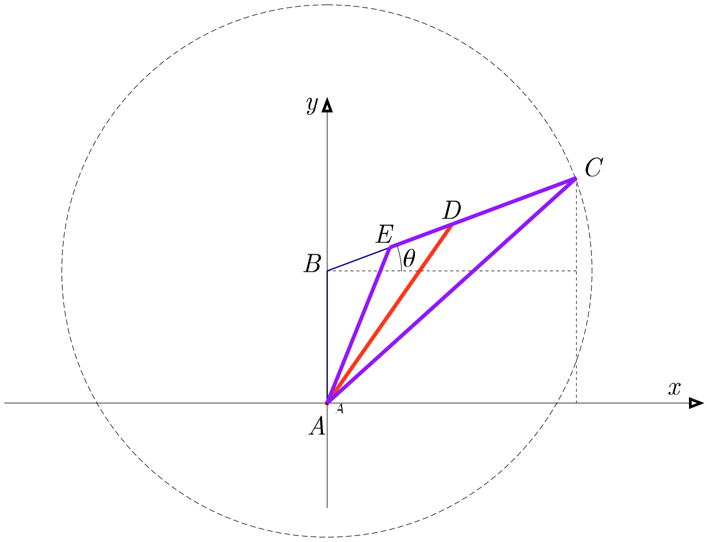
$\widehat{ABC}$ es un triángulo en el que $BC = 2AB$. Sean D el punto medio de BC, y E el punto medio de BD. Demostrar que AD es la bisectriz del ángulo $\widehat{CAE}$.

SOLUCIÓN:

Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **464**.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Aref, M.N., Wernick,W. (1968): Problems & Solutions in Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc, New York. (pag. 4)



Por el teorema de las bisectrices, basta con probar que $AC/DC = AD/DE$, esto es que $AC/AE = 2$.

Estableciendo un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal con origen en A y B en el eje de ordenadas, las coordenadas de los puntos C y E son, si c es la longitud del lado AB:

$$C(2c\cos\theta, c + 2c\operatorname{sen}\theta), \qquad E\left(\frac{c}{2}\cos\theta, c + \frac{c}{2}\operatorname{sen}\theta\right).$$

Debemos establecer que $\overline{AC}^2 - 4\overline{AE}^2 = 0$,

$$4c^2\cos^2\theta + (c + 2c\operatorname{sen}\theta)^2 - 4\left(\frac{c^2\cos^2\theta}{4} + \left(c + \frac{c\operatorname{sen}\theta}{2}\right)^2\right) = -3c^2 + 3c^2\cos^2\theta + 3c^2\operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2297.pdf