$$a = \frac{b^2+c^2}{b+c},$$

el segmento KI, que une el punto de Lemoine (simediano) al centro del círculo inscrito (incentro), es paralelo a aquel lado e igual a

$$\frac{abc(b-c)}{2s(b^2+c^2)},$$

siendo s el semiperímetro.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{445}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

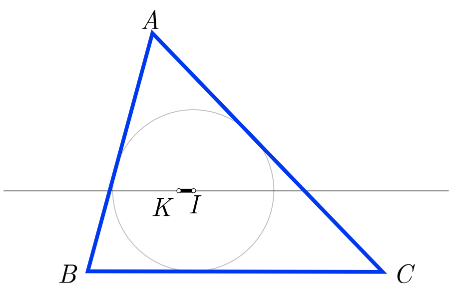
De Alba , L. (1901): Revista Trimestral de Matemáticas , Año I, pp.139-142, Diciembre, (número 4) (Problema 375)

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid; con el siguiente enunciado:

Si el lado a de un triángulo ABC es igual al cociente de la suma de los cuadrados de los otros dos lados por la suma de estos lados, la recta KI que une el punto de Lemoine al centro del círculo inscrito, es paralela a aquel lado e igual a

$$\frac{abc(b-c)}{2p(b^2+c^2)},$$

siendo p el semiperímetro.



Utilizaremos coordenadas baricéntricas homogéneas.

La recta KI, que contiene al simediano $K(a^2 : b^2c^2)$ y la incentro $I(a : b : c)$, tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = bc(-b+c)x + ac(a-c)y + ab(-a+b)z = 0.$$

Su punto del infinito se obtiene intersecándola con la recta del infinito $x+y+z=0$, con lo que se trata del punto de coordenadas [(1)]:

$$\Big(a\big(b^2+c^2-a(b+c)\big) : b\big(c^2+a^2-b(c+a)\big) : c\big(a^2+b^2-c(a+b)\big)\Big).$$

La condición necesaria y suficiente para que la recta KI sea paralela a lado BC es que este punto coincida con el punto del infinito de dicho lado, $(0:1:-1)$. Por tanto, sus respectivas coordenadas han de ser proporcionales:

$$\begin{aligned} a\big(b^2+c^2-a(b+c)\big) &= 0, \\ b\big(c^2+a^2-b(c+a)\big) &= \lambda, \\ c\big(a^2+b^2-c(a+b)\big) &= -\lambda. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema en las variables a y λ, se obtine que

$$\lambda = \frac{2bc\left(c^3-b^3\right)}{(b+c)^2}, \qquad a = \frac{b^2+c^2}{b+c}.$$

(1) Es el punto X_{518} de ETC

Para hallar la longitud del segmento KI utilizamos la expresión de la distancia entre dos puntos, P_1 y P_2, dada por la fórmula [2]

$$\boxed{\begin{aligned} P_1P_2^2 \quad = \quad & \frac{1}{(x_1+y_1+z_1)^2(x_2+y_2+z_2)^2}\Big(S_A\big((y_2+z_2)x_1-x_2(y_1+z_1)\big)^2+ \\ & +S_B\big((z_2+x_2)y_1-y_2(z_1+x_1)\big)^2+S_C\big((x_2+y_2)z_1-z_2(x_1+y_1)\big)^2\Big), \end{aligned}}$$

donde

$$S_A=\frac{-a^2+b^2+c^2}{2},\qquad S_B=\frac{a^2-b^2+c^2}{2},\qquad S_C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

Con Mathematica utilizando, por ejemplo, algunas rutinas incluidas en el cuaderno `Baricentricas.nb`, disponible en http://garciacapitan.auna.com/baricentricas, el cuadrado de la distancia entre K e I está dado por:

$$\frac{abc\big(a^4+b^4+c^4-2(a^3b+ab^3+a^3c+b^3c+ac^3+bc^3)+2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+a^2bc+ab^2c+abc^2\big)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)^2}$$

Si situstituimos en esta expresión el valor obtenido antes de $a=\dfrac{b^2+c^2}{b+c}$ y extraemos la raiz cuadrada, se llega a que

$$KI=\frac{bc(b-c)}{2\left(b^2+cb+c^2\right)},$$

que conicide con el valor pedido en el enunciado cuando en él se sustituye el valor de a obtenido.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2275.pdf

[2] Paul Yiul.- Introduction to Geometry of the Triangle. (pág. 88).
Disponible en http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps