Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el exincentro I_a correspondiente a A, y que si $\widehat{P_aP_bP_c}$ es el triángulo ceviano de P entonces P_b, P_c e I siempre están alineados.

SOLUCIÓN:

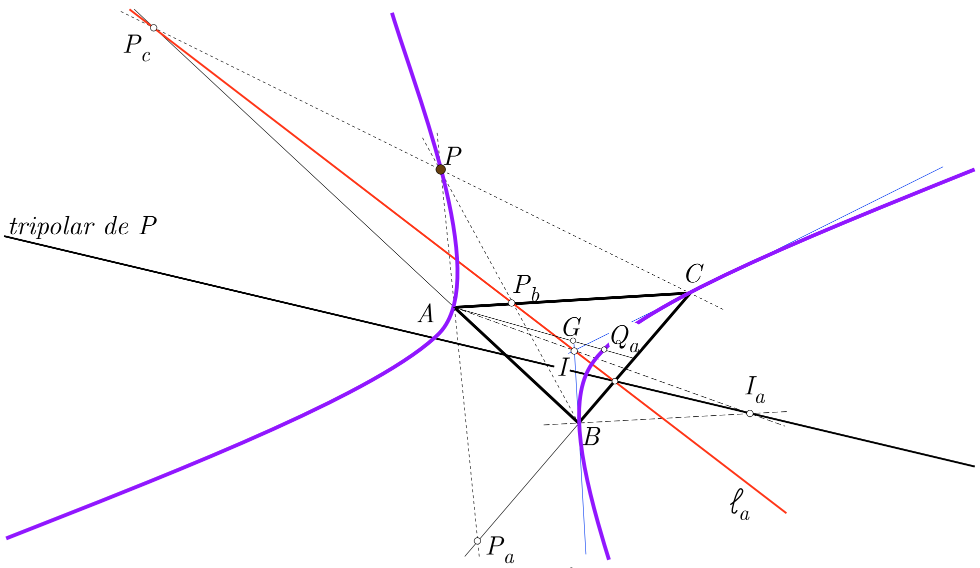
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\textbf{471}}$.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Francisco Javier García Capitán , profesor del IES Álvarez Cubero (Priegode Córdoba); con el enunciado:

> *Sean ABC un triángulo e I su incentro. Construir la cónica que pasa por A, B y C siendo tangente en B y C a las bisectrices BI y CI. Demostrar que esta cónica es siempre una hipérbola. Demostrar que la polar trilineal de cualquier punto P sobre ella pasa por el excentro correspondiente a A, y que si XYZ es el triángulo ceviano de P entonces Y, Z e I siempre están alineados.*

> ***Polar trilineal***. *Sean ABC es un triángulo y P un punto de su plano. Si las rectas AX, BY, CZ cortan a los lados BC, CA, AB en los puntos X, Y, Z, es decir, si XYZ es el triángulo ceviano de P respecto de ABC, entonces, por el teorema de Desargues, los puntos de intersección*
> $$X' = BC \cap YZ, \quad Y' = CA \cap ZX, \quad Z' = AB \cap XY$$
> *están alineados. La recta que los contiene se llama polar trilineal del punto P respecto del triángulo ABC.*



Utilizando coordenadas baricéntricas, relativas al triángulo $\widehat{ABC}$, el incentro tiene de coordenadas $I(a : b : c)$.

El haz de cónicas bitangentes en $B(0 : 1 : 0)$ y $C(0 : 0 : 1)$ a las bisectrices $BI : \ cx - az = 0$ y $CI : \ ay - bx = 0$ es:

$$\lambda x^2 + \mu(ay - bx)(cx - az) = 0.$$

La cónica de este haz que pasa por $A(1 : 0 : 0)$ es

$$\boxed{cxy + bxz - ayz = 0.}$$

La intersección de esta cónica con la recta del infinito, $x + y + z = 0$, da los puntos, de coordenadas reales,

$$\left(a + b - c \pm \sqrt{a^2 + 2(b + c)a + (b - c)^2} : -a - b - c \mp \sqrt{a^2 + 2(b + c)a + (b - c)^2} : 2c\right),$$

luego se trata de una hipérbola.

Dado un punto $P(u : v : w)$ su polar trilineal o tripolar, respecto a $\widehat{ABC}$, es

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 0 \qquad \text{ó} \qquad vwx + uwy + uvz = 0.$$

Si el punto P está en la hipérbola, $cuv + buw - avw = 0$, el exincentro $I_a(-a : b : c)$ satisface a la ecuación de la tripolar de P.

Los pies de las cevianas BP y CP son $P_b(u : 0 : w)$ y $P_c(u : v : 0)$. Para que estén alineados con el incentro $I(a : b : c)$, se ha de verificar que

$$\begin{vmatrix} u & 0 & w \\ u & v & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix} = cuv + buw - avw = 0,$$

lo que se verifica al estar $P(u : v : w)$ en la hipérbola.

Notas adicionales:

• Para construir la hipérbola, de la que ya conocemos tres puntos, A, B y C y las tangentes en dos ellos, utilizamos el teorema de Pascal, en la situación límite de que el hexágono se reduce a un triángulo junto con las tangentes a la cónica en dos vértices. Basta trazar una recta ℓ arbitraria por B y encontrar el otro punto de la hipérbola en esta recta. Los puntos $\ell \cap CI$ y $BI \cap AC$ determinan la recta de Pascal p. La recta determinada por los puntos $p \cap BC$ y A, corta a ℓ en otro punto de la hipérbola.

Procediendo similarmente, tomando una recta por C, en vez de por B, podemos encontrar otro punto de la hipérbola. Con cinco punto, ya podemos construir la hipérbola por puntos.

• Si, procediendo cíclicamente, tomamos la hipérbola circunscrita y tangente a las bisectrices CI y AI o tangente a AI y BI, obtenemos tres hipérbolas (Applet CabriJava):

$$\mathcal{H}_a : \ cxy + bxz - ayz = 0, \qquad \mathcal{H}_b : \ ayz + cyx - bzx = 0, \qquad \mathcal{H}_c : bzx + azy - cxy = 0,$$

cuyos centros son, respectivamente, los puntos de coordenadas

$$C_a\left(\frac{a+b+c}{bc} : \frac{a+b-c}{ac} : \frac{a-b+c}{ab}\right),\ C_b\left(\frac{b-c+a}{bc} : \frac{a+b+c}{ca} : \frac{b+c-a}{ba}\right),\ C_c\left(\frac{c+a-b}{ab} : \frac{c-a+b}{ca} : \frac{a+b+c}{ab}\right).$$

Estos centros forman un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, con centro de perspectividad en el punto

$$\big(a(a+b-c)(a-b+c) : b(a+b-c)(-a+b+c) : c(a-b+c)(-a+b+c)\big).$$

Se trata del punto X_{57} de ETC ("Encyclipedia of Triangle Centers"), que es el centro de perspectividad del triángulo de contacto interior $\widehat{A_I B_I C_I}$ (formado por los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita a $\widehat{ABC}$) y el triángulo excentral $\widehat{I_a I_b I_c}$.

• Si en vez de tomar cónicas circunscritas, tangentes a las bisectrices interiores, las tomamos tangentes a la bisectrices exteriores, se obtiene una única cónica (elipse [(1)]) inscrita en el triángulo excentral:

$$ayz + bzx + cxy = 0.$$

El centro de esta elipse es el punto intermedio X_9, $(a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c))$, de ETC, conjugado isogonal de X_{57}.

• La tripolar de $P(u : v : w)$, $vwx + uwy + uvz = 0$, y la recta $\ell_a :\ P_bP_c$, $-vwx + uwy + uvz = 0$, se cortan en el punto $(0 : -v : w)$, sobre el lado BC, cuando P varía en la hipérbola $\mathcal{H}_a :\ cxy + bxz - ayz = 0$.

El punto P en la hipérbola $\mathcal{H}_a$ para el que su tripolar, respecto a $\widehat{ABC}$, y la recta ℓ_a (que pasa por los pies de sus cevinas por B y C), son paralelas (a BC) es $Q_a(a : b+c : b+c)$, que esta en la mediana por A. Y para las otras hipérbolas $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, los correspondientes puntos son $Q_b(c+a : b : c+a)$ y $Q_c(a+b : a+b : c)$, situados en las medianas por B y C; por lo que, $\widehat{ABC}$ y $\widehat{Q_aQ_bQ_c}$ son perspectivos, con centro de perspectividad en el baricentro G de $\widehat{ABC}$.

No existen otros triángulos de este tipo perspectivos con $\widehat{ABC}$: El punto P en $\mathcal{H}_a$, tal que su tripolar y ℓ_a se corten en $(0 : -t : 1-t)$ es $(at^2 - at : (b+c)t^2 - bt : (b+c)t^2 - (2b+c)t + b)$. Por lo que, para que éste punto y sus correspondientes en $\mathcal{H}_b$ y $\mathcal{H}_c$, formen un triángulo perspectivo con $\widehat{ABC}$, se ha de verificar $3t^2 - 3t + 1 = 0$, que no tiene soluciones reales.

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2303.pdf

[(1)] La intersección de esta cónica con la recta del infinito da los puntos imaginarios (r y R, radios de las circunferencias inscrita y circunscrita):

$$\left(a-b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)} : -a+b-c \mp \sqrt{a^2+b^2+c^2-2(ab+bc+ca)} : 2c\right) =$$
$$= \left(a-b+c \pm 2\sqrt{-r(r+4R)} : -a+b-c \mp 2\sqrt{-r(r+4R)} : 2c\right).$$