Dado un triángulo $\widehat{ABC}$, denotamos por H_a, H_b y H_c los pies de las alturas desde los vértices A, B y C, respectivamente. Entonces, los pies B_a, C_a, Y_a, Z_a de las perpendiculares desde H_a a AC, AB, BH_b, CH_c están alineados.

Procediendo cíclicamente, ocurre que C_b, A_b, Z_b, X_b, por una parte, y A_c, B_c, X_c, Y_c, por otra, también están alineados.

Las tres rectas así obtenidas, determinan un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el simediano de éste.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\textbf{455}}$.

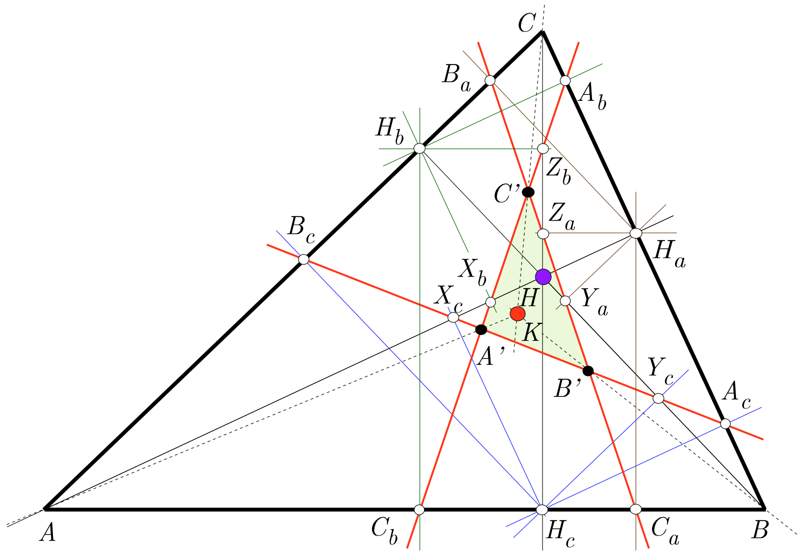
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Jean-Louis AYME (Lycée Lislet Geoffroy, 97400 St.-Denis,) Île de la Réunion, France; con el siguiente enunciado:

> *Sean AA_1, BB_1, CC_1 las alturas de un triángulo acutángulo. Demostrar que los pies de las perpendiculares trazadas por C_1 a los segmentos AC, BC, AA_1 y BB_1 están alineados. C_1 es el punto que determina la recta de Miquel BHB1 según el triángulo AA_1C. (profundización del problema 447 de esta revista)*

Ayme, J.L. (2008), http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/

—— - ——



Usaremos coordenadas baricéntricas y adoptaremos la notación de Conway:

$$S_A = \frac{-a^2+b^2+c^2}{2}, \quad S_B = \frac{a^2-b^2+c^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}, \quad S^2 = S_AS_B + S_BS_C + S_CS_A,$$

donde a, b y c son las longitudes de los lados y S el doble del área del triángulo $\widehat{ABC}$.

Los pies de las alturas son:

$$H_a(0 : S_C : S_B), \qquad H_b(S_C : 0 : S_A), \qquad H_c(S_B : S_A : 0).$$

Los pies de las perpendiculares trazadas del H_a a los otros lados son:

$$B_a(S_C^2 : 0 : S^2), \qquad C_a(S_B^2 : S^2 : 0).$$

Los pies de las perpendiculares por H_a a las otras alturas son:

$$Y_a\big(S_BS_C : S_C(S_A+S_C) : S_AS_B\big), \qquad Z_a\big(S_BS_C : S_AS_C : S_B(S_A+S_B)\big).$$

La matriz formada por las coordenadas de los puntos B_a, C_a, Y_a y Z_a,

$$\begin{pmatrix} S_C^2 & 0 & S^2 \\ S_B^2 & S^2 & 0 \\ S_BS_C & S_CS_A+S_C^2 & S_AS_B \\ S_BS_C & S_AS_C & S_BS_A+S_B^2 \end{pmatrix}.$$

tiene un menor de orden dos no nulo, $\begin{pmatrix} 0 & S^2 \\ S^2 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la primera fila por $S_A S_B(S_B^2+S^2)$ y sumándole la segunda fila multiplicada por $(S_A+S_B)S_C(S_C^2+S^2)$ nos da proporcional a la tercera fila. Multiplicando la primera fila por $S_B(S_A+S_C)(S_B^2+S^2)$ y sumándole la segunda multiplicada por $S_A S_C(S_C^2+S^2)$ da proporcional a la cuarta fila. Concluimos que el rango d ela matriz es dos y por tanto los cuatro puntos están alineados.

— —

Los puntos $A' = A_bC_b \cap B_cA_c$, $B' = B_cA_c \cap C_aB_a$ y $B' = C_aB_a \cap A_bC_b$ de coordenadas

$$A'\big(2S_BS_C - S_A(S_B+S_C) : S_A(S_A+S_C) : S_A(S_A+S_B)\big) = (*** : b^2 : c^2),$$

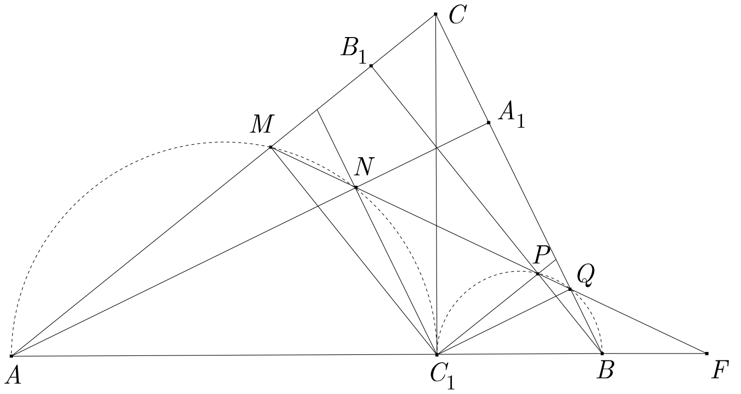
$$B'\big(S_B(S_B+S_C) : S_AS_B - 2S_AS_C - S_BS_C : S_B(S_A+S_B)\big) = (a^2 : *** : c^2),$$

$$C'\big(S_C(S_B+S_C) : S_C(S_A+S_C) : S_BS_C + S_A(2S_B+S_C)\big) = (a^2 : b^2 : ***),$$

forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el simediano $K(a^2 : b^2 : c^2)$.

— —

Solución de José María Pedret. Ingeniero naval. (Esplugas de Llobregat, Barcelona), (5 de abril de 2008)



Sea M el pie de la perpendicular desde C_1 a CA, N el pie de la perpendicular desde C_1 a AA_1, P el pie de la perpendicular desde C_1 a BB_1 y Q el pie de la perpendicular desde C_1 a BC.

AMC_1 y C_1PB tienen los lados paralelos por ser perpendiculares a las mismas rectas; por tanto son homotéticos.

ANC_1 y C_1QB tienen los lados paralelos por ser perpendiculares a las mismas rectas; por tanto son homotéticos.

M y N están sobre el mismo círculo $AMNC_1$ por ser vértices opuestos a la hipotenusa en triángulos con la misma base AC_1. P y Q están sobre el mismo círculo C_1PQB por ser vértices opuestos a la hipotenusa en triángulos con la misma base C_1B. Pero los dos círculos anteriores son homotéticos en las mismas homotecias que los ángulos anteriores y en consecuencia los triángulos AMC_1, ANC_1 son respectivamente homotéticos a los triángulos C_1PB y C_1QB en la misma homotecia de centro F que es la intersección de MP con AB (o la intersección de NQ con BA). Por lo tanto, si demostramos que F, P y Q están alineados; como también lo están F, P y M (también F, Q y N); habremos demostrado que M, N, P, Q están alineados como pide el enunciado. Para demostrar la alineación de F, P, Q demostraremos que el ángulo $\widehat{FQP}$ es nulo

$$\widehat{PQF} = \widehat{PQB} + \widehat{BQF} = (\widehat{PQC_1} + \widehat{C_1QB}) + \widehat{BQF} = \widehat{BQF} + (\widehat{FQC_1} + \widehat{C_1QB}) =$$

$$= (\widehat{BQF} + \widehat{FQC_1}) + \widehat{C_1QB} = \widehat{BQC_1} + \widehat{C_1QB} = \widehat{BQB} = 0.$$

Por lo tanto los pies respectivos de las perpendiculares del enunciado están alineados.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2284.pdf