Consideramos un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto cualquiera P. Sea $\widehat{P_aP_bP_c}$ el triángulo ceviano de P y los baricentros $B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c$ de los triángulos $\widehat{PBP_a}$, $\widehat{PCP_a}$, $\widehat{PCP_b}$, $\widehat{PAP_b}$, $\widehat{PAP_c}$, $\widehat{PBP_c}$.

1) Demostrar que los seis baricentros de estos triángulos están en una misma cónica si el punto P está sobre una de las medianas.

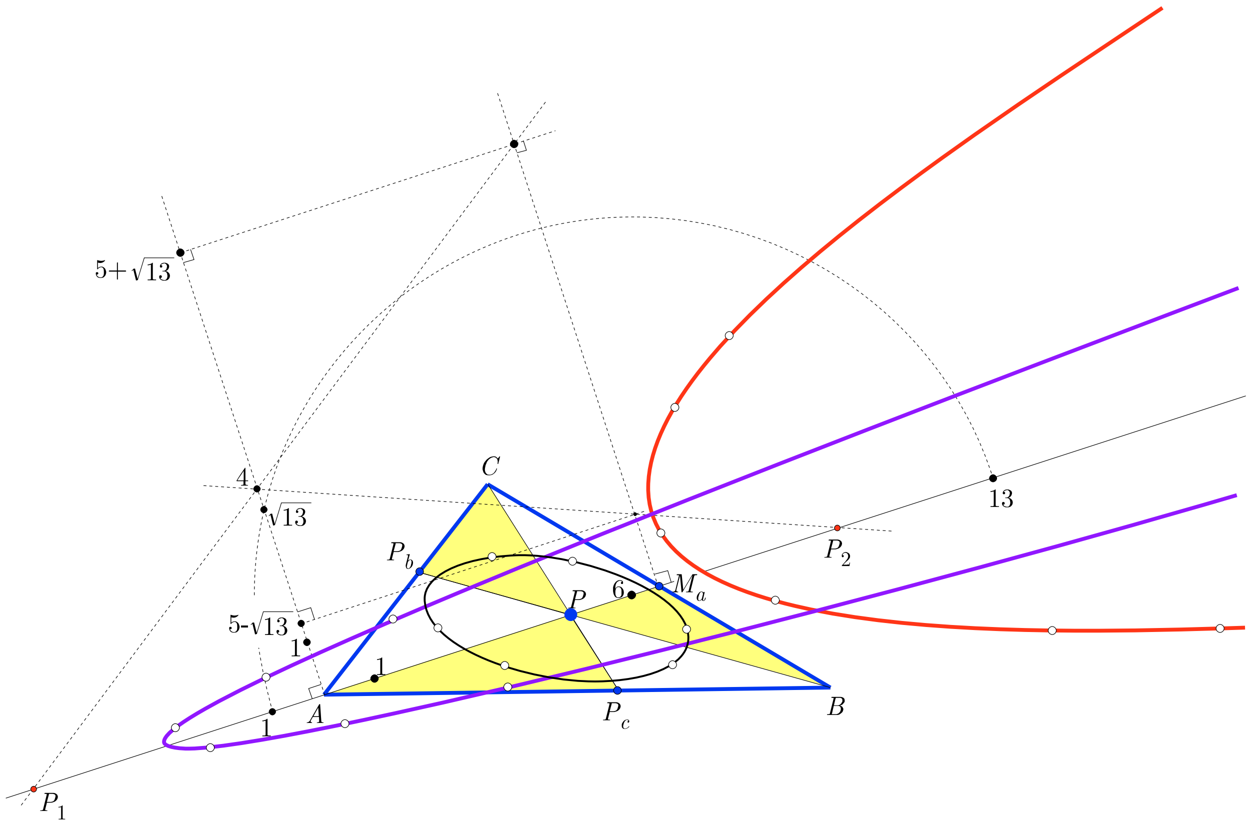
2) Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{458}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, profesor del IES Álvarez Cubero (Priego de Córdoba), con el siguiente enunciado:

> *Consideramos un triángulo ABC y un punto cualquiera P. Sea A'B'C' el triángulo ceviano de P. Consideramos los baricentros de los triángulos PBA', PCA', PCB', PAB', PAC', PBC'.*
> *1) Demostrar que los seis baricentros están en una misma cónica si y solo si el punto P está sobre una de las medianas.*
> *2) Construir con regla y compás dos puntos sobre la mediana correspondiente al vértice A para los que la cónica resulta ser una parábola*



En coordenadas baricéntricas, referidas a $A(1:0:0)$, $B(0:1:0)$ y $C(0:0:1)$, sea un punto $P(u:v:w)$ y los pies de sus cevianas $P_a(0:v:w)$, $P_b(u:0:w)$ y $P_c(u:v:0)$. El baricentro A_c del triángulo $\widehat{PAP_c}$ se obtiene intersecando la recta que une $A(1:0:0)$ con el punto medio $(u(2u+2v+w):v(2u+2v+w):(u+v)w)$ de PP_c, con la recta que une $P_c(u:v:0)$ con el punto medio $(2u+v+w:v:w)$ de AP. O bien, obteniendo primero las coordenadas del punto medio de $A(u+v:0:0)$ y $P_c(u:v:0)$, es decir, el punto que divide al segmento determinado por estos dos en la razón 1/1; dicho punto es $(u+v:0:0)+(u:v:0)=(2u+v:v:0)$. Entonces A_c es el que divide al segmento de extremos el punto recién obtenido y $P(u:v:w)$ en la razón 1/2; y resulta $2(u+v+w)(2u+v:v:0)+(2u+2v)(u:v:w)$; esto es:

$$A_c\left(3u^2+4vu+2wu+v^2+vw : v(2u+2v+w) : (u+v)w\right).$$

Similarmente, se obtienen las coordenadas de los baricentros de los restantente triángulos $\widehat{PBP_c}$, $\widehat{PBP_a}$, $\widehat{PCP_a}$, $\widehat{PCP_b}$ y $\widehat{PAP_b}$, que son, respectivamente,

$$B_c\left(u(2u+2v+w) : u^2+4vu+wu+3v^2+2vw : (u+v)w\right),$$

$$B_a\left(u(v+w):3v^2+2uv+4wv+w^2+uw:w(u+2v+2w)\right),$$
$$C_a\left(u(v+w):v(u+2v+2w):v^2+uv+4wv+3w^2+2uw\right),$$
$$C_b\left(u(2u+v+2w):v(u+w):u^2+vu+4wu+3w^2+2vw\right),$$
$$A_b\left(3u^2+2vu+4wu+w^2+vw:v(u+w):w(2u+v+2w)\right).$$

Estos seis baricentros estarán en una cónica de ecuación $fx^2+gy^2+hz^2+2pyz+2qzx+2rxy=0$, si el sitema lineal homogéneo de seis ecuaciones y seis incognitas f,g,h,p,q,r, que resulta de sustituir las coordenadas de los puntos en la ecuación de la cónica, tiene nulo el determinante formado por los coeficientes. El valor de tal determinante (ayudándonos, por ejemplo, de Mathematica) es:

$$81uvw(u+v)^2(v+w)^2(w+u)^2(u+v+w)^{12}(v-w)(w-u)(u-v).$$

Por lo que, **si el punto $P(u:v:w)$ no está sobre los lados ($x=0,y=0,z=0$) de $\widehat{ABC}$, ni sobre las paralelas ($x+y=0,y+z=0,z+x=0$) por cada vértice al lado opuesto (lados del triángulo preceviano de G) y ni en la recta del infinito ($x+y+z=0$)**, la condición necesaria y suficiente para que dichos baricentros estén en una cónica es que el punto P esté sobre alguna de las medianas, $AM_a:y-z=0$, $BM_b:z-x=0$ ó $CM_c:x-y=0$.

Para los casos excluidos (donde no ha de estar P), se tiene las siguientes situaciones:

1) Si el punto P está, por ejemplo, en el lado BC, cuatro baricentros están en BC (los tres vértices de su triángulo ceviano están en BC) y los otros dos en la paralela a BC por el baricentro G de $\widehat{ABC}$: Los seis baricentros están en una parábola degenerada, producto de dos rectas paralelas.

2) Si P está en un lado del triángulo preceviano de G (formado por las paralelas a los lados de $\widehat{ABC}$ por el vértice opuesto), la cónica que pasa por los seis baricéntricos no es elipse (dos de los baricentros coinciden con el punto del infinito del lado considerado). Más abajo, determinamos las parábolas de esta familia de cónicas.

3) Si P está en la recta del infinito, todos los baricentros están en ella: la cónica degenera en la recta del infinito, tomada dos veces.

— —

Vamos a determinar las cónicas que son parábolas, cuando P recorre la mediana AM_a ($M_a(0:1:1)$ punto medio de BC). Ha de ocurrir que la cónica que pasa por los seis baricentros debe ser tangente a la recta del infinito; es decir, debe tener un sólo punto común con ésta.

Calculando los coeficientes de la cónica que pasa por los baricentros A_c,B_c,B_a,C_a y C_b, correspondientes a un punto $P(u,v,v)$, sobre la mediana por A, da la ecuación:

$$v(9u^3+58u^2v+122uv^2+72v^3)x^2+u(18u^3+87u^2v+118uv^2+38v^3)(y^2+z^2)$$

$$-u(18u^3+75u^2v+98uv^2+34v^3)yz-(9u^4+66u^3v+175u^2v^2+164uv^3+36v^4)x(y+z)=0.$$

La interserccción con la recta del infinito $x+y+z=0$ da:

$$\Big(2u(2u+v):-u(2u+v))-v\sqrt{-u(2u+v)(u^2+5uv+3v^2)}:-u(2u+v))+v\sqrt{-u(2u+v)(u^2+5uv+3v^2)}\Big). \quad (1)$$

Para que sea parábola debe anularse el radicando de las raices que aparecen en (1); es decir, ha de verificarse que

$$-u(2u+v)(u^2+5uv+3v^2)=0.$$

• Si $u=0$, $P=M_a(0:1:1)$ y la cónica es una parábola degenerada en el producto de dos rectas paralelas $x(2x-y-z)=0$; es decir, el lado BC y su paralela por el baricentro $G(1:1:1)$.

• Para $2u+v=0$, la parábola correspondiente al punto $P(1:-2:-2)$, simétrico del baricentro $G(1:1:1)$ respecto a $M_a(0:1:1)$, degenera en el producto de las rectas $(10x+y+z)(13x+4y+4z)=0$, ambas paralelas a $BC:x=0$.

• Los pares (u,v) que anulan al último factor dan lugar a los puntos:

$$P_1(5+\sqrt{13}:-2:-2), \qquad P_2(5-\sqrt{13}:-2:-2).$$

En la figura se muestra la construcción (con regla y compás) de los puntos de coordenadas $(5\pm\sqrt{13}:-2:-2)$, que son los únicos, en la mediana AM_a que dan lugar a dos parábolas no degeneradas.

El punto P_1 es el que divide al segmento AM_a en la razón $-4/(5-\sqrt{13})$ y P_2 lo divide en la razón $-4/(5+\sqrt{13})$; es decir:

$$\frac{AP_1}{P_1M_a} = -\frac{4}{5+\sqrt{13}}, \qquad \frac{AP_2}{P_2M_a} = -\frac{4}{5-\sqrt{13}}.$$

Las ecuaciones de estas parábolas son:

$$(14 \pm 5\sqrt{13})x^2 - (211 \pm 58\sqrt{13})(y^2+z^2) + (64 \pm 19\sqrt{13})x(y+z) + (622 \pm 172\sqrt{13})yz = 0.$$

Decir, para finalizar, que de las coordenadas (1) de los puntos del infinito de las cónicas, surge que para las parábolas halladas, su punto del infinito es $(2:-1:-1)$, para ambas; es decir, sus ejes son paralelos a la mediana AM_a. De hecho, todas las cónicas tienen su centro en esta mediana.

— —

Analicemos ahora el caso en que el punto $P(u:v:w)$ esté en uno de los lados del triángulo preceviano de G.

Si tomamos el punto $P(u:v:-v)$ sobre la paralela por A al dado opuesto BC, los correspondientes baricentros son:

$$A_c(3u^2{+}2uv : v(2u{+}v) : -v(u{+}v)), \quad B_c(u(2u{+}v) : u^2{+}3uv{+}v^2 : -v(u{+}v)), \quad B_a(0:uv:-uv), \quad C_a(0:uv:-uv),$$

$$C_b(u(2u-v) : (u-v)v : u^2-3uv+v^2), \quad A_b(3u^2-2uv : (u-v)v : -(2u-v)v).$$

Dos de estos, B_a y C_a son el mismo punto del infinito, $(0:1:-1)$. La cónica formada por los cinco puntos distintos es:

$$v(3u^2-14v^2)x^2 + (6u^3-9u^2v-12uv^2+4v^3)y^2 + (-6u^3-9u^2v+12uv^2+4v^3)z^2$$
$$+(-3u^3-6u^2v+15uv^2+8v^3)xy + (3u^3-6u^2v-15uv^2+8v^3)xz - 2(3u-2v)v(3u+2v)yz = 0.$$

Esta cónica tiene común con la recta del infinito $x+y+z=0$, los puntos

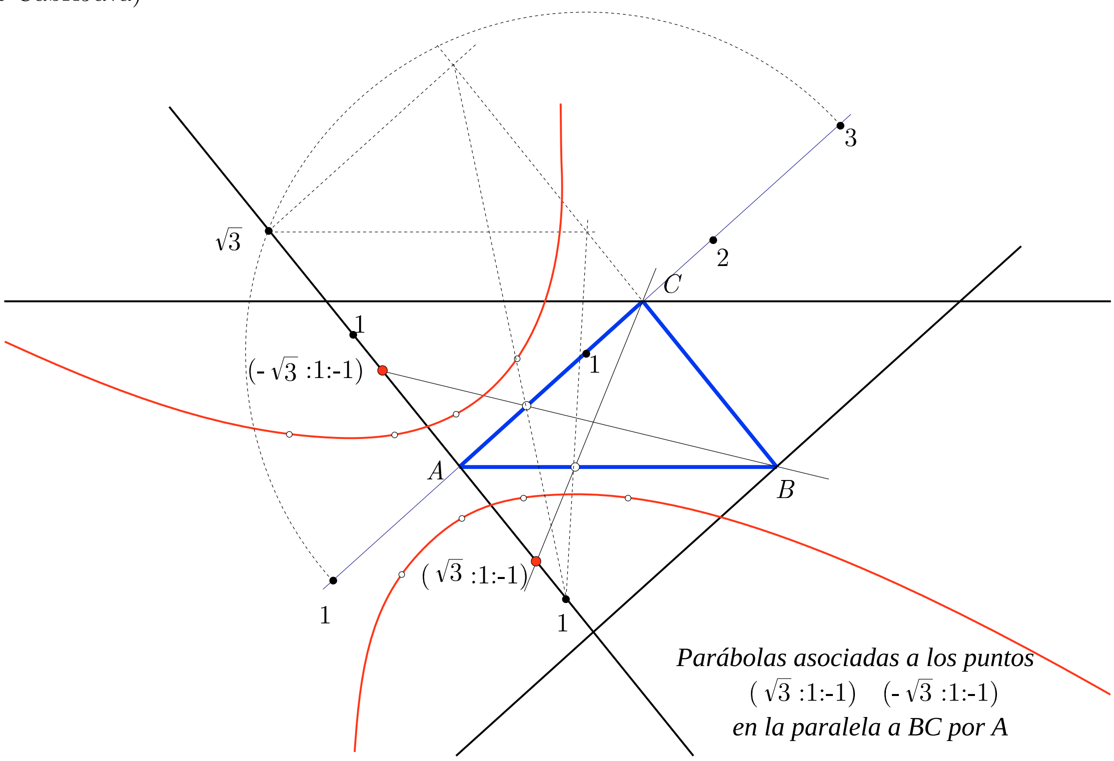
$$(0:1:-1), \qquad \big(-2u^3+6uv^2 : (u-v)^2(u+2v) : (u-2v)(u+v)^2\big).$$

La cónica será parábola si estos puntos coinciden (con el punto del infinito de lado BC); esto ocurre cuando

$$P_1\left(\sqrt{3}:1:-1\right), \qquad P_2\left(-\sqrt{3}:1:-1\right).$$

Para obtener, por ejemplo, el punto P_2, sólo necesitamos el pie de su ceviana por B, que es el punto que divide a AC en la razón $-1/\sqrt{3}$; el cual se construye como aparece en la figura siguiente.

(Applet CabriJava)



Las ecuaciones de estas parábolas son:

$$\pm 5\sqrt{3}x^2 + (18 \pm 23\sqrt{3})y^2 + (-18 \pm 23\sqrt{3})z^2 + (18 \pm 10\sqrt{3})xy + (-18 \pm 10\sqrt{3})xz \pm 46\sqrt{3}yz = 0.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2288.pdf